Consideremos la sucesión de vectores $(\mu_{0,k}, \mu_{1,k}, \ldots, \mu_{m,k})$ en $\mathbb{R}^{m+1}$. Se encuentra en la frontera de la bola unidad, que es un conjunto compacto. Podemos extraer pues una subsucesión convergente. Sea $(\eta_{0,k}, \eta_{1,k}, \ldots, \eta_{m,k})$ dicha subsucesión convergente y $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ su límite. Tal límite está en la esfera unidad, es decir, $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 = 1$, por lo que todos los escalares λ_i no pueden ser nulos.
Si $(\overline{\mathbf{z}}^k)$ es la subsucesión correspondiente de $(\overline{\mathbf{x}}^k)$, tenemos que $\overline{\mathbf{z}}^k \to \mathbf{0}$ pues $\overline{\mathbf{x}}^k \to \mathbf{0}$. Por tanto, teniendo en cuenta que

$$\eta_{0,k}(D_j f(\overline{\mathbf{z}}^k) + 2\overline{z}_j^k) + \sum_{i=1}^{m} \eta_{i,k} D_j g_i(\overline{\mathbf{z}}^k) = 0,\ 1 \le j \le n,$$

tomando límite cuando $k \to \infty$, deducimos que es

$$\lambda_0 D_j f(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_j g_i(\mathbf{0}) = 0,\ 1 \le j \le n.$$

Si los vectores $\nabla g_i(\mathbf{0})$ son linealmente independientes, ha de ser $\lambda_0 \neq 0$, por lo que podemos dividir por él y concluir la demostración.

□

Referencias

[MS] E. J. McShane, *The Lagrange multiplier rule*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 922–925.

Análisis Matemático II (Grupo A)
Prof. José A. Facenda Aguirre
Curso Académico 2002/03

El teorema de los multiplicadores de Lagrange

Resumen

El teorema de los multiplicadores de Lagrange puede encontrarse probado en muchos textos. La demostración habitual se basa en el teorema de las funciones implícitas. La que vamos a ver a continuación, debida a E. J. McShane (véase [MS]), no hace uso de tal teorema. Además de resultados de cálculo elemental, sólo utiliza el teorema que permite extraer de una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ una subsucesión convergente (Bolzano-Weierstrass) y el teorema que afirma que una función real continua definida en una bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ alcanza su mínimo en algún punto de esa bola.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f, g_i \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m < n$, y $D = \{\mathbf{x} \in A\colon\ g_i(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \le i \le m\}$. Se dice que f tiene en $\mathbf{a}$ un extremo relativo bajo las condiciones $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \le i \le m$ (llamadas también ligaduras) si la función $f_{|A \cap D}$ tiene en $\mathbf{a}$ un extremo relativo.

Teorema 1. *Sean $f, g_i \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m < n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tales que $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}^1(A)$. Sea*

$$D = \{\mathbf{x} \in A\colon\ g_i(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \le i \le m\}.$$

Si $\mathbf{a} \in D$ y $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{x} \in D \cap B(\mathbf{a}, r)$, existen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\lambda_0 \nabla f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a}) = 0, \qquad \textit{es decir,}$$

$$\lambda_0 D_j f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_j g_i(\mathbf{a}) = 0,\ 1 \le j \le n.$$

Si además los vectores $\nabla g_i(\mathbf{a})$, $1 \le i \le m$, son linealmente independientes, podemos elegir $\lambda_0 = 1$.

Demostración. Vamos a usar la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. Suponemos que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y que $f(\mathbf{a}) = 0$. Sea $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < r$, tal que la bola cerrada centrada en el origen y radio ε_1 está contenida en A.
Dividimos la prueba en tres pasos:

Primer paso: Vamos a demostrar la siguiente afirmación:
Para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in A$, $\|\mathbf{x}\| = \varepsilon$ entonces es

$$f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{x}\|^2 + M \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbf{x})^2 > 0.$$

En efecto, si suponemos lo contrario, existiría $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon_1]$ de modo que

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \ \exists \mathbf{x}^M \in A, \ \|\mathbf{x}^M\| = \varepsilon_0, \ f(\mathbf{x}^M) + \|\mathbf{x}^M\|^2 + M \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbf{x}^M)^2 \leq 0.$$

Denotemos por (M_k) una sucesión de números positivos, $M_k \to +\infty$ y sea $(\mathbf{x}^{M_k})$ la sucesión de vectores asociada. Tal sucesión se encuentra en un conjunto compacto (la esfera de centro el origen y radio ε_0), luego podemos extraer una subsucesión que notamos $(\mathbf{y}^k)$ convergente a un vector $\mathbf{x}^*$ de la esfera, es decir, $\|\mathbf{x}^*\| = \varepsilon_0$. Si llamamos (N_k) a la sucesión de escalares asociada a $(\mathbf{y}^k)$, tenemos que es

$$f(\mathbf{y}^k) + \|\mathbf{y}^k\|^2 + N_k \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbf{y}^k)^2 \leq 0 \ \text{ y por tanto } \ \frac{f(\mathbf{y}^k) + \|\mathbf{y}^k\|^2}{-N_k} \geq \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbf{y}^k)^2.$$

Si tomamos límite cuando $k \to \infty$, dado que

$$f(\mathbf{y}^k) \to f(\mathbf{x}^*), \ \ \|\mathbf{y}^k\|^2 \to \varepsilon_0^2, \ \ g_i(\mathbf{y}^k) \to \ g_i(\mathbf{x}^*),$$

deducimos que

$$\sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbf{x}^*)^2 \leq 0 \quad \text{de donde} \quad g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \ 1 \leq i \leq m.$$

Luego $\mathbf{x}^* \in D \cap B(\mathbf{0}, r)$ y por tanto $f(\mathbf{x}^*) \geq 0$. Pero por otra parte, al ser

$$f(\mathbf{y}^k) + \|\mathbf{y}^k\|^2 \leq -N_k \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbf{y}^k)^2 \leq 0,$$

se deduce que $f(\mathbf{y}^k) \leq -\|\mathbf{y}^k\|^2 = \varepsilon_0^2$ y por tanto, $f(\mathbf{x}^*) \leq -\varepsilon_0^2 < 0$. Esta contradicción prueba la afirmación anterior.

Segundo paso: Veamos a continuación que para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ existe un vector $\overline{\mathbf{x}}$, $\|\overline{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$, y unos escalares $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{m} \mu_i^2 = 1$, de modo que

$$\mu_0(D_j f(\overline{\mathbf{x}}) + 2\overline{x}_j) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i D_j g_i(\overline{\mathbf{x}}) = 0, \ 1 \leq j \leq n.$$

En efecto, para cada $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, sea $M \in \mathbb{R}$ la del apartado anterior. La función $F \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{x}\|^2 + M \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbf{x})^2$$

es continua en el compacto $\overline{B}(0, \varepsilon)$, luego alcanza un mínimo absoluto. Como $F(\mathbf{x}) > 0$ en la frontera (de acuerdo con lo probado en el primer paso) y $F(\mathbf{0}) = 0$, se sigue que el mínimo lo alcanza en un punto $\overline{\mathbf{x}}$ del interior. Como F es diferenciable en la bola abierta $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, debe ser $DF(\overline{\mathbf{x}}) = 0$. De aquí deducimos, al igualar las derivadas parciales de la función F a cero que

$$D_j f(\overline{\mathbf{x}}) + 2\overline{x_j} + \sum_{i=1}^{m} 2M g_i(\overline{\mathbf{x}}) D_j g_i(\overline{\mathbf{x}}) = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Basta entonces considerar

$$L = \left(1 + \sum_{i=1}^{m} (2M g_i(\overline{\mathbf{x}}))^2\right)^{1/2}, \quad \mu_0 = \frac{1}{L}, \quad \mu_i = \frac{2M g_i(\overline{\mathbf{x}})}{L}, \ \ 1 \leq i \leq m$$

para concluir que $\sum_{i=0}^{m} \mu_i^2 = 1$ y

$$\mu_0(D_j f(\overline{\mathbf{x}}) + 2\overline{x}_j) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i D_j g_i(\overline{\mathbf{x}}) = 0, \ 1 \leq j \leq m.$$

Tercer paso: Sea (ε_k) una sucesión de números positivos decreciente a cero. De acuerdo con lo probado anteriormente, sean

$$(\overline{\mathbf{x}}^k) \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon_k) \quad \text{y} \quad \mu_{0,k}, \mu_{1,k}, \ldots, \mu_{m,k} \in \mathbb{R}$$

tales que $\sum_{i=0}^{m} \mu_{i,k}^2 = 1$ y

$$\mu_{0,k}(D_j f(\overline{\mathbf{x}}^k) + 2\overline{x}_j^k) + \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k} D_j g_i(\overline{\mathbf{x}}^k) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n.$$