Álgebra Lineal y Geometría

(Grado en Física)

Problemas. Temas 1–6.

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

Ejercicio 1. Se consideran tres subconjuntos A, B y C de un conjunto Ω. El conjunto Ω y los subconjuntos A, B y C está representados en el diagrama 1. El diagrama se lee así la región encerrada dentro del rectángulo representa Ω, y los tres discos representan A, B y C (un tal diagrama se llama *diagrama de Venn*).

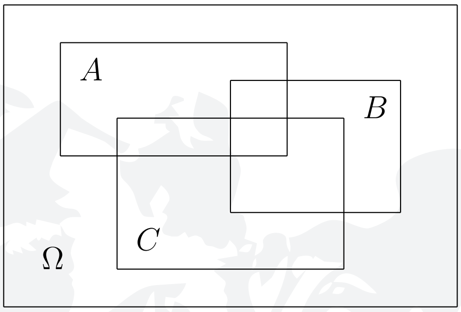

Diagrama 1

El diagrama 2 define los 8 subconjuntos S, T, U, V, W, X, Y, Z representados por las regiones delimitadas por los segmentos.

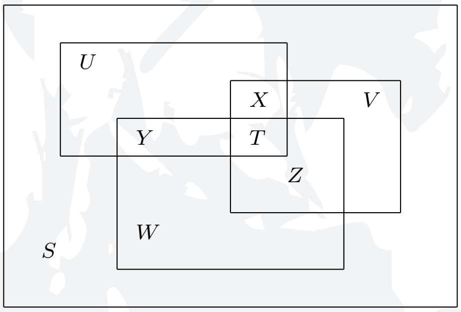

Diagrama 2

1. Cada subconjunto obtenido por unión de unos de estos 8 subconjuntos puede también obtenerse de A, B, C y Ω por medio de las operaciones $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) y $\setminus$ (complemento). Por ejemplo,

$$U \cup T = (A \setminus (B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C).$$

   Hallar una tal descomposición, tan corta como sea posible, para los 4 subconjuntos siguientes:

$$X \cup Y \cup T, \quad X \cup Y \cup Z, \quad U \cup V \cup W, \quad U \cup Z.$$

   Prestar atención especial a poner paréntesis donde esta necesario.

2. Recíprocamente, todo subconjunto obtenido de Ω, A, B y C por medio de $\cup$, $\cap$ y $\setminus$ se escribe de manera única como unión de subconjuntos entre S, T, …, Z. Por ejemplo:

$$(A \setminus B) \cup C = T \cup U \cup W \cup Y \cup Z.$$

Hallar una tal descomposición para los tres subconjuntos:

$$\begin{gathered}(A \cup B) \setminus (A \cap C), \\ ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \setminus (B \cap C), \\ ((A \cup B) \cap C) \setminus ((A \cap B) \cup C).\end{gathered}$$

Ejercicio 2. Se supone que se conocen los números de elementos (o cardinal) de los conjuntos siguientes:

$$A, \quad B, \quad C, \quad A \cap B, \quad A \cap C, \quad B \cap C, \quad A \cap B \cap C.$$

Existe una fórmula expresando el numero de elementos de $A \cup B \cup C$ en función de estos siete números. Hallar esta fórmula, y demostrarla.

Ejercicio 3. Consideremos una aplicación $f : X \longrightarrow Y$. Sea $A \subset X$ y $B \subset Y$. Sabemos que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Si se supone que f es inyectiva o que f es sobreyectiva, ¿podemos afirmar que estas inclusiones son igualdades?

Ejercicio 4. Consideremos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ dos aplicaciones.

1. Suponemos que la composición $g \circ f$ es sobreyectiva. ¿Qué implica para f y g?

2. Suponemos ahora que $g \circ f$ es inyectiva. ¿Qué implica para f y g?

Ejercicio 5. Sean las aplicaciones:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : (0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h : \mathbf{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

Hallar, en cada caso, la imagen y la imagen inversa del intervalo $(0, 1]$.

Ejercicio 6 (Primer parcial 2011)**.** Consideramos la aplicación $f : X \longrightarrow Y$ dada por $f(x) = \text{sen}(x)$. Dar cuatro ejemplos de parejas de conjuntos X, Y de tal forma que f resulte:

- ni inyectiva ni sobreyectiva,
- inyectiva pero no sobreyectiva,
- sobreyectiva pero no inyectiva,
- biyectiva.

Ejercicio 7. Estudiar si las siguientes relaciones son o no de equivalencia sobre los conjuntos X dados:

1. En $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, la relación xRy si y sólo si $xy > 0$.
2. En $X = \mathbf{Z}$, la relación xRy si y sólo si $x \geq y$.
3. En $X = \mathbf{R}^2$, la relación $(x, y)R(x', y')$ si y sólo si existe un $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tal que $x = \lambda x'$, e $y = \lambda y'$.

Ejercicio 8. Dado un grupo multiplicativo finito con n elementos $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, una tabla del grupo G es una tabla con n filas y n columnas, marcadas cada una de ellas con los elementos del grupo, que contiene, en la celda de fila a_i, columna a_j, el valor de $a_i \cdot a_j$ (notemos que decimos "una" tabla del grupo porque depende del orden de enumeración de los elementos del grupo).
Éste es el ejemplo de una tabla del grupo de simetrías $S_2 = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$,

S_2	Id	σ
Id	Id	σ
σ	σ	Id

Hallar las tablas de S_3, C_2, C_3 y C_4.

Ejercicio 9. Probar que, en cada fila y columna de la tabla de un grupo G aparecen todos los elementos del grupo, cada uno exactamente una vez.

Ejercicio 10. Sea $\sigma \in S_n$. Recordemos que una inversión de σ es un par (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$.

1. Hacer la lista de todas las permutaciones elementos de S_3 y asociar a cada una su número de inversiones.
2. Misma pregunta para S_4.

3. En cada uno de los dos casos, ¿cuántas permutaciones tienen un número de inversiones par? ¿Cuántas tienen un número de inversiones impar?

Ejercicio 11. Hallar un polinomio con coeficientes reales y grado mínimo que tenga al número complejo

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

como raíz.

Ejercicio 12. Determinar todos los números complejos z tales que $|z| = 1$ (el modulo de z sea 1) y $z^3 - z$ sea real.

Ejercicio 13. Recordemos que *una raíz cuadrada* de un numero complejo z es cualquier numero α tal que $\alpha^2 = z$. Por ejemplo, las raíces cuadradas de 1 son 1 y -1. Hallar las raíces cuadradas de $1 + 4\,i\,\sqrt{3}$, y las de $1+i$.
NOTA: Para hallar las raíces cuadradas *exactas* se pueden usar las fórmulas del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}, \qquad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

Ejercicio 14. Demostrar que un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales de grado 3 tiene siempre por lo menos una raíz real.

Ejercicio 15. Encontrar todas las raíces de $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$.

Ejercicio 16. Un polinomio $P(x)$ es *par* si $P(-x) = P(x)$, y es *impar* si $P(-x) = -P(x)$.

Demostrar que cada polinomio se descompone en suma de un polinomio par y de un polinomio impar, y de sólo una manera.

Ejercicio 17. Demostrar que cada matriz cuadrada se descompone como suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica, y que, además, la descomposición es única.

Descomponer así la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular A^8 con, a lo más, tres productos de matrices. En general, dada una matriz A, ¿cuántas multiplicaciones hacen falta, como mucho, para hallar A^n?

Ejercicio 19. Se considera la matriz:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hallar las potencias de Z: Z^2, Z^3,...
2. Hallar $P(Z) = I_4 + 2\,Z^2 + Z^3 + 3\,Z^4$?
3. Sea $Q(X) = \sum_{i=1}^{n} iX^i \in \mathbf{Q}[X]$. Escribir la matriz $Q(Z)$.

Ejercicio 20. Consideremos la matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son tres números complejos distintos. Estudiar cuáles son las matrices cuadradas M de orden 3 que conmutan con D, es decir que verifican:

$$DM = MD$$

Ejercicio 21. Consideremos las tres matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificar la ley de asociatividad sobre el ejemplo particular del producto ABC. Es decir, efectuar el producto ABC de las dos maneras: $(AB)C$ y $A(BC)$.

Ejercicio 22. Encontrar todas la matrices B tales que $BA = I_2$ y las matrices C tales que $AC = I_3$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 23. Calcular los determinantes siguientes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 24. Calcular los determinantes:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} \qquad D_5 = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \qquad D_6 = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & b & x & x \\ x & x & c & x \\ x & x & x & d \end{vmatrix}$$

Ejercicio 25. Determinar el rango de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 20 & -2 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -i & i \\ i & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1+i & -1+i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2i & 1 & -1 \\ -1 & -1-i & -i & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 26. Determinar el rango de la matriz siguiente, según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27. Dar explícitamente la inversa de la matriz 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

supuesto que $ad - bc \neq 0$.

Ejercicio 28. Calcular las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 29. Clasificar, en función del parámetro correspondiente; y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2ax_1 & + & x_2 & + & 3ax_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & ax_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & ax_2 & - & 3x_3 & & & = & a \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (\alpha+2)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & \alpha-1 \\ \alpha x_1 & + & (\alpha-1)x_2 & + & x_3 & = & \alpha-1 \\ (\alpha+1)x_1 & & & + & (\alpha+1)x_3 & = & \alpha-1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 30. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 31. Para los siguientes enunciados, decir si son verdaderos o falsos, razonando la respuesta **brevemente**.

1. Un sistema compatible determinado puede tener más incógnitas que ecuaciones.

2. Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones que incógnitas.
3. Un sistema compatible determinado puede tener más ecuaciones independientes que incógnitas.
4. Para todo sistema incompatible se verifica que el número de ecuaciones independientes es mayor o igual que el de incógnitas.
5. El número de ecuaciones independientes de todo sistema compatible indeterminado es menor que el número de incógnitas.
6. No existen sistemas compatibles indeterminados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Ejercicio 32. Se consideran los vectores siguientes del $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^2$:

$$\{(3,2),\ (4,-1),\ (5,-2)\}$$

¿Son o no son linealmente dependientes?
Misma pregunta para los vectores siguientes de $\mathbf{R}^3$:

$$\{(9,-3,7),\ (1,8,8),\ (5,-5,1)\}$$

Y para los vectores siguientes de $\mathbf{R}^4$:

$$\{(2,-1,5,7),\ (3,1,5,-2),\ (1,1,1,-4)\}$$

Ejercicio 33. Sea $P(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales. Demostrar que $P(x)$ y sus n primeras derivadas: $P'(x)$, $P''(x)$, $\ldots$, $P^{(n)}(x)$ son linealmente independientes en el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}[x]_n$ (Idea: Fijar una base de $\mathbf{R}[x]_n$ y tomar coordenadas).

Ejercicio 34. En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^4$:

(a) Determinar λ tal que los tres vectores

$$\underline{a} = (3,1,-4,6),\ \underline{b} = (1,1,4,4),\ \underline{c} = (1,0,-4,\lambda),$$

sean dependientes.

(b) Se consideran los vectores linealmente independientes:

$$\underline{a} = (2,-2,3,1),\ \underline{b} = (-1,4,-6,-2).$$

Completar la familia $\{\underline{a},\ \underline{b}\}$ hasta una base de $\mathbf{R}^4$.

Ejercicio 35. Determinar razonadamente la dimensión de cada uno de los $\mathbf{R}$–espacios vectoriales de matrices con coeficientes reales y orden $n \times n$ siguientes:

- El espacio de todas estas matrices.
- El espacio de las matrices diagonales.
- El espacio de la matrices triangulares superiores.
- El espacio de las matrices simétricas.
- El espacio de las matrices antisimétricas.

Ejercicio 36. Sea V un K-espacio vectorial, y sea $S \subset V$. Demostrar los siguientes enunciados.

1. Si S es un sistema linealmente dependiente y $\underline{v} \in V$, entonces $S \cup \{\underline{v}\}$ es linealmente dependiente.
2. Si S es un sistema linealmente independiente y $\underline{v} \in S$, entonces $S \backslash \{\underline{v}\}$ es linealmente independiente.
3. Si S es un sistema de generadores y $\underline{v} \in V$, entonces $S \cup \{\underline{v}\}$ es un sistema de generadores.
4. Si S es un sistema de generadores y $\underline{v} \in V \setminus S$, entonces $S \cup \{\underline{v}\}$ es linealmente dependiente.
5. Si S es un sistema linealmente independiente y $\underline{v} \in S$, entonces $S \backslash \{\underline{v}\}$ no es sistema de generadores.
6. Si una base de V está contenida dentro de otra, entonces son iguales.

Ejercicio 37. Sea $\mathcal{B} = \{(1,0,1,3),(0,1,-1,0),(1,0,1,2),(-1,0,0,1)\}$. Probar que es una base de $\mathbf{R}^4$. Calcular las coordenadas de los siguientes vectores respecto de la base $\mathcal{B}$.

$$\underline{v}_1 = (1,0,1,0), \quad \underline{v}_2 = (1,1,1,1), \quad \underline{v}_3 = (1,-1,2,1).$$

Ejercicio 38. Sea V un $\mathbf{Q}$–espacio vectorial de dimensión 4, y consideramos $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ y $\mathcal{B}' = \{\underline{u}'_1, \underline{u}'_2, \underline{u}'_3, \underline{u}'_4\}$ dos bases de V relacionadas por:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
\underline{u}'_1 & = & 2\underline{u}_1 & + & \underline{u}_2 & - & \underline{u}_3 & & \\
\underline{u}'_2 & = & 2\underline{u}_1 & & & + & \underline{u}_3 & + & 2\underline{u}_4 \\
\underline{u}'_3 & = & \underline{u}_1 & + & \underline{u}_2 & - & \underline{u}_3 & & \\
\underline{u}'_4 & = & -\underline{u}_1 & & & + & 2\underline{u}_3 & + & 3\underline{u}_4
\end{array}\right.$$

1. Se consideran los vectores cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ se dan:

$$\underline{a}_{\mathcal{B}} = (1,2,0,1),\ \underline{b}_{\mathcal{B}} = (3,-1,2,1),\ \underline{c}_{\mathcal{B}} = (0,1,-2,3),\ \underline{d}_{\mathcal{B}} = (1,2,1,2).$$

   Determinar sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$.

2. Se consideran los vectores cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}'$ se dan:

$$\underline{x}_{\mathcal{B}'} = (0,1,1,-1);\ \underline{y}_{\mathcal{B}'} = (2,1,0,1);\ \underline{z}_{\mathcal{B}'} = (-1,2,0,6).$$

   Determinar sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}$.

Ejercicio 39. A cada número real θ asociamos la familia de dos vectores:

$$\mathcal{B}(\theta) = \{(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)),\ \ (-\text{sen}(\theta), \cos(\theta))\}.$$

- Demostrar que siempre es una base del $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.
- Para α y β números reales, hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}(\alpha)$ a $\mathcal{B}(\beta)$.
- ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(1,1)$ en la base $\mathcal{B}(\pi/3)$?

Ejercicio 40. Sea $\theta \in \mathbf{R}$. Sea $V(\theta)$ el subconjunto de $\mathbf{R}$ formado por los números $x + y\theta$, con $x, y \in \mathbf{Q}$.

- Demostrar que $V(\theta)$ es un subespacio vectorial del $\mathbf{Q}$–espacio vectorial $\mathbf{R}$.
- ¿Qué dimensión tiene $V(2)$? ¿Qué dimensión tiene $V(\sqrt{2})$?
- Indicar la regla que da la dimensión de $V(\theta)$, dependiendo del valor de θ.

Ejercicio 41. En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n; \mathbf{R})$ de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, consideremos $\mathcal{A}$, el subespacio vectorial de las matrices antisiméricas, y $\mathcal{S}$, el subespacio vectorial de las matrices simétricas. Demostrar que

$$\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

Ejercicio 42. Sean V, W dos k–espacios vectoriales. Consideramos el producto cartesiano $V \times W$ y, sobre sus elementos, las operaciones siguientes:

$$(\underline{v},\ \underline{w}) + (\underline{v}',\ \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}',\ \underline{w} + \underline{w}')$$

$$\alpha(\underline{u}, \underline{v}) = (\alpha\underline{u}, \alpha\underline{w})$$

Demostrar que estas operaciones definen, sobre $V \times W$, una estructura de k–espacio vectorial. Si tenemos que $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, hallar la dimensión de $V \times W$.

Ejercicio 43. En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se consideran los tres vectores:

$$\underline{a} = (1, 2, 0, 1), \underline{b} = (2, 3, 0, 3), \underline{c} = (3, 2, 1, 2).$$

Sea V el subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$ que generan. Hallar un sistema de ecuaciones lineales que defina V, es decir tal que V sea su conjunto de soluciones. ¿Cuál es la dimensión de V?

Ejercicio 44. En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ consideramos los subespacios vectoriales siguientes (V_1 definido por una familia de generadores, los otros por un sistema de ecuaciones implícitas):

$$V_1 = \langle (1, 1, 2, 1), (2, 2, 0, 2), (-1, -1, 6, -1) \rangle$$

$$V_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & 6x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$V_3 = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 6, -1) \rangle$$

$$V_4 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

- Hallar la dimensión y una base de V_1, V_2, V_3 y V_4.
- Hallar una base o un sistema de ecuaciones implícitas para cada uno de los subespacios siguientes:

$$V_1 + V_2, \quad V_1 + (V_2 \cap V_3), \quad (V_1 + V_2) \cap V_3.$$

Ejercicio 45 (Primer parcial 2010)**.** Se consideran los siguientes subespacios vectoriales del $\mathbf{R}$– espacio vectorial $\mathbf{R}^4$:

$$L_1 = \langle (2, 1, 2, 1), (1, 3, 1, 3), (3, 7, 3, 7) \rangle \qquad L_2 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

a) Calcular unas ecuaciones implícitas para L_1 y una base para L_2. Hallar la dimensión de cada uno de los dos subespacios vectoriales.

b) Calcular el subespacio $L_1 \cap L_2$. Determinar el subespacio $L_1 + L_2$.

c) Sea el vector $\underline{u} = (1,1,2,2)$. Encontrar dos vectores $\underline{u}_1 \in L_1$, $\underline{u}_2 \in L_2$, de manera que $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$. Encontrar otro par distinto de vectores, $\underline{v}_1 \in L_1$ y $\underline{v}_2 \in L_2$, tales que $\underline{u} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$.

d) Razonar si $\mathbf{R}^4 = L_1 \oplus L_2$.

Ejercicio 46 (Primer parcial 2011)**.** Sea V un $\mathbf{R}$-espacio vectorial, y sea $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_4\}$ una base de V. Consideremos los siguientes subespacios vectoriales de V:

$$L_1 = \langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2,\ \underline{v}_2 + \underline{v}_3,\ \underline{v}_3 + \underline{v}_4,\ \underline{v}_1 - \underline{v}_3 \rangle, \qquad L_2 = \left\{ \begin{array}{rrcrcl} x_1 & & & - & x_4 & = 0 \\ & x_2 & & & & = 0 \end{array} \right. ,$$

donde L_2 está definida mediante ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$.

a) Hallar una base de $L_1 \cap L_2$ y la dimensión de $L_1 + L_2$.

b) Hallar una base $\mathcal{B}'$ de $L_1 + L_2$ que contenga a la base de $L_1 \cap L_2$ y hallar las coordenadas del vector $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \underline{v}_4$ respecto de $\mathcal{B}'$.

c) Hallar, si es posible, un subespacio vectorial $L_0 \subset L_1$ tal que $V = L_0 \oplus L_2$.

Ejercicio 47 (Junio 2011)**.** Sea $V = \mathcal{M}(2; \mathbf{Q})$ el espacio de las matrices cuadradas 2×2 con coeficientes racionales. Sea $\mathcal{B}$ la base habitual de este subespacio, y sea

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Hallar una base de L y un sistema de ecuaciones implícitas que defina a L, respecto de $\mathcal{B}$.

Ejercicio 48. En el $\mathbf{R}$–espacio vectorial $\mathcal{M}(n; \mathbf{R})$, sea T^+ el subespacio vectorial de las matrices triangulares superiores, y T^- el subespacio vectorial de las matrices triangulares inferiores. Hallar la dimensión de $T^+ + T^-$.

Ejercicio 49. Sea V el $\mathbf{R}$–espacio vectorial de los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales y grado máximo 3. Hallar un complementario del subespacio W definido por:

$$W = \{P \in V \mid P(0) = P(1) = 0\}.$$

Ejercicio 50 (Diciembre 2010)**.** Consideramos $k[X]_2$ el k–espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, y en él la siguiente aplicación: para un elemento arbitrario $0 \neq \alpha \in k$,

$$f_\alpha (P(X)) = P (X - \alpha) .$$

- Sea L el conjunto de polinomios constantes. Probar que es subespacio vectorial de $k[X]_2$ y hallar un subespacio L' tal que $L \oplus L' = k[X]_2$.
- Probar que f_α es un automorfismo de $k[X]_2$.
- Probar que si un polinomio $P(X)$ verifica que $f_\alpha (P(X)) = c \cdot P(X)$, para algún $c \in k$, entonces $P(X) \in L$.

Ejercicio 51. Para cada uno de los siguientes subespacios de $V = \mathbf{R}^4$ hallar una base ortonormal, con respecto al producto escalar usual en V.

$$L_1 = \langle (1, 1, 0, 0),\ (1, 0, 1, 2),\ (1, 2, -1, -2) \rangle,$$

$$L_2 : x_1 - x_2 + x_4 = 0,$$

$$L_3 = L_2 \cap L_1.$$

Hallar así mismo los subespacios ortogonales a L_1, L_2 y L_3, así como la expansión de Fourier del sistema generador dado en L_1 con respecto a la base ortonormal calculada.

Ejercicio 52. Para cada uno de los siguientes subespacios de $V = \mathbf{C}^4$ hallar una base ortonormal, con respecto al producto escalar usual en V.

$$L_1 = \langle (i, 1 + i, 0, 0),\ (i, 0, 1, -2i),\ (i, 2 + 2i, -1, 2i) \rangle,$$

$$L_2 : x_1 - (1 - i)x_2 + x_4 = 0,$$

$$L_3 = L_2 \cap L_1.$$

Hallar así mismo los subespacios ortogonales a L_1, L_2 y L_3, así como la expansión de Fourier del sistema generador dado en L_1 con respecto a la base ortonormal calculada.

Ejercicio 53. En los siguientes espacios vectoriales, estudiar cuáles de las propiedades del producto escalar usual en k^n se verifican para las aplicaciones dadas:

1. Sea $V = k[x]$, $\alpha \in k$ y

$$\begin{array}{rcl} \theta : V \times V & \longrightarrow & k \\ (f,g) & \longmapsto & fg(\alpha) \end{array}$$

2. Sea $V = \mathcal{C}([0,1])$ y

$$\begin{array}{rcl} \vartheta : V \times V & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)g(1-x)dx \end{array}$$

3. Sea $V = \mathcal{M}(2;k)$ y

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \times V & \longrightarrow & k \\ (A,B) & \longmapsto & \sum a_{ii}b_{ii} \end{array}$$

4. Sea $V = \mathcal{M}(2;k)$ y

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \times V & \longrightarrow & k \\ (A,B) & \longmapsto & \sum |A \cdot B| \end{array}$$

5. Sea $V = \mathbf{R}^n$, $A \in \mathcal{M}(n;\mathbf{R})$ simétrica y

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \times V & \longrightarrow & k \\ (\underline{u},\underline{v}) & \longmapsto & \underline{u} \cdot A \cdot \underline{v}^t \end{array}$$

Ejercicio 54. Para cada una de las aplicaciones siguientes, estudiar si son homomorfismos y, en caso afirmativo, elegir una base para el espacio de partida y una base del espacio de llegada, y dar la matriz del homomorfismo con respecto a estas bases.

- La aplicación traza:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr} : \mathcal{M}(2;\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}$$

- La derivación:

$$\begin{array}{rcl} D : \mathbf{R}[X]_2 & \longrightarrow & \mathbf{R}[X]_1 \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

- La derivación:

$$\begin{array}{rcl} D: V & \longrightarrow & V \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

donde V es el subespacio de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ generado por $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$.

- La multiplicación por $X-1$:

$$\begin{array}{rcl} \mu: \mathbf{R}[X]_2 & \longrightarrow & \mathbf{R}[X]_3 \\ P(X) & \longmapsto & (X-1)\cdot P(X) \end{array}$$

- El cambio de variable $X = Y - 1$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi: \mathbf{R}[X]_2 & \longrightarrow & \mathbf{R}[Y]_2 \\ P(X) & \longmapsto & P(Y-1) \end{array}$$

Para cada uno de los homomorfismos, determinar si es inyectivo o no, y determinar si es sobreyectivo o no, hallando núcleo e imagen.

Ejercicio 55. Se considera el espacio vectorial $\mathcal{M}(2;\mathbf{Q})$ y en él la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sea $f : \mathcal{M}(2;\mathbf{Q}) \longrightarrow \mathcal{M}(2;\mathbf{Q})$ definida así: $f(X) = A\cdot X$ para cada $X \in \mathcal{M}(2;\mathbf{Q})$. Se pide:

1. Probar que f es un endomorfismo de espacios vectoriales.
2. Hallar las ecuaciones de f respecto de la base habitual de $\mathcal{M}(2;\mathbf{Q})$. ¿Es f un automorfismo?

Ejercicio 56. Se consideran los homomorfismos $f, f' : \mathbf{Q}^2 \longrightarrow \mathbf{Q}^3$ y $g, g' : \mathbf{Q}^3 \longrightarrow \mathbf{Q}^2$ cuyas matrices, respecto de las bases habituales, son :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar las matrices, respecto de las bases habituales, de los homomorfismos:

$$(f+f')\circ g\ ;\ (f+f')\circ g'\ ;\ f\circ(g+g')\ ;\ f'\circ(g+g')\ ;\ g\circ(f+f')$$
$$g'\circ(f+f')\ ;\ (g+g')\circ f'\ ;\ (g+g')\circ(f+f')\ ;\ (f+f')\circ(g+g').$$

2. Estudiar la inyectividad, suprayectividad y biyectividad de las anteriores aplicaciones.

Ejercicio 57. Sea V un $\mathbf{C}$–espacio vectorial de dimensión 4 y $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ una base de V. Consideramos los subespacios L y L' de V,

$$L = \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & t & = & 0 \end{array} \right. \qquad L' = \langle \underline{u}_1 + \underline{u}_4,\ \underline{u}_1 + \underline{u}_3 + 2\underline{u}_4 \rangle$$

y el endomorfismo f definido por:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} f(\underline{u}_1) & = & & & \underline{u}_2 & + & \underline{u}_3 & + & \underline{u}_4 \\ f(\underline{u}_2) & = & \underline{u}_1 & - & 2\underline{u}_2 & - & \underline{u}_3 & & \\ f(\underline{u}_3) & = & & & \underline{u}_2 & + & \underline{u}_3 & + & 2\underline{u}_4 \\ f(\underline{u}_4) & = & 2\underline{u}_1 & + & \underline{u}_2 & + & 3\underline{u}_3 & + & 10\underline{u}_4 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Hallar un sistema de ecuaciones implícitas de $\mathrm{Img}(f)$ respecto de $\mathcal{B}$ y una base de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$, de los siguientes subespacios: L, L', $L \cap L'$ y $L + L'$.
3. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$, de los subespacios $f(L)$, $f(L + L')$ y $f(L \cap L')$.
4. Hallar una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$ de $f^{-1}(L)$.

Ejercicio 58. Sea f el único endomorfismo de $\mathbf{Q}^3$ tal que:

$$f(0,0,1) = (2,3,5), \quad f(0,1,1) = (1,0,0), \quad f(1,1,1) = (0,1,-1).$$

Hallar la matriz de f en la base habitual $\mathcal{C}$ de $\mathbf{Q}^3$, y también en la base:

$$\mathcal{B} = \{(0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1)\}$$

Ejercicio 59. Sean $V = \mathcal{M}(2;\mathbf{Q})$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 sobre $\mathbf{Q}$, $\mathcal{B}$ la base habitual de V y $f : V \longrightarrow V$ el endomorfismo definido por la relación $f(X) = A \cdot X - X \cdot A$, donde A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular las ecuaciones de f respecto de $\mathcal{B}$.

2. Probar que $V = \mathrm{Img}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

3. Usando el apartado anterior, probar que $\mathrm{Img}(f) = \mathrm{Img}(f^2)$. Deducir de aquí que $\mathrm{Img}(f) = \mathrm{Img}(f^n)$, para cada $n > 0$.

4. Sea
$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Estudiar si $\mathcal{B}'$ es base de V y, en caso afirmativo, hallar $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

Ejercicio 60. Encontrar los autovalores y los autovectores de las matrices siguientes, determinando si son o no diagonalizables. En caso afirmativo, dar una base formada por autovectores.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad 7D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 61. Dadas las matrices complejas:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 & 1 & 12 \\ -13 & 0 & 12 \\ -17 & 1 & 15 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Hallar los autovalores y los subespacios de autovectores correspondientes a dichas matrices.

2. En caso de que proceda, calcular una base de $\mathbf{C}^3$ formada por autovectores de dicha matriz, la correspondiente matriz diagonal D y una matriz de cambio de base a la forma diagonal.

3. Calcular C^n para todo entero positivo n.

Ejercicio 62. Responder las siguientes cuestiones:

1. Sea $\lambda \in \mathbf{C}$. Consideramos $A = \lambda I_2$ y sea $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$. ¿Cuánto vale $P^{-1}AP$?

2. Demostrar que la siguiente matriz no es diagonalizable (idea: utilizar la reducción al absurdo):
$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 63. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -a \end{pmatrix}.$$

1. Calcular los valores de a para los cuales la matriz A es diagonalizable.

2. Para $a = 0$, calcular una matriz diagonal D y una matriz de cambio de base P tal que $D = P^{-1}AP$.

Ejercicio 64. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(5; \mathbf{R}),$$
donde
$$|\lambda I - A| = (\lambda - a)^3 (\lambda + a)^2,$$
se pide:

1. Calcular los valores de a y b para los cuales la matriz A es diagonalizable.

2. Calcular, en cada caso, una matriz diagonal D así como una matriz de cambio de base Q, tal que $D = Q^{-1}AQ$.

Ejercicio 65. Sea V un $\mathbf{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ una base de V y f un endomorfismo de V definido por
$$\begin{aligned} f(\underline{u}_1) = f(\underline{u}_n) &= \underline{u}_1 + \underline{u}_n \\ f(\underline{u}_i) &= \underline{u}_i \text{ si } 1 < i < n \end{aligned}$$

1. Demostrar que los autovalores de f son $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$.
2. Averiguar si f es diagonalizable y hallar, si procede, una base de autovectores y una matriz de cambio de base.
3. Descomponer V como suma directa de tres subespacios invariantes.

Ejercicio 66. Se considera el subespacio $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ tal que:

a) Los autovalores de f son 1 y -1.

b) $G = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ es un subespacio invariante de f.

c) $f(1, 1, 1) = (-1, -1, -1)$.

Se pide:

1. Probar que f es diagonalizable.
2. Si $\mathcal{C}$ es la base habitual de $\mathbf{R}^3$, comprobar que
$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. Calcular A^n para todo entero positivo n.

Ejercicio 67 (Septiembre 2010)**.** La aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ viene determinada por:

- $f(\underline{u}) = -\underline{u}$ si $\underline{u} \in V$, donde
$$V : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & & = 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & = 0 \end{array} \right.$$
- $f(\underline{u}) = \underline{u}$ si $\underline{u} \in W$, donde
$$W = \langle (2, 1, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

1. Calcular la matriz de la aplicación f en términos de la base canónica. Estudiar si f es aplicación inyectiva y si se trata también de una biyección. Calcular el núcleo y la imagen de la aplicación.

2. Razonar sin calcular el polinomio característico si se trata de una aplicación diagonalizable.

3. Si A es la matriz de f en términos de la base canónica, calcular A^{100}.

4. Dadas los subespacios

$$L_1 = \langle (0,1,1,0),(0,1,1,1)\rangle, \qquad L_2 = \langle (2,1,1,0),(0,1,1,0)\rangle,$$

calcular $f(L_1 \cap L_2)$ y $f^{-1}(L_1)$.

Ejercicio 68 (Primer parcial 2010)**.** Sea $a \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ un número real y $f_a \colon \mathbf{C}^4 \longrightarrow \mathbf{C}^4$ el endomorfismo de $\mathbf{C}$–espacios vectoriales cuya matriz respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ es $M_{\mathcal{C}}(f_a) = A$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -a & 2a \\ -1 & 1 & -a & 1+2a \\ 0 & 0 & -a & 2a \\ 0 & 0 & -a & a \end{pmatrix}.$$

a) ¿Para qué valores de a es f_a diagonalizable?

b) Para los valores de a obtenidos en el apartado anterior, hallad una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}^4$ tal que $M_{\mathcal{B}}(f_a)$ sea diagonal.

c) Para los valores de a obtenidos en el primer apartado y para todo entero $n \geq 1$, hallad la matriz A^n.

Ejercicio 69 (Primer parcial 2011)**.** Sea $f : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^3$ el endomorfismo dado por $f(\underline{v})^t = A \cdot \underline{v}^t$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar bases del núcleo y de la imagen de f. ¿Es A normal?

b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}^3$ tal que $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea diagonal. Si es posible, hallar una $\mathcal{B}$ ortonormal con esa propiedad.

c) Calcular $f^{4000}((1,0,0))$.

Ejercicio 70 (Junio 2011)**.** Se considera la aplicación f, definida en el k–espacio vectorial $k[X]_3$ (los polinomios con coeficientes en k y grado menor o igual que 3)

$$\begin{array}{rcl} f : k[X]_3 & \longrightarrow & k[X]_3 \\ P(X) & \longmapsto & P(1) - P'(X) \end{array}$$

donde $P(1)$ es el resultado de sustituir X por 1 en el polinomio $P(X)$, y $P'(X)$ es la derivada usual.

- Estudiar si f es un homomorfismo de k–espacios vectoriales. En caso afirmativo, hallar la matriz de f respecto de la base habitual de $k[X]_3$.
- Calcular $\ker(f)$ e $\mathrm{Img}(f)$.
- Estudiar si f es o no diagonalizable.

Ejercicio 71 (Septiembre 2011)**.** De un endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ sabemos que

$$f(1,0,0) = (1,-1,-1), \quad f(1,1,0) = (1,0,1), \quad f(0,1,-1) = (0,0,2).$$

1. Calcular la matriz M de f con respecto a la base habitual de $\mathbf{R}^3$.
2. Determinar si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ tal que la matriz N de f con respecto a $\mathcal{B}$ sea diagonal. En caso afirmativo, hallar $\mathcal{B}$ y N.
3. ¿Existe algún entero positivo n tal que $f \circ \cdots \circ f$ (n veces) sea la identidad? Justificar la respuesta.

Ejercicio 72. Se consideran los siguientes endomorfismos simétricos de $\mathbf{R}^4$, dados todos ellos por sus matrices respecto de la base habitual $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$M_{\mathcal{C}}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Para cada uno de ellos, hallar una base ortonormal formada por autovectores y la matriz diagonal correspondiente.

Ejercicio 73. Se consideran los siguientes endomorfismos ortogonales de $\mathbf{C}^3$, dados todos ellos por sus matrices respecto de la base habitual $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{C}}(h) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Para cada uno de ellos, hallar una base ortonormal formada por autovectores y la matriz diagonal correspondiente. Hallar también una matriz semejante, real y diagonal por bloques, dando la base correspondiente.

Ejercicio 74. Para las variedades afines Y_i de $\mathbf{A}^4(k)$ que se dan, calcular $D(Y_i)$, y dar una base de Y_i.

$$Y_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \end{array} \right. \qquad Y_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$Y_3 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 6 \end{array} \right.$$

Ejercicio 75. Sea X un espacio afín de dimensión 4 ó 5 según los casos.
a) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la variedad dada por un punto P y un sistema generador de su variedad de dirección, en cada uno de los siguientes casos:

(1) $P = (1,0,1,0)$
$\underline{a}_1 = \overrightarrow{(1,1,2,-1)}$
$\underline{a}_2 = \overrightarrow{(0,1,-3,0)}$
$\underline{a}_3 = \overrightarrow{(1,2,-1,1)}$
$\underline{a}_4 = \overrightarrow{(2,3,1,-2)}$

(2) $P = (2,0,0,-2)$
$\underline{a}_1 = \overrightarrow{(1,1,0,1)}$
$\underline{a}_2 = \overrightarrow{(0,0,0,1)}$
$\underline{a}_3 = \overrightarrow{(1,0,1,2)}$
$\underline{a}_4 = \overrightarrow{(2,1,1,4)}$

(3) $P = (-1,1,0,0,1)$
$\underline{a}_1 = \overrightarrow{(1,1,2,-1,0)}$
$\underline{a}_2 = \overrightarrow{(0,1,-3,0,1)}$
$\underline{a}_3 = \overrightarrow{(-1,0,-5,1,1)}$
$\underline{a}_4 = \overrightarrow{(0,2,-6,0,2)}$

b) Dar un punto y una base de la variedad de dirección, las ecuaciones paramétricas, y un conjunto de puntos afínmente independientes que generen la variedad lineal afín dada.

$$Y_1 : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 - x_2 + x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 & = 1 \end{array} \right. \qquad Y_2 : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ -x_1 + +x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 3 \end{array} \right.$$

$$Y_3 : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 3 \\ -x_2 - x_4 & = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 & = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = 1 \end{array} \right. \qquad Y_4 : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 - x_3 + x_4 & = -1 \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 & = -2 \\ 3x_1 - 3x_3 + 3x_4 & = -3 \end{array} \right.$$

Ejercicio 76. En el espacio afín $\mathbf{A}^4(k)$:

a) Estudiar las posiciones relativas de dos hiperplanos. Determinar la condición de paralelismo de hiperplanos.
b) Estudiar las posiciones relativas de un plano y un hiperplano.
c) Estudiar las posiciones relativas de dos planos.
d) Estudiar las posiciones relativas de un hiperplano y una recta. Determinar las condiciones de paralelismo de recta e hiperplano.
e) Estudiar las posiciones relativas de una recta y un plano. Determinar las condiciones de paralelismo de recta y plano.
f) Estudiar las posiciones relativas de dos rectas.

Ejercicio 77. Estudiar las posiciones relativas de tres rectas en un plano afín.

Ejercicio 78 (Junio 2010)**.** En el espacio afín euclídeo $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ se consideran las rectas Y_1, Y_2 e Y_3 dadas por:

$$Y_1 : (1,0,1,1) + \langle \overrightarrow{(1,0,1,0)} \rangle, \qquad Y_2 : (1,0,0,0) + \langle \overrightarrow{(0,1,0,1)} \rangle$$

$$Y_3 : x_2 = x_3 = 1 - x_1 + x_4 = 0$$

Se pide:

1. Calcular las posiciones relativas de Y_1 e Y_2 y de Y_1 e Y_3.

2. Calcular un hiperplano que contenga a Y_1 y a Y_2. Razonar, utilizando la fórmula de la dimensión, si es único. Efectuar la misma tarea para Y_1 e Y_3.

3. Calcular un plano perpendicular común a las rectas Y_1 y Y_2. Razonar si es único.

4. Razonar si pueden existir, en $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$, una recta y dos planos de manera que la recta se cruce con uno de los planos, esté contenida en el otro y los dos planos sean paralelos.

Ejercicio 79 (Septiembre 2010)**.** Se consideran las siguientes variedades en el espacio afín euclídeo $\mathbf{R}^4$:

$$Y_1 : (0,0,1,1) + \langle\overrightarrow{(0,1,0,0)}\rangle, \qquad Y_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & & = 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 = 1 \end{array} \right.$$

1. Hallar la posición relativa de Y_1 e Y_2.
2. Hallar una perpendicular común a Y_1 e Y_2, razonando si es única.

Ejercicio 80 (Septiembre 2011)**.** Responder a las siguientes cuestiones:

1. Consideremos dos planos en el espacio euclídeo de dimensión 5. Estudiar sus posibles posiciones relativas. En los casos en que los planos sean disjuntos, estudiar la unicidad y la dimensión de su perpendicular común.
2. Calcular la distancia, en el espacio euclídeo de dimensión 5, entre los planos
$$\Pi_1 = (0,0,0,0,0) + \left\langle \overrightarrow{(1,0,0,0,0)}, \overrightarrow{(1,1,0,0,0)} \right\rangle$$
y
$$\Pi_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_5 = 3 \end{array} \right.$$

Ejercicio 81. Se consideran, en $\mathbf{A}^4(k)$, el punto $Q = (1,0,1,0)$ y el plano:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

Hallar todas las rectas que pasen por Q, sean coplanarias con r, y cohiperplanarias con π, siendo r la recta:

$a)$ $r = (2,2,0,0) + \langle\overrightarrow{(1,0,-1,0)}\rangle$; $\qquad$ $b)$ $r = (2,2,0,0) + \langle\overrightarrow{(1,1,1,1)}\rangle$.

Ejercicio 82. Sea X un espacio afín de dimensión 4. Consideremos el hiperplano $H : x_1 - x_3 - x_4 = 0$, la recta $r : (0,0,1,1) + \langle\overrightarrow{(1,0,1,1)}\rangle$ y los planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{rl} x_1 - x_3 - x_4 & = 0 \\ x_1 + 2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

1) Estudiar las posiciones relativas de r y H; y de π_1 y π_2.
2) Estudiar si existen y son únicos los hiperplanos H_i, que contienen a r y π_i, para $i = 1, 2$.
3) Calcular todas las rectas del espacio que pasen por $(1, 1, 1, 1)$ y corten a H, r, π_1 y π_2.

Ejercicio 83. Sea $\mathcal{R} = \{O; \underline{u}, \underline{v}\}$ un sistema de referencia afín de $\mathbf{A}^2(k)$. Calcular las ecuaciones de los cambios de sistema de referencia a $\{O'; \underline{u}', \underline{v}'\}$, donde

$a)$ $O' = (0, 0)$; $\quad \underline{u}' = \underline{u}+\underline{v},\ \underline{v}' = \underline{u}-\underline{v}$; $\qquad$ $b)$ $O' = (1, -1)$; $\quad \underline{u}' = -2\underline{u},\ \underline{v}' = -2\underline{v}$.

y hallar, en el nuevo sistema, las ecuaciones de $\{x = 0\}$ y de $\{y = 0\}$.

Ejercicio 84. Sea $\mathcal{R} = \{O; \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ un sistema de referencia afín de $\mathbf{A}^3(k)$. Estudiar si

$$\mathcal{R}' = \{(0, 1, 0); \overrightarrow{(1, 1, 0)}, \overrightarrow{(0, 1, -1)}, \overrightarrow{(0, 1, 0)}\}$$

(elementos dados en coordenadas respecto de $\mathcal{R}$), es a su vez un sistema de referencia. En caso afirmativo dar $M(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$, $M(\mathcal{R}', \mathcal{R})$ y las ecuaciones, respecto de $\mathcal{R}'$, de la recta Y dada, respecto de $\mathcal{R}$, por el sistema

$$Y : x_1 + x_3 = x_2 - 2x_3 = 0.$$

Ejercicio 85. En el espacio afín euclídeo $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$, fijado un sistema de referencia, se dan los planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad \pi_2 : (0, 0, 0, 0) + \langle \overrightarrow{(1, 2, 1, 1)}, \overrightarrow{(1, 0, 0, 0)} \rangle.$$

Se pide:

1. Estudiar su posición relativa.
2. Determinar una perpendicular común a ambos planos y sus respectivos pies. ¿Es única? Hallar la distancia entre ambos planos.

Ejercicio 86. En el espacio euclídeo de dimensión 4, y con respecto a un sistema de referencia fijo, se consideran las siguientes variedades lineales:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$L_2 = (1, -1, 3, 3) + \langle \overrightarrow{(2, 0, 2, -1)}, \overrightarrow{(1, 3, 1, 4)} \rangle$, $\qquad L_3 = (1, -2, 5, 0) + \langle \overrightarrow{(1, 1, 1, 2)} \rangle$.

Se pide:

1. Averiguar si $L_1 \perp L_2$.

2. Hallar los hiperplanos que pasan por L_3 y son paralelos a L_1. ¿Cuántas soluciones hay?

3. Dar una condición para que tenga más de una solución el problema de hallar un hiperplano que pase por una recta y sea paralelo a un plano.

4. Hallar una perpendicular común a L_2 y L_3. ¿Cuántas soluciones hay?

Ejercicio 87. Supongamos que el universo U es un espacio euclídeo de dimensión $n > 3$, la tierra T es una variedad lineal afín tridimensional $T \subset U$, y que existe otra tierra $T' \subset U$ tridimensional y no paralela a T'.

Se pide:

1. Discutir según los valores de $n = 4$ ó 5 si $T \cap T'$ puede ser vacío. Idem si $T \cap T'$ puede ser un punto.

2. Sean $n = 5$,

$$T : \left\{ \begin{array}{rcl} x_4 & = & 0 \\ x_5 & = & 1 \end{array} \right. \qquad T' : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_4 & = & 1 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

   Estudiar desde qué puntos del universo, que no estén en $T \cup T'$, se puede emitir un rayo que toque a las dos tierras T y T'. Hallar el punto de T desde donde sería más económico emitir un rayo que llegara a T', Indicando el punto de llegada.

Ejercicio 88. En $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ se consideran, respecto de una cierta referencia, la recta r y el plano π dados por:

$$r : (1,0,0,0) + \langle \overrightarrow{(a,0,0,1)} \rangle, \qquad \pi : (1,4,0,5) + \langle \overrightarrow{(1,2,0,3)},\ \overrightarrow{(2,3,0,4)} \rangle,$$

donde $a \in \mathbf{R}$ es un parámetro. Se pide:

1. Determinar la posición relativa de r y π según los valores del parámetro a.

2. Discutir la existencia de la perpendicular común a r y π según los valores de a. Cuando existe, ¿es única?

3. Para $a = -1$, hallar la distancia entre r y π.

Ejercicio 89. Se considera el espacio afín $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ con el sistema de referencia afín habitual, respecto del cual se tomarán coordenadas y ecuaciones. Sea $f\colon \mathbf{A}^3(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ la afinidad de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 12 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

1. Calcular los puntos, planos y rectas fijas de f.
2. ¿Existen planos tales que la restricción de f sea una homotecia? Si es el caso, calcularlos y dar el centro y razón de cada homotecia.

Ejercicio 90. Una afinidad f de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ se llama una cizalladura si existe un sistema de referencia afín $\mathcal{R}$ en el que la matriz de f es del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \lambda & 0 \\ b & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

con $\lambda \neq \mu$, que se llamara *forma canónica* de la cizalladura.

1. Calcular las direcciones fijas de una cizalladura.
2. Discutir las configuraciones de puntos fijos de una cizalladura, así como de la homografía asociada.
3. Demostrar que la afinidad de matriz

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

   es una cizalladura y calcular un sistema de referencia en el que sus ecuaciones estén en forma canónica.

Ejercicio 91 (Junio 2011)**.** Se considera la afinidad f de $\mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ dada por la matriz

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

- Hallar los puntos y planos fijos de f. Probar que f NO es un movimiento.
- Probar que f es la composición de un movimiento g y la homotecia h de centro $(0,0,0)$ y razón 2, de la forma $f = hg$ (se recomienda demostrar esto hallando la matriz de g).
- Clasificar el movimiento g, dando sus elementos geométricos.

Ejercicio 92. Se considera $\mathcal{F}_1$, la figura Y formada por los segmentos de extremos

$$\left(\frac{1}{2},0\right), \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad (0,1), \quad (1,1);$$

y $\mathcal{F}_2$, la figura Y formada por los segmentos de extremos

$$\left(\frac{9}{2},1\right), \quad \left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right), \quad (4,2), \quad (5,2).$$

Probar que existen exactamente dos movimientos que llevan $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ y calcularlos, dando sus elementos geométricos.

Ejercicio 93. Se considera el conjunto G de todas las afinidades que dejan invariantes las rectas $x = 1$ e $y = 1$. El conjunto G contiene homotecias. Calcular sus centros. ¿Contiene G otras dilataciones?

Ejercicio 94. Consideremos la figura N cuyos vértices son los puntos

$$\{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)\}$$

y la figura Z cuyos vértices son los puntos

$$\{(3,2),\ (3,3),\ (4,2),\ (4,3)\}.$$

Hallar, razonadamente, todos los movimientos que llevan la primera figura en la segunda.

Ejercicio 95. Hallar el conjunto de los movimientos del plano que dejan invariante:

1. Un triángulo equilátero.
2. Un triángulo isósceles.

3. Un triángulo escaleno.

4. Un cuadrado.

5. Un rectángulo.

6. Una circunferencia.

Ejercicio 96. Sea M el conjunto de todos los movimientos del plano que dejan invariante la recta $r : x = 0$.

1. Determinar los movimientos de M. Calcular su expresión matricial general.

2. Sea s la recta $y = 0$, y O el punto (0,0). Si f es un movimiento tal que $f(s) = r$, ¿es cierto que $f(O) = O$? ¿Por qué?

3. Calcular todos los movimientos f tales que $f(s) = r$ y además $f(O) = O$ (hay 4).

4. Calcular todos los movimientos f tales que $f(s) = r$.

Ejercicio 97. Clasificar y hallar los elementos invariantes de los movimientos cuyas matrices se dan a continuación

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 7/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20/9 & 4/9 & 4/9 & 7/9 \\ 5/9 & -8/9 & 1/9 & 4/9 \\ -4/9 & 1/9 & -8/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 16/19 & -18/19 & 1/19 & 6/19 \\ 92/19 & 1/19 & -18/19 & 6/19 \\ -18/19 & 6/19 & 6/19 & 17/19 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 38/5 & -11/15 & 2/15 & -2/3 \\ -1/5 & 2/15 & -14/15 & -1/3 \\ -3 & -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -26/9 & -4/9 & -7/9 & -4/9 \\ 16/9 & -1/9 & -4/9 & 8/9 \\ -2/9 & 8/9 & -4/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 98. Se dan las rectas

$$\begin{aligned} r_1 &: \quad x+y-2=0 \\ r_2 &: \quad x+2y-3=0 \\ r_3 &: \quad 3x+y-4=0 \end{aligned}$$

Hallar los vértices A, B, C de un triángulo sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita es 2 y que r_1 es la mediatriz de $\overline{AB}$, r_2 es la mediatriz de $\overline{BC}$, y r_3 la de $\overline{CA}$. ¿Cuántas soluciones hay? Hallarlas todas.

Ejercicio 99 (Segundo parcial 2010)**.** Se considera la afinidad f de $\mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ dada, respecto de un sistema de referencia $\mathcal{R}$, por la siguiente matriz

$$M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Probar que f no tiene puntos fijos, pero que tiene infinitos planos fijos. Estudiar si existe algún plano fijo tal que la restricción de f a él sea una traslación.

Ejercicio 100 (Primer parcial 2010)**.** Recordemos que una elipse es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos concretos F_1 y F_2, llamados focos, es una constante fijada de antemano. Demostrar que sólo existen cuatro movimientos que dejan invariante una elipse y describirlos (en función de F_1 y F_2).

Ejercicio 101 (Septiembre 2010)**.** Dados dos triángulos escalenos en el plano, demostrar que existe un movimiento que lleva uno en el otro si y sólo si sus lados tienen las mismas longitudes y que, en caso de que así sea, dicho movimiento es único (Idea: si tienen las mismas longitudes, se puede intentar dar el movimiento que lleva uno en otro, paso por paso).