ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Grupo A ■ 20 de noviembre de 2006

Apellidos:__________________________________ **Nombre:**__________________

P1	P2	P3	P4	Nota

Escribe con claridad y precisión. Procura ceñirte al espacio proporcionado en cada ejercicio. Tiempo: dos horas.

1. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A abierto. Supongamos que existen las derivadas parciales de f en un punto $(a,b) \in A$ y que son continuas. Demuestra que en ese caso, f es diferenciable en (a,b).

2. De las siguientes afirmaciones, demuestra las verdaderas y da un contraejemplo de las falsas:

Todo conjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ *es cerrado*

Todo conjunto infinito de $\mathbb{R}^2$ *tiene al menos un punto de acumulación*

Si una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tiene un límite unidimensional en un punto* (a, b)*, tiene el reiterado correspondiente*

Toda norma en $\mathbb{R}^2$ *es una aplicación continua*

Toda función $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable es continua*

Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que existe* $D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$*. Entonces el límite direccional de* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{a}$*, a lo largo de la recta que pasa por* $\mathbf{a}$ *y tiene la dirección de* $\mathbf{v}$ *es* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua que puede escribirse como

$$f(x,y,z) = (x-1) + (y-2)^2 + (z-3)^3 + R(x,y,z), \quad \text{donde} \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{R(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

¿Cuanto vale $f(0,0,0)$? ¿Es f diferenciable en el origen? ¿Cuánto valen las derivadas parciales en ese punto? ¿Y $D_{\mathbf{v}}f(0,0,0)$, si $\mathbf{v} = (a,b,c)$ es un vector no nulo?

4. Sea $f(x, y) = |y - x^2|$. ¿Es f continua en el plano? Estudia la existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad de f en los puntos $(2, 2)$ y $(2, 4)$.

Firma: