Departamento de
Análisis Matemático

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Prof. Dr. José Antonio Facenda Aguirre

Curso Académico 2007/2008

© José A. Facenda Aguirre Sevilla, 2007

Índice general

Plan de la asignatura

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

Espacios normados. Cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$.
Fórmula de Taylor. Extremos locales. Funciones inversas e implícitas.

Contenido La asignatura Análisis Matemático II es una asignatura troncal del plan de estudios conducente a la obtención del título oficial de Licenciado en Matemáticas. De acuerdo con dicho plan, (publicado en el B.O.E de 14 de enero de 1998), tiene asignada una carga docente de 6 créditos, de los cuales 4 son teóricos y 2 prácticos. Así pues, le corresponden 60 horas lectivas, entre teóricas, prácticas y exámenes.

La asignatura está dedicada al estudio del cálculo diferencial de las funciones de varias variables reales y sus aplicaciones.

Metodología Las clases teóricas tienen por objeto mostrar al alumno los resultados fundamentales de la materia, con sus demostraciones, y con ejemplos que faciliten su comprensión. Algunas pruebas se omiten o simplemente se indican, complementándose con bibliografía adecuada. Se insiste al alumno en la necesidad del estudio continuado y de una actitud crítica y activa ante lo que se le expone en estas clases.

En las clases prácticas se pretende que el alumno adquiera una comprensión más profunda de los conceptos teóricos, y aprenda a manejarlos y a aplicarlos, mediante la resolución de problemas y ejercicios. Es importante que sean los propios alumnos quienes los resuelvan, para lo que se les hace entrega de hojas con los enunciados de los problemas. La asistencia, resolución o explicación en clase de ciertos problemas podrá valorarse positivamente en la calificación final del alumno.

Es necesario el aprendizaje del lenguaje matemático preciso adecuado, lenguaje que ha de ser empleado con propiedad y claridad. Los alumnos deben poseer la capacidad de expresarse con soltura.

La adecuada preparación de la asignatura aconseja la asistencia a clase, así como consultar las dudas fundamentales a los profesores encargados de impartirla. De acuerdo con las disposiciones vigentes, en el tablón de anuncios del Departamento de Análisis Matemático se publicará el horario de consultas o tutoría del profesorado. Se recomienda a los alumnos que hagan uso de tal horario, para aclarar aquellas dudas que les plantee el estudio de la asignatura, tanto en sus aspectos teóricos como prácticos, a lo largo del curso, procurando, en la medida de lo posible, no dejar las consultas para los últimos días anteriores a los exámenes.

Evaluación y calificación Se realizarán dos exámenes finales ordinarios y una convocatoria extraordinaria de diciembre, que, de acuerdo con las fechas fijadas por la Junta de Centro, serán los días 31 de enero de 2008, 5 de septiembre de 2008 y 20 de noviembre de 2007 respectivamente.

Los exámenes serán escritos, estando determinados tanto el espacio para las respuestas como la duración de la prueba, y en ellos se evaluarán los conocimientos y capacidades adquiridos por los alumnos. Se exigirá el desarrollo o resolución de cuestiones teóricas y prácticas. Es preciso mostrar un conocimiento del conjunto de la asignatura, de tal modo que los exámenes muy descompensados o que demuestren un gran desconocimiento de partes fundamentales de la materia serán considerados insuficientes.

Se realizarán a lo sumo tres pruebas voluntarias de carácter teórico práctico. A lo largo del curso, y con suficiente antelación, se anunciará la materia correspondiente a estas pruebas. Cada una se valorará sobre 10 puntos. Los alumnos que obtengan al menos 5 puntos en cada una de éstas, aprobarán la asignatura por curso con la calificación media obtenida en ellas. El resto deberá presentarse a examen final de la asignatura, que se valorará sobre 10 puntos. La calificación en el primer examen final ordinario de este curso académico al que se presente el alumno se obtendrá añadiendo a la nota obtenida en este examen el 10 % (*si se realizan tres pruebas*) o el 20 % (*si se realizan dos pruebas*) de las notas de las pruebas anteriores en las que se haya obtenido al menos 5 puntos. Para aprobar la asignatura la calificación final deberá ser mayor o igual que 5 puntos.

En la página web `http://www.personal.us.es/facenda` se encuentra recopilado el material de la asignatura (ejercicios, exámenes, resúmenes) desde el curso académico 1999/2000. En ella aparecerá, a lo largo del año, el material correspondiente a este curso.

1

Espacios normados

Topología asociada a una norma

Definición 1.1. El espacio producto cartesiano de n rectas reales se notará $\mathbb{R}^n$. Sus elementos son n-plas ordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y se llaman vectores si $n \geq 2$. Tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, para la suma coordenada a coordenada y el producto por un número: si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ y $t\mathbf{x} = (tx_1, \ldots, tx_n)$. Si $n = 1$, coincide con la recta real, si $n = 2$ es el plano ordinario y si $n = 3$, el espacio ordinario.

Definición 1.2. El producto escalar o euclídeo de los vectores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ es el número real $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Propiedades. El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ es una forma bilineal simétrica definida positiva, es decir, se cumplen:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

3. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

4. $t(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (t\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}$ para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3. El módulo o norma euclídea del vector $\mathbf{x}$ es el número real $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. Geométricamente representa la longitud del vector.

Definición 1.4. Si E es un espacio vectorial, una norma en E es una función $\|\cdot\| \colon E \to \mathbb{R}$ tal que para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ y todo $t \in \mathbb{R}$ se cumplen:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. $\|t\mathbf{x}\| = |t| \, \|\mathbf{x}\|$.

3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (desigualdad triangular).

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$.

Como consecuencia, el módulo en $\mathbb{R}^n$ es una norma.

Ejemplo 1.1. Las siguientes funciones definen normas en $\mathbb{R}^n$ que no son la euclídea:

1. $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
2. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{1\leq k\leq n} |x_k|$.

Proposición 1.5. *Si $\|\cdot\|$ es una norma en E, la función $d\colon E\times E \to \mathbb{R}$ definida por $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$ es una distancia en E, que se llamará la distancia asociada a la norma. Para todos $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumplen:*

1. *$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$, $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.*
2. *$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$*
3. *$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})$ (desigualdad triangular).*

Definición 1.6. La distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$ es la distancia asociada al módulo.

Definición 1.7. La bola abierta (resp. cerrada) de centro $\mathbf{x}$ y radio $r > 0$ es el subconjunto formado por los $\mathbf{y}$ que distan de $\mathbf{x}$ menos (resp. menos o igual) que r. La bola abierta se notará $B(\mathbf{x},r)$ y la cerrada $\overline{B}(\mathbf{x},r)$.

Ejemplo 1.2. La bola $B(x,r)$ en la recta es el intervalo $(x-r, x+r)$; la bola $B(\mathbf{x},r)$ en el plano es el círculo de centro $\mathbf{x}$ (menos la circunferencia) y radio r y en el espacio es la esfera sólida de centro $\mathbf{x}$ y radio r (menos el borde de la esfera).

En el plano, las bolas $B(\mathbf{x},r)$ son cuadrados para las normas $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_\infty$; en el espacio son respectivamente un octaedro regular y un cubo.

Definición 1.8. Si A es un subconjunto de E y $\mathbf{x} \in E$, se dice que $\mathbf{x}$ es interior a A o que A es un entorno de $\mathbf{x}$ cuando existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x},r) \subset A$. El conjunto de puntos interiores se nota $\mathring{A}$ (interior de A). Se dice que A es abierto cuando coincide con su interior. Se dice que A es cerrado cuando su complementario es abierto.

Proposición 1.9. *La familia de todos los conjuntos abiertos de E es una topología en E que se llama topología asociada a la norma. La topología euclídea en $\mathbb{R}^n$ es la asociada al módulo.*

Definición 1.10. Si A es un subconjunto de E, y $\mathbf{x} \in E$, se dice que $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación (resp. adherente) de A cuando para todo $r > 0$ la bola $B(\mathbf{x},r)$ corta a $A \setminus \{x\}$ (resp. A). Se dice que $\mathbf{x}$ es punto frontera de A cuando es adherente a A y al complementario de A. El conjunto de puntos adherentes se notará $\overline{A}$ (cierre de A) y el de los de acumulación A' (conjunto derivado de A).

Proposición 1.11. *Un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación, y si y sólo si coincide con su cierre.*

Ejemplo 1.3. Las bolas abiertas son conjuntos abiertos y las bolas cerradas son conjuntos cerrados. Las bolas abiertas no son conjuntos cerrados. Hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

Definición 1.12. Se dice que dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|^*$ sobre un mismo espacio vectorial E son equivalentes cuando existen constantes $0 < c \leq M < \infty$ tales que $c\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|^* \leq M\|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in E$

Proposición 1.13. *Normas equivalentes generan la misma topología.*

Proposición 1.14. *Se cumple que* $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq |\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}|\mathbf{x}| \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$ *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Sucesiones

Definición 1.15. Una sucesión $(\mathbf{x}_j)$ en el espacio normado E es convergente cuando existe $\mathbf{x} \in E$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe j_0 de modo que $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$. Es decir, cuando $\lim_{j\to\infty} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}\| = 0$. El vector $\mathbf{x}$ si existe es único y se llama límite de la sucesión, $\mathbf{x} = \lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_j$.

Proposición 1.16. *Una sucesión en* $\mathbb{R}^n$ *es convergente si y sólo si son convergentes las* n *sucesiones reales de sus coordenadas. El límite se calcula coordenada a coordenada.*

Definición 1.17. Una sucesión $(\mathbf{x}_j)$ en el espacio normado E es de Cauchy cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe j_0 de modo que $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\| \leq \varepsilon$ para todos $j, k \geq j_0$.

Definición 1.18. Un espacio normado en el que las sucesiones de Cauchy coinciden con las convergentes, es decir, es completo, se llama espacio de Banach.

Proposición 1.19. *El espacio euclídeo* $\mathbb{R}^n$ *es de Banach.*

Compacidad

Definición 1.20. Un conjunto A es acotado cuando existe $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Equivalentemente, cuando A está contenido en una bola.

El diámetro de A se define como $\sup\{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}$. Dos normas equivalentes tienen los mismos conjuntos acotados pero el diámetro puede ser diferente.

Teorema 1.21 (Teorema de Cantor). *Si E es un espacio de Banach y* (A_j) *es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y acotados no vacíos de E, cuyos diámetros tienden a cero, entonces existe un único* $\mathbf{x} \in \bigcap_j A_j$.

Teorema 1.22 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Todo conjunto infinito y acotado de* $\mathbb{R}^n$ *tiene algún punto de acumulación.*

Definición 1.23. Un subconjunto A es compacto cuando de todo recubrimiento suyo por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Teorema 1.24 (Teorema de Heine-Borel)**.** *Para la topología euclídea de $\mathbb{R}^n$, los conjuntos compactos son los cerrados y acotados.*

Ejercicio 1.1. Enunciar los conceptos topológicos introducidos en términos de sucesiones. También los que se introducen a continuación en 1.4.

Límite y continuidad

Definición 1.25. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset E \to F$. Sea $\mathbf{a} \in E$ un punto de acumulación de A. Sea $\mathbf{b} \in F$. Se dirá que $\mathbf{b}$ es el límite de $\mathbf{f}$ cuando $\mathbf{x}$ tiende hacia $\mathbf{a}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in A$ y $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ implican que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$.

El límite es único, cuando existe. Se notará $\mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Normas equivalentes dan lugar a los mismos límites.

Definición 1.26. Si $\mathbf{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$, la función $f_k\colon A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

se llama k-ésima función componente de $\mathbf{f}$ (es la composición de $\mathbf{f}$ con la proyección k-ésima).

Inversamente, dadas m funciones escalares, se puede formar una función vectorial que las tenga por componentes (única si se fija el orden).

Proposición 1.27 (Reducción a funciones escalares)**.** *Si $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, entonces $\mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si y sólo si $b_k = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_k(\mathbf{x})$, para todo $k = 1, \dots, m$.*

Definición 1.28. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset E \to F$. Sea $\mathbf{a} \in A$. Se dice que $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$ cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in A$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ implican que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$. Se dirá que $\mathbf{f}$ es continua en A cuando lo sea en todo $\mathbf{a} \in A$.

En el caso en que $\mathbf{a}$ sea de acumulación de A, es equivalente a que exista $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y valga $\mathbf{f}(\mathbf{a})$. Por ello, la continuidad de una función vectorial $\mathbf{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$ equivale a la de todas de sus funciones componentes.

Proposición 1.29. *Una función $\mathbf{f}\colon A \subset E \to F$ es continua en A si y sólo si la imagen inversa de cada abierto (cerrado) de F es abierto (cerrado) de A.*

Propiedades. La suma, diferencia, y el producto escalar de funciones vectoriales continuas son funciones continuas. También lo es el producto de una función escalar y otra vectorial, si ambas son continuas. El cociente de dos funciones escalares continuas cuyo denominador no es nulo, es continuo.

Proposición 1.30. *La composición de funciones continuas es continua: sean $\mathbf{f}\colon A \subset E \to F$ y $\mathbf{g}\colon B \subset F \to G$ tales que $\mathbf{f}(A) \subset B$. Sea $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ la función compuesta $\mathbf{h}\colon A \to G$. Si $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a} \in A$ y $\mathbf{g}$ es continua en $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, entonces $\mathbf{h}$ es continua en $\mathbf{a}$.*

Ejemplo 1.4. La norma es continua. También los polinomios en $\mathbb{R}^n$ y las funciones racionales de varias variables en su dominio de definición.

Teorema 1.31 (Teorema de Weierstrass). *Si f es una función escalar continua en $A \subset E$ y A es compacto, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo en A, es decir, existen $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en A tales que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$ para todo $\mathbf{x} \in A$.*

Definición 1.32. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset E \to F$. Se dice que $\mathbf{f}$ es uniformemente continua en A si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ implican $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \varepsilon$.

Teorema 1.33 (Teorema de Heine). *Si $\mathbf{f}$ es una función continua en $A \subset E$ y A es compacto, entonces $\mathbf{f}$ es uniformemente continua en A.*

Límites direccionales y reiterados

Definición 1.34. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset E \to F$. Sea $\mathbf{a} \in E$ y $B \subset A$ tal que $\mathbf{a}$ es de acumulación de B. El límite de $\mathbf{f}$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ en la dirección B es el límite de la función $\mathbf{f}|_B\colon B \to F$ dada por $\mathbf{f}|_B(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Se notará $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}, \mathbf{x}\in B} \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Proposición 1.35. *Si existe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ entonces existe cualquier límite direccional y tiene el mismo valor.*

Proposición 1.36. *La existencia del límite es una propiedad local: si $B \subset A$ y $\mathbf{a}$ es de acumulación de B y verifica que existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, r) \cap A \subset B$ entonces la existencia del límite en la dirección de B implica la de $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.*

Proposición 1.37. *Si $B \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto $\{(t, \varphi(t))\colon t \in I \subset \mathbb{R}\}$ y $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ cumple $\varphi(a) = b$ y es continua en a, entonces el límite en (a, b) de $\mathbf{f}$ en la dirección de B coincide con $\lim_{x\to a} \mathbf{f}(x, \varphi(x))$.*

Nota 1.1. Habitualmente la dirección B viene dada por una relación entre las variables $x_1, \ldots, x_m$. Puede ocurrir que existan todos los límites según todas las direcciones rectas y que no exista el límite.

Definición 1.38. Sea f una función escalar definida en un entorno de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Los límites reiterados, que puede que no existan, son los siguientes:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y)), \quad \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y)).$$

Si existe el límite doble $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ y existe algún unidimensional, existe el reiterado y vale lo mismo que el doble. Pero puede ocurrir que exista el doble y no algún reiterado y también que existan ambos reiterados y coincidan pero no exista el límite doble.

Equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$

Proposición 1.39. *Sean E y F espacios normados y sea $\mathbf{u}\colon E \to F$ lineal. Son equivalentes:*

1. $\mathbf{u}$ es continua en E.

2. $\mathbf{u}$ es continua en el origen.

3. $\mathbf{u}$ está acotada en la bola unidad.

4. Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in E$.

Definición 1.40. Una aplicación $\mathbf{u}\colon E \to F$ se dice que es un isomorfismo de espacios normados cuando es un isomorfismo algebraico (lineal y biyectiva) y un homeomorfismo ($\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}^{-1}$ son continuas). Una isometría es un isomorfismo tal que $\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x} \in E$.

Proposición 1.41. *En un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes. En consecuencia, todas las aplicaciones lineales que parten de él son continuas.*

Proposición 1.42. *Si $\mathbf{u}\colon E \to F$ es lineal continua, se define $\|\mathbf{u}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|$. La función $\|\cdot\|$ es una norma en el espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de E en F.*

Proposición 1.43. *El espacio de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se identifica con el espacio de las matrices reales de orden $m \times n$.*

Problemas

Problema 1. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones, calculando el límite en su caso:

1. $\left(\dfrac{n^2-3}{n^3+2}, \left(\dfrac{n^3+4}{n^3+1}\right)^n\right)$.
2. $\left(\log\dfrac{n+1}{n^2+1}, \dfrac{n^3\cos n\pi}{2^n}\right)$.
3. $\left(n\cos\dfrac{n\pi}{4}, n \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Problema 2. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x+y+z=1,\ y-x^2 \geq z^2,\ x \neq 1\}$. Demuestra que A es un conjunto compacto no vacío.

Problema 3. Determina si los conjuntos siguientes son compactos:

1. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = \sqrt{1-x^2-y^2}\}$
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2-2x+y^2 \leq 1\}$

Problema 4. En cada uno de los siguientes conjuntos, indica razonadamente si son cerrados, acotados o compactos:

1. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + 3y^2 + z^2 \leq 3\}$.
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$.
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z^2,\ y \geq 0\}$.
4. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq \arctan x\}$.
5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |\arctan x| \leq y \leq \pi/4\}$.
6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\arctan x)^2 \leq y \leq \pi^2/4\}$.
7. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.

Problema 5. Determina si los siguientes conjuntos son cerrados y acotados:

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 3 + y^2\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 3 - y^2\}$.
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 4x + y^2 \leq (z-1)^2 - 3,\ |z| \leq 2\}$.

Problema 6. Sea $f(x,y) = \arctan(y^2/x)$. Calcula los límites direccionales según rectas en el origen. ¿Existe el límite doble?

Problema 7. Calcula, si existen, los siguientes límites dobles:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^6 + y^4}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan \frac{1}{x^4 - y^4}$$

Problema 8. Indica las respuestas verdaderas o falsas:

V	F	El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x^2 - 2xy - y^2 = 0\}$ es cerrado y acotado
V	F	El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x^2 - 2xy - y^2 = 0\}$ es cerrado pero no es acotado
V	F	El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$ es cerrado y acotado
V	F	El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$ es cerrado pero no es acotado
V	F	El conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z = 3\}$ es cerrado y acotado
V	F	El conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z = 3\}$ es cerrado pero no es acotado
V	F	El conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + |z| = 3\}$ es cerrado y acotado
V	F	El conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + |z| = 3\}$ es cerrado pero no es acotado
V	F	La función $f(x,y) = (xy)^2/(xy^3 + (x-y)^2)$ no tiene límite en el origen
V	F	La función $f(x,y) = (xy)^2/(xy^3 + (x-y)^2)$ tiene límite y vale cero en el origen

Problema 9. Sea $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{y + x^2}} \operatorname{arc\,sen} \dfrac{y}{x}$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

Determina y dibuja el dominio de f. Estudia la existencia de los límites reiterados en el origen. Calcúlalos si existen. Estudia la existencia de límites a lo largo de rectas en el origen de coordenadas. ¿Es $y = -x^2 + x^6$ una dirección válida para f al origen de coordenadas? En caso afirmativo, ¿cuánto vale ese límite direccional? ¿Es f continua en el origen de coordenadas?

Problema 10. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = \operatorname{sen} x$ si $x \geq 0$; $f(x, y) = y^3$ si $x < 0$ e $y \geq 0$; $f(x, y) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ si $x < 0$ e $y < 0$.
2. $f(x, y) = |x - y|$ si $x \geq 0$; $f(x, y) = y^3$ si $x < 0$ e $y \geq 0$; $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x}$ si $x < 0$ e $y < 0$.

Problema 11. Consideremos las funciones

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}, \quad g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}.$$

Calcula los límites unidimensionales, reiterados y direccionales a través de rectas en el origen. ¿Existe el límite doble en dicho punto de la función f? ¿Y el de g?

Problema 12. Estudiar la existencia del límite doble en el origen de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = (xy - x + y)/(x + y)$, si $x + y \neq 0$; $f(x, y) = 0$, en otro caso.
2. $f(x, y) = (y/x) \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$, si $x \neq 0$; $f(x, y) = 0$, en otro caso.
3. $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, si $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$. ¿Existe el límite en la dirección $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| < x^2\}$?

Problema 13. Calcula, si existen, los límites unidimensionales, reiterados y doble:

1. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{e}^{\left(\frac{-1}{x^2 + y^2}\right)} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$
2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan \frac{1}{x^2 - y^2}$

Problema 14. Estudia los límites direccionales según rectas en el punto $(1, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \frac{y(x-1)^2}{y^2 - 2y + (x-1)^2}.$$

¿Existe el límite doble en ese punto? ¿Existe el límite en la dirección del semiplano $y < 0$?

2

Cálculo diferencial

Diferenciabilidad

Proposición 2.1. *Una función $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en a punto interior de A si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(a) + c(x-a) + R(x)$ y $\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{x-a} = 0$. El número c coincide con la derivada como límite de cociente de incrementos $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.*

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ tiene ecuación $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

La definición correspondiente para funciones de dos variables:

Definición 2.2. Una función $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (a,b) punto interior de A si y sólo si existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $f(x,y) = f(a,b) + c(x-a) + d(y-b) + R(x,y)$ y

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0.$$

El plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$ tiene ecuación

$$z = f(a,b) + c(x-a) + d(y-b).$$

Para funciones de varias variables y con valores vectoriales:

Definición 2.3. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}$ del interior de A y $\mathbf{f}\colon A \to \mathbb{R}^m$. Se dice que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ si existe una aplicación lineal $\mathbf{u}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{R}(\mathbf{x})$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{\mathbf{R}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = 0$.

La aplicación $\mathbf{u}$ es única cuando existe y se llama diferencial de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$. Se nota $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Se dice que $\mathbf{f}$ es diferenciable en A cuando lo sea en todos los $\mathbf{a} \in A$. Estos conceptos son independientes de la norma considerada en $\mathbf{R}^n$.

Proposición 2.4. *Las funciones diferenciables son continuas.*

Ejemplo 2.1. Las funciones constantes son diferenciables y su diferencial es cero. Las lineales son diferenciables (su diferencial en cualquier punto es la propia función). En particular lo son las proyecciones $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to x_k \in \mathbb{R}$. Las aplicaciones bilineales $\mathbf{B}\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ son diferenciables y se cumple $D\mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{B}(\mathbf{a}, \cdot) + \mathbf{B}(\cdot, \mathbf{b})$. Ninguna norma en $\mathbb{R}^n$ es diferenciable en el origen.

Linealidad. La suma de dos funciones diferenciables es diferenciable y el producto por un escalar de una función diferenciable también lo es. Se cumplen $D(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a})$ y $D(t\mathbf{f})(\mathbf{a}) = tD\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Proposición 2.5 (Reducción a funciones componentes)**.** *Sea* $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *y sean* $f_1, \dots, f_m$ *sus funciones componentes.* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *si y sólo si* f_k *lo es para todo* $k = 1, \dots, m$. *En ese caso,* $D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = (Df_1(\mathbf{a}), \dots, Df_m(\mathbf{a}))$.

Definición 2.6 (Curvas en $\mathbb{R}^m$)**.** Una función $\mathbf{f}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en a si y sólo si existe el límite $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)}{t - a}$, que se nota $\mathbf{f}'(a)$ (derivada de $\mathbf{f}$ en a). En ese caso se tiene que $D\mathbf{f}(a)(t) = t\mathbf{f}'(a)$.

El vector $\mathbf{f}'(a)$ se llama vector tangente a la curva $\mathbf{y} = \mathbf{f}(t)$ en $\mathbf{f}(a)$.

Aplicación. Si $m = 3$ y $\mathbf{f}(t)$ es el vector de posición en el espacio de una partícula móvil, $\mathbf{f}'(t)$ es el vector velocidad, y su módulo $|\mathbf{f}'(t)|$ es la velocidad.

Regla de la cadena. Sean $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g}\colon B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Sean $\mathbf{a}$ interior de A y $\mathbf{b}$ interior de B, tales que $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Si $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{g}$ lo es en $\mathbf{b}$, entonces la función compuesta $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ es diferenciable en $\mathbf{a}$, cumpliéndose $D\,\mathbf{h}(\mathbf{a}) = D\,\mathbf{g}(\mathbf{b}) \circ D\,\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Ejercicio 2.1. Calcular la diferencial del producto escalar de dos funciones vectoriales y la del cociente de dos funciones escalares.

Derivadas direccionales y parciales

Definición 2.7. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{a}$ punto interior de A. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}$ no nulo. La derivada de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ según la dirección $\mathbf{v}$ es la derivada en 0 de la curva $t \to \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$.

Cuando exista, se notará $D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$. Así $D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t}$.

Definición 2.8 (Interpretación geométrica)**.** Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a, b)$ y $\mathbf{v}$ es de módulo 1, $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$ representa la pendiente de la recta tangente en $(a, b, f(a, b))$ a la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano vertical levantado sobre la recta $(x, y) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Así, la derivada direccional mide la variación de la función en la dirección indicada.

Definición 2.9. La derivada parcial k-ésima de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ es la derivada de $\mathbf{f}$ en la dirección del vector unitario cuya k-ésima componente es 1. Se notará $D_k\mathbf{f}(\mathbf{a})$ o $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}(\mathbf{a})$.

Coincide con la derivada en a_k de la función $t \to \mathbf{f}(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$.

Ejemplo 2.2. La existencia de todas las derivadas direccionales no implica la continuidad de la función.

Proposición 2.10. *Si* $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $\mathbf{a}$ *entonces existen todas las derivadas direccionales de* $\mathbf{f}$ *en* a *y se cumple* $D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{v})$.

Definición 2.11. Cuando existen las n derivadas parciales de $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $\mathbf{a}$, se define el vector gradiente de f en $\mathbf{a}$ como el vector $\nabla f(a) = (D_1 f(\mathbf{a}), \ldots, D_n f(\mathbf{a}))$.

Proposición 2.12. *Si* $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *entonces* $Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}$. *Por tanto, la dirección de máxima variación de una función escalar diferenciable es la dada por su vector gradiente.*

Definición 2.13. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{a}$. La matriz $m \times n$ que le corresponde a la aplicación lineal $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ cuando se fijan en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ las bases canónicas se llama matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$, y está determinada por la propiedad de que sus filas son los gradientes de las funciones componentes. Es decir, la matriz jacobiana es la matriz

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & \ldots & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & \ldots & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & \ldots & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Si $n = m$, el determinante de la matriz jacobiana se llama jacobiano y se nota $J\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Expresión matricial de la regla de la cadena. La matriz jacobiana de $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ se obtiene multiplicando las matrices jacobianas de $\mathbf{g}$ en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ y $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$, en ese orden. En consecuencia,

$$D_j h_i(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m} D_k g_i(\mathbf{f}(\mathbf{a})) D_j f_k(\mathbf{a})$$

Regla de la cadena para funciones escalares. Sean $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{a}$ punto interior de A. Sea $\mathbf{r}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $s \in \mathbb{R}$ interior a I tal que $\mathbf{r}(s) = \mathbf{a}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{r}$ es derivable en s, entonces la función compuesta $h(t) = f(\mathbf{r}(t))$ es derivable en s, cumpliéndose $h'(s) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(s)$.

Interpretación geométrica. Si $\mathbf{r}$ es una curva en el espacio contenida en la superficie $f(x, y, z) = d$, entonces el gradiente de f en un punto es perpendicular al vector tangente a la curva en ese punto. Si el gradiente es no nulo, se define el plano tangente a la superficie en $\mathbf{a} = (a, b, c)$ como el plano perpendicular al gradiente, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})(y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a})(z - c) = 0.$$

Si la superficie viene dada en explícitas $z = f(x, y)$ donde f es una función escalar en el plano, diferenciable en (a, b), el plano tangente es

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b),$$

como ya vimos al comienzo.

Condición suficiente de diferenciabilidad

Definición 2.14. Se dice que la función $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^1 en $\mathbf{a}$ cuando existen todas las derivadas parciales de las funciones componentes de $\mathbf{f}$ en un entorno de $\mathbf{a}$ y son continuas en $\mathbf{a}$.

Equivalentemente, cuando es continua en $\mathbf{a}$ la aplicación $\mathbf{x} \to D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con valores en el espacio de las aplicaciones lineales de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ (que se identifica con las matrices $m \times n$).

Teorema 2.15. *Si $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^1 en $\mathbf{a}$ entonces $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$.*

Teorema del valor medio

Teorema 2.16 (Teorema del valor medio)**.** *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en el abierto A. Para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ de modo que el segmento que los une está contenido en A, existe $\mathbf{z}$ en ese segmento tal que $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.*

Teorema 2.17 (Teorema de incrementos finitos)**.** *Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en el abierto A. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ de modo que el segmento que los une está contenido en A. Si $\|D\mathbf{f}(\mathbf{z})\| \leq M$ para todo $\mathbf{z}$ de ese segmento, entonces $|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| \leq M|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$.*

Nota 2.1. En el teorema anterior $\|\cdot\|$ es la norma de la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo con la norma euclídea. También es cierto el teorema de incrementos finitos cuando se pone en origen y llegada la norma infinito.

Definición 2.18. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que A es conexo cuando no puede escribirse como la unión de dos conjuntos abiertos relativos de A disjuntos no vacíos; que A es convexo cuando todo segmento con extremos en A está contenido en A; y que A es poligonalmente conexo cuando cualesquiera dos puntos de A pueden unirse por una curva poligonal contenida en A.

Ejemplo 2.3. Las bolas respecto de cualquier norma son conjuntos convexos.

Proposición 2.19. *Si A es abierto, A es conexo si y sólo si es poligonalmente conexo. Además, la poligonal que une dos puntos puede escogerse de modo que sus segmentos sean paralelos a los ejes.*

Teorema 2.20. *Sea $\mathbf{f}$ diferenciable en el abierto A. Si A es conexo y $D\mathbf{f} = 0$ en A entonces $\mathbf{f}$ es constante en A.*

Problemas

Problema 15. Halla las derivadas parciales de las siguientes funciones en el interior de sus dominios de definición:
(a) $\log \tan(x/y)$; (b) $z^{2x} \arctan yx^2$; (c) $\arccos \sqrt{x-y}$; (d) $\operatorname{sen}((\log x^2)/(e^{z+y}))$

Problema 16. Calcula la derivada de f en a según la dirección v:

1. $f(x,y) = xy; a = (1,3); v = (2,-1)$.
2. $f(x,y) = xe^{xy}; a = (1,-1); v = (1,1)$.
3. $f(x,y,z) = (x/y)^z; a = (1,1,1); v = (2,1,-1)$.

Problema 17. Obtén las matrices jacobianas de las siguientes funciones en los puntos indicados:

1. $f(x,y) = \big(\arctan((x+y)/(1-xy)), \tan(x^2/y)\big); (\sqrt{\pi}, 1)$.
2. $f(x,y) = (x^2 + y^2 \operatorname{sen} xy, x/\sqrt{x^2+y^2}, \log((x+y)/(x-y))); (2, \pi/2)$.

Problema 18. Dada la función continua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = \int_{2x}^{xy} g(t)\, dt$.
2. $f(x,y) = \int_{y^2}^{x^4} g(t)\, dt$.
3. $f(x,y,z) = \int_{x^4}^{\operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y \operatorname{sen} z))} g(t)\, dt$.

Problema 19. De las siguientes afirmaciones, demuestra las verdaderas y da un contraejemplo de las falsas:

1. Todo conjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ es cerrado
2. Todo conjunto infinito de $\mathbb{R}^2$ tiene al menos un punto de acumulación
3. Si una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un límite unidimensional en un punto (a,b), tiene el reiterado correspondiente
4. Toda norma en $\mathbb{R}^2$ es una aplicación continua
5. Toda función $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable es continua
6. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que existe $D_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$. Entonces el límite direccional de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$, a lo largo de la recta que pasa por $\mathbf{a}$ y tiene la dirección de $\mathbf{v}$ es $\mathbf{f}(\mathbf{a})$

Problema 20. Indica si las implicaciones son verdaderas o falsas:
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in A$, A es abierto.

1. Si f es diferenciable en (a,b), entonces existen las derivadas parciales de f en un entorno de (a,b).
2. Si existe el límite doble en (a,b), entonces existen los reiterados.

3. Si f no es continua en (a,b), entonces no existe alguna derivada parcial de f en (a,b).
4. Si f es diferenciable en (a,b) y en $(c,d) \in A$; y $\nabla f(a,b) = \nabla f(c,d)$, entonces los planos tangentes a la superficie $z = f(x,y)$ en los puntos $(a,b,f(a,b))$ y $(c,d,f(c,d))$ son paralelos.

Problema 21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$; $x = r\cos t$, $y = r\,\mathrm{sen}\,t$.
2. $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$; $x = u+v$, $y = u-v$.
3. $f(x,y) = x^2 - \log y$; $x = \log t$, $y = t^2$.

Problema 22. Halla la ecuación del plano tangente a la superficie indicada en el punto correspondiente:

1. $z = x^2 - 2y^2$; $(2,1)$.
2. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$; $(0,0)$.
3. $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $(1,2)$.

Problema 23. Sea $f(x,y,z) = 3 + 5x + 6y - 9z + g(xyz)$. Sabiendo que $g(0) = 0$ y que $|g(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, demuestra que f es diferenciable en el origen y obtén la ecuación del plano tangente en ese punto a la superficie $f(x,y,z) = 3$.

Problema 24. Considera la función $f(x,y) = (x^4 - y^4)/(x^2 + xy + y^2)$. Estudia el dominio de definición de f. Estudia la continuidad y diferenciabilidad de f. ¿Puede definirse en el origen para que sea continua? ¿Y para que sea diferenciable?

Problema 25. Da una función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que sea diferenciable, que el gradiente en el punto $(1,-2,-3)$ sea el vector $(3,-1,2)$ y que $f(1,-2,-3) = -4$.

Problema 26. Usando la regla de la cadena, calcula la matriz jacobiana en $(1,2)$ de la función $h = g \circ f$ siendo $g(x,y,z) = (x+yz, x-z)$ y $f(x,y) = (x^2, y^2, x+y)$.

Problema 27. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $f(x,y,z) = \cos(x^2+y+z)$ y $\mathbf{g}(r,t) = (r^2\log(1+t^2), \arctan(r+t), t)$. Calcula razonadamente $D(f \circ \mathbf{g})(1,0)$.

Problema 28. Estudia las derivadas direccionales y la diferenciabilidad en $(0,0)$ y en $(0,-1)$ de la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = y\mathrm{e}^{y/x^2}$ si $x \neq 0$ y $f(x,y) = 0$ si $x = 0$.

Problema 29. Da una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$ menos el origen cuya matriz jacobiana en $(1,-3,0)$ sea $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, y tal que el límite en el origen de su primera componente sea $+\infty$ y el de la segunda 0.

Problema 30. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua que puede escribirse como

$$f(x,y,z) = (x-1)+(y-2)^2+(z-3)^3+R(x,y,z), \quad \text{donde} \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{R(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

¿Cuanto vale $f(0,0,0)$? ¿Es f diferenciable en el origen? ¿Cuánto valen las derivadas parciales en ese punto? ¿Y $D_{\mathbf{v}}f(0,0,0)$, si $\mathbf{v} = (a,b,c)$ es un vector no nulo?

Problema 31. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que puede escribirse como

$$f(x,y,z) = 5+6x^2-4y+5(z-1)+R(x,y,z),$$

donde

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{R(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

¿Cuánto vale f en el origen? ¿Es f diferenciable en el origen? ¿Cuánto valen sus derivadas parciales en el origen?

Problema 32. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y^4-x^2, & \text{si } y \geq \sqrt{|x|} \\ x^2-y^2, & \text{si } y < \sqrt{|x|} \end{cases}$$

1. Estudia la continuidad de f y calcula sus derivadas parciales.
2. Estudia la diferenciabilidad de f.
3. Calcula, si existe, la derivada direccional de f según el vector $\mathbf{v} = (2,1)$ en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

Problema 33. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \log(1+x-y), & \text{si } x \geq y \\ \arctan(x-y), & \text{si } x < y \end{cases}$$

1. Estudia la continuidad de f y calcula sus derivadas parciales.
2. Estudia la diferenciabilidad de f.
3. Calcula las derivadas direccionales de f en $(1,1)$ según las direcciones $\mathbf{u} = (1,1)$ y $\mathbf{v} = (-1,1)$.

Problema 34. Sea $f(x,y) = |y-x^2|$. ¿Es f continua en el plano? Estudia la existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad de f en los puntos $(2,2)$ y $(2,4)$.

Problema 35. Consideremos la función $f(x,y) = \arctan \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

1. Prueba que es continua en todo el plano.

2. Si $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ es un vector de módulo uno, calcula $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$.
3. ¿Es f diferenciable en el origen de coordenadas?
4. ¿En qué dirección se alcanza la derivada direccional máxima en el origen de coordenadas?

Problema 36. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan(y - x^3), & \text{si } y \geq x^3 \\ y^2 - x^3, & \text{si } y < x^3 \end{cases}$$

1. Estudia la continuidad y diferenciabilidad de f.
2. Calcula las derivadas direccionales de f en los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ según la dirección $\mathbf{v} = (3,2)$.
3. Si $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(t) = \log(1+t^2), \cos t)$, calcula razonadamente la matriz jacobiana de $\mathbf{g} \circ f$ en $(0,1)$ y la derivada de $f \circ g$ en 0.

Problema 37. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 0,\ y > 0\}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(xy)}{xy-1}, & \text{si } xy \neq 1 \\ 1, & \text{si } xy = 1 \end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en A.
2. Estudia la existencia de derivadas parciales de f en A. Calcúlalas donde existan.
3. Estudia la diferenciabilidad de f en A.

Indicación: Considera $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{\log t}{t-1}$.

Problema 38. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^3 & \text{si } x \geq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ xy & \text{si } x < 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Calcula las derivadas direccionales de f en los puntos $(0,b),\ \forall b \in \mathbb{R}$.
2. Estudia la diferenciabilidad de f.
3. Calcula, si existe, el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(0,-1,0)$.

Problema 39. Consideremos la función $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan \dfrac{1}{y-x^2} & \text{si } y > x^2 \\ \dfrac{\pi}{2} xy & \text{si } y \leq x^2 \end{cases}$

1. Estudia la continuidad de f en los puntos (a,a^2), $a \in \mathbb{R}$.
2. Estudia la diferenciabilidad de f en los puntos (a,a^2), $a \in \mathbb{R}$.
3. Calcula, si existen, las derivadas direccionales de f en $(0,1)$ y $(1,0)$ en la dirección $\mathbf{v} = (-1,1)$.

Problema 40. Sea $A = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y - \log x & \text{si} \quad \log x \leq y,\ x > 0 \\ e^y - x & \text{si} \quad \log x > y,\ x > 0 \end{cases}$$

1. Estudia la continuidad de f.
2. Estudia la diferenciabilidad de f.
3. Calcula la derivada direccional de f en $(1,0)$ según la dirección $\mathbf{v} = (3,2)$.
4. Si $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(u,v,w) = (\sqrt{u^2+v^2+w^2}, \arctan(uvw))$ calcula razonadamente la matriz jacobiana de $f \circ \mathbf{g}$ en $(0,1,0)$.

Problema 41. Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ tal que $D_1 f(x,y) = D_2 f(x,y)$, cualquiera que sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comprueba que f es constante en cada recta $x + y = c$. Deduce que si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x, g(x)) > 0$ y $\displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, entonces $f(x,y) > 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Problema 42. Calcula las derivadas parciales de las funciones

$$f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{y} \quad g(x,y) = \arctan x + \arctan y.$$

Discute la relación existente entre f y g.

3

Fórmula de Taylor. Extremos

Derivadas de orden superior

Definición 3.1. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que existen las parciales $D_i\mathbf{f}(x)$, $1 \le i \le n$ en A. Las derivadas parciales de las funciones $D_i\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se denominan derivadas parciales de segundo orden, y las denotaremos

$$D_j(D_k\mathbf{f})(x) = D_{k,j}\mathbf{f}(x) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}(x)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Estas definiciones y notaciones se extienden de modo natural por inducción a órdenes superiores de derivación.

Teorema 3.2 (Heffter – Young)**.** *Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto. Si las derivadas parciales $D_r\mathbf{f}$ y $D_k\mathbf{f}$ existen en una bola $B(\mathbf{a}, r) \subset A$ y son diferenciables en $\mathbf{a}$, entonces $D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{a})$.*

Corolario 3.3. *Si las derivadas parciales $D_r\mathbf{f}$ y $D_k\mathbf{f}$ existen en una bola $B(\mathbf{a}, r) \subset A$ e igualmente existen $D_{r,r}\mathbf{f}$ y $D_{k,k}\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ y $D_{r,k}\mathbf{f}$, $D_{k,r}\mathbf{f}$ son continuas en $\mathbf{a}$ entonces $D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{a})$.*

Teorema 3.4 (Schwarz)**.** *Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto, $\mathbf{a} \in A$. Si $D_r\mathbf{f}$, $D_k\mathbf{f}$ y $D_{r,k}\mathbf{f}$ existen en una bola $B(\mathbf{a}, r) \subset A$ y $D_{r,k}\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$, entonces existe $D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ y $D_{r,k}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = D_{k,r}\mathbf{f}(\mathbf{a})$.*

Definición 3.5. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $B \subset A$ y sea $\mathbf{a} \in \mathring{B}$. Se dice que $\mathbf{f}$ es dos veces diferenciable en $\mathbf{a}$ si $D\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$, es decir, existe una aplicación lineal $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{R}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = 0.$$

La aplicación $\mathbf{T}$ cuando existe es única, se llama derivada segunda de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{a}$ y la escribimos $D^2\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Definición 3.6. Sea $\mathbf{B}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. La matriz $A = (\alpha_{ij})$, donde $\alpha_{ij} = \mathbf{B}(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)$ se llama matriz asociada a la forma bilineal $\mathbf{B}$. Es $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{y}$. La forma bilineal se dice simétrica si $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{B}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, cualesquiera que sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. En este caso, la matriz asociada es simétrica. La aplicación $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ se denomina forma cuadrática asociada a la forma bilineal $\mathbf{B}$. La forma cuadrática es definida positiva (resp. definida negativa) si $Q(\mathbf{h}) > 0$ (resp. $Q(\mathbf{h}) < 0$), cualquiera que sea $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. Si las desigualdades no son estrictas, se dice semidefinida positiva (resp negativa).

Nota 3.1. Si Δ_k son los menores principales de la matriz asociada a una forma cuadrática simétrica Q, es conocido que Q es definida positiva si y sólo si $\Delta_k > 0,\ 1 \le k \le n$ y Q es definida negativa si y sólo si $(-1)^k \Delta_k > 0,\ 1 \le k \le n$.

Nota 3.2. Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, la aplicación $D^2 f(\mathbf{a})(\cdot)(\cdot)$ es una aplicación bilineal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teorema 3.7. *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en $\mathbf{a} \in A$. Entonces,*

$$D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{i,j} f(\mathbf{a}) u_i v_j, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema de Taylor

Lema 3.8. *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales hasta el orden m continuas en el abierto A. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ tales que $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset A$. Entonces, la función $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$ tiene derivadas hasta el orden m y*

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} D_{j_1,\ldots,j_k} f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(b_{j_1} - a_{j_1}) \cdots (b_{j_k} - a_{j_k}).$$

Definición 3.9. Sea $p \in \mathbb{N}$. Se dice que la función $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathcal{C}^p$ en A, y escribimos $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^p(A)$, cuando existen en A todas las derivadas parciales sucesivas de las funciones componentes de $\mathbf{f}$ hasta el orden p y son continuas en A. Si $\mathbf{f}$ es de clase $\mathcal{C}^p$ en A para todo $p \in \mathbb{N}$, decimos que $\mathbf{f}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en A.

Definición 3.10. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^m$ en el abierto A. El polinomio de Taylor de f de orden m en $\mathbf{a} \in A$ es el polinomio de n variables

$$P_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} \frac{1}{k!} D_{j_1,\ldots,j_k} f(\mathbf{a})(x_{j_1} - a_{j_1}) \cdots (x_{j_k} - a_{j_k}).$$

El resto de Taylor de orden m es $R_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - P_m(\mathbf{x})$.

Definición 3.11. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $\mathbf{a} \in A$. Se define la matriz hessiana de f en $\mathbf{a}$ como

$$H_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} D_{1,1}f(\mathbf{a}) & D_{1,2}f(\mathbf{a}) & \dots & D_{1,n}f(\mathbf{a}) \\ D_{2,1}f(\mathbf{a}) & D_{2,2}f(\mathbf{a}) & \dots & D_{2,n}f(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n,1}f(\mathbf{a}) & D_{n,2}f(\mathbf{a}) & \dots & D_{n,n}f(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

La matriz hessiana es simétrica, $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} D_{i,j}f(\mathbf{a})x_i x_j$ es su forma cuadrática asociada. El polinomio de Taylor de orden dos se puede escribir

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Teorema 3.12 (Expresión del resto de Taylor)**.** *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^m$ en el abierto A. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in A$ tales que $L(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \subset A$. Entonces, existe $\mathbf{z} \in L(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ tal que*

$$R_{m-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1,\dots,j_m=1}^{n} D_{j_1,\dots,j_m}f(\mathbf{z})(x_{j_1} - a_{j_1}) \cdots (x_{j_m} - a_{j_m}).$$

Teorema 3.13 (Comportamiento del resto de Taylor)**.** *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^m$ en el abierto A. Entonces $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{R_m(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^m} = 0$.*

Ejercicio 3.1. Pruébese que si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \dfrac{R_2(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2} = 0$.

Extremos relativos

Definición 3.14. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si existe una bola $B(\mathbf{a}, r) \subset A$ tal que $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a})$ (resp. $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{a})$), para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r)$, decimos que f tiene en el punto $\mathbf{a}$ un máximo (resp. mínimo) relativo. En ambos casos, decimos que f tiene un extremo relativo en $\mathbf{a}$.

Teorema 3.15 (Condición necesaria de extremo)**.** *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, $\mathbf{a} \in A$. Supongamos que f tiene en $\mathbf{a}$ un extremo relativo. Entonces, si existe $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, es $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$.*

Ejercicio 3.2. Ver mediante un ejemplo que la condición del teorema anterior no es suficiente, ni aún siendo $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = 0$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 3.16. Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{a}$, A abierto. Si $Df(\mathbf{a}) = 0$, se dice que $\mathbf{a}$ es un punto estacionario o crítico de f. Si $\mathbf{a}$ es un punto estacionario y cualquiera que sea la bola $B(\mathbf{a}, r) \subset A$ existen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r)$ tales que $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{y})$, decimos que $\mathbf{a}$ es un punto de silla de f. Luego si $\mathbf{a}$ es un punto estacionario de f, entonces f tiene en $\mathbf{a}$ un extremo relativo o un punto de silla.

Teorema 3.17 (Condición necesaria)**.** *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, A abierto, $Df(\mathbf{a}) = 0$. Entonces, si f tiene un mínimo en $\mathbf{a}$ es $D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h})(\mathbf{h}) \geq 0$, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.18 (Condición suficiente)**.** *Sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $\mathbf{a} \in A$, A abierto, $Df(\mathbf{a}) = 0$. Sea $Q(\mathbf{h}) = D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h})(\mathbf{h})$. Entonces,*

1. *Si Q es definida positiva, f tiene mínimo relativo estricto en $\mathbf{a}$.*
2. *Si Q es definida negativa, f tiene máximo relativo estricto en $\mathbf{a}$.*
3. *Si existen $\mathbf{h}^1$, $\mathbf{h}^2 \in \mathbb{R}^n$ de modo que $Q(\mathbf{h}^1) > 0 > Q(\mathbf{h}^2)$, f tiene punto de silla en $\mathbf{a}$.*

Corolario 3.19. *Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $\mathbf{a}$, U abierto, $Df(\mathbf{a}) = 0$. Sean $A = D_{1,1}f(\mathbf{a})$, $B = D_{1,2}f(\mathbf{a})$, $C = D_{2,2}f(\mathbf{a})$, $\Delta = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Entonces,*

1. *Si $\Delta > 0$ y $A > 0$, f tiene mínimo relativo estricto en $\mathbf{a}$.*
2. *Si $\Delta > 0$ y $A < 0$, f tiene máximo relativo estricto en $\mathbf{a}$.*
3. *Si $\Delta < 0$, f tiene punto de silla en $\mathbf{a}$.*
4. *Si $\Delta = 0$, nada puede afirmarse.*

Extremos condicionados. Teorema de los multiplicadores de Lagrange

Definición 3.20. Sean $f, g_i\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m < n$, y

$$D = \{\mathbf{x} \in A\colon\ g_i(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq m\}.$$

Se dice que f tiene en $\mathbf{a}$ un extremo relativo bajo las condiciones $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq m$ (llamadas también ligaduras) si la función $f_{|A\cap D}$ tiene en $\mathbf{a}$ un extremo relativo.

Teorema 3.21 (de los multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $f, g_i\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m < n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tales que $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}^1(A)$. Sea*

$$D = \{\mathbf{x} \in A\colon\ g_i(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq m\}.$$

Si $\mathbf{a} \in D$ y $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, $\forall \mathbf{x} \in D \cap B(\mathbf{a}, r)$, entonces existen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que

$$\lambda_0 \nabla f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a}) = 0, \qquad \text{es decir,}$$

$$\lambda_0 D_j f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_j g_k(\mathbf{a}) = 0,\ 1 \leq j \leq n.$$

Si además los vectores $\nabla g_k(\mathbf{a})$, $1 \leq k \leq m$, son linealmente independientes, podemos elegir $\lambda_0 = 1$.

Problemas

Problema 43. Calcula las derivadas parciales $D_1 f$, $D_{1,2} f$ y $D_{2,1,1} f$ de las funciones:

(a) $f(x,y) = (x^2 - y^3)^4 + e^{xy}$ (b) $f(x,y) = x \operatorname{sen}(\log(y + x^2))$

(c) $f(x,y) = x^3 \operatorname{arc sen} \dfrac{y}{x}$ (d) $f(x,y) = (xy^2)^{\tan x}$

Problema 44. Estudia la existencia de derivadas parciales de segundo orden de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Es f dos veces diferenciable en el origen?

Problema 45. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \cos \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Determina el conjunto de puntos donde se verifica $D_{1,2} f(x,y) = D_{2,1} f(x,y)$.
2. Estudia si se verifican las hipótesis de los teoremas de Heffter-Young y Schwarz en los puntos $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Problema 46. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \log(xy), & \text{si } xy \geq 1 \\ \arctan(xy - 1), & \text{si } xy < 1 \end{cases}$

1. Prueba que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$.
2. ¿Existe $D_{1,2} f(1,1)$?
3. Si $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es $\mathbf{g}(t) = (t\sqrt{t^2+1}, e^{t^2})$, calcula razonadamente la matriz jacobiana de $\mathbf{g} \circ f$ en $(1/2, 2)$. Calcula asimismo la derivada de $f \circ \mathbf{g}$ en el origen.

Problema 47. Sea $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan(x/y), & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}$

1. Calcula las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2$.
2. Calcula $D_{1,2} f(x,0)$ y $D_{2,1} f(x,0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. Deduce que $D_1 f$ o $D_2 f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 48. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \log(1 + y - x), & \text{si } y \geq x \\ \operatorname{sen}(y - x), & \text{si } y < x \end{cases}$

1. Prueba que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$.
2. ¿Existe $D_{1,2} f(a,a)$?

3. Si $\mathbf{g}\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(t) = (\arctan t, \log t)$, calcula razonadamente la matriz jacobiana de $\mathbf{g} \circ f$ en $(1, \mathrm{e})$ y la derivada de $f \circ \mathbf{g}$ en 1.

Problema 49. Utiliza la fórmula de Taylor para desarrollar las siguientes funciones en los puntos indicados:

1. $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$ en $(1,2)$.
2. $g(x,y) = \log(x+y)$ en $(1,1)$.
3. $h(x,y,z) = \mathrm{e}^{a(x+y+z)}$ en $(0,0,0)$.

Problema 50. Consideremos la función $f(x,y) = y^x$.

1. Prueba que f es diferenciable en el abierto $y > 0$.
2. Calcula $Df(0,1)$. ¿Qué tiene la función f en el punto $(0,1)$?
3. Calcula un polinomio $P(x,y)$, de grado menor o igual que 3, de modo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,1+y) - P(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Problema 51. Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. El polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x,y) = x^3 y$ en $(0,0)$ es $x^3 y$.
2. Si f es un polinomio, entonces cualquier polinomio de Taylor de f coincide con $f(x,y)$.
3. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en $\mathbb{R}$. Si f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y g tiene un extremo relativo en $y = 3$, entonces la función $h(x,y) = f(x) + g(y)$ tiene un extremo relativo en $(1,3)$.
4. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones indefinidamente derivables, tales que $f'(1) = g'(3) = 0$, $f''(1) > 0$, $g''(3) > 0$. Entonces la función $h(x,y) = f(x) + g(y)$ tiene un extremo relativo en $(1,3)$.
5. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$ cuyo desarrollo de Taylor de orden 2 en torno al punto $(2,3)$ es $3 + 2(x-2) + (x-2)^2 + 2(x-2)(y-3) + 3(y-3)^2$. Entonces, la función $g(x,y) = f(x,y) - 2(x-2)$ tiene un mínimo relativo en $(2,3)$.
6. Si el punto $(1,2)$ es extremo relativo de la función $f(x,y)$ condicionado a $g(x,y) = 0$, también es un extremo de $f(x,y)$.

Problema 52. Estudia los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + kxy$.
2. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
3. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.
4. $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$.
5. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.
6. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^3 + 4y^2 + 7$.
7. $f(x,y) = 3x^2y^2 + y^3 - 6y^2 + 9y$.

8. $f(x,y) = y^3 + x^2y - 3y$.

Problema 53. Consideremos las funciones

$$f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2, \qquad g(x,y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2-1)^2.$$

Estudia los extremos de f y g. Comenta los resultados obtenidos con el caso de funciones reales de una variable real.

Problema 54. Prueba que en $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2,\ z \geq x^2+y^2\}$ existen dos puntos P_1 y P_2 que son, respectivamente, los puntos de M que están más cerca y más lejos del punto $(0,1,2)$. Calcula P_1 y P_2.

Problema 55. Sea $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$ y $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 4\}$.

1. ¿Es M un conjunto compacto? ¿Tiene la función f extremos absolutos en M?
2. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, calcula y clasifica los extremos de f en M.

Problema 56. Sea $f(x,y) = y^3 - x^2$.

1. Calcula los extremos absolutos y relativos de f en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 = 3\}$.
2. Calcula los extremos absolutos y relativos de f en $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 3\}$.
3. Comenta el resultado obtenido para el punto $(0,-1)$ en los apartados anteriores.

Problema 57. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2+y^2 = z^2,\ x+y+z = 1\}$.

1. ¿Es el conjunto A cerrado? ¿Y acotado?
2. Calcula razonadamente, usando el teorema de los multiplicadores de Lagrange con dos condiciones, el punto del conjunto A que da la menor distancia al origen de coordenadas.
3. Deduce del apartado anterior que $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq 2 - \sqrt{2}$, cualquiera que sea $(x,y,z) \in A$.

Problema 58. Sea $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4x$ y sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$.

1. Prueba que f alcanza extremos absolutos en A y calcúlalos.
2. ¿Tiene f extremos relativos en el interior de A?

Problema 59. Sea $f(x,y,z) = z^2$, y sean $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z = 1,\ 3z+x^2 = 1\}$, $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z = 1,\ 3z+x^2 \geq 1\}$.

1. Prueba que f alcanza extremos absolutos en A y en B. ¿Todos los extremos de f en A serán extremos de f en B?
2. Calcula los extremos absolutos y relativos de f en A.
3. Calcula los extremos absolutos y relativos de f en B.

4. Comenta los resultados obtenidos en los apartados 2. y 3.

Problema 60. Estudia y clasifica todos los extremos de la función $f(x,y,z) = x+y+z$ en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \ x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$.

Problema 61. Sean $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x,y) = xy - x - y, \ g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$. Consideremos los conjuntos $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ g(x,y) = 0\}$ y $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ f(x,y) = 0\}$.

1. Estudia la compacidad de M y H.
2. Calcula, mediante los multiplicadores de Lagrange, los extremos de f en el conjunto M.
3. Calcula, mediante los multiplicadores de Lagrange, los extremos de g en el conjunto H.

Problema 62. 1. Sea $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ |y| \leq 1 - x^2\}$. Demuestra que la función $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ alcanza extremos absolutos en el conjunto M.
2. Determina y clasifica los extremos relativos y absolutos de f en M.

Problema 63. Estudia los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + 4y - 4$ en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

Problema 64. Determina los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en el conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, \ z^2 \leq x\}$.

Problema 65. Consideremos el conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ y^2 + \log x^2 = 1, \ 0 \leq y \leq 3, \ x > 0\}$.

1. Prueba que M es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$.
2. Si $f(x,y) = x^2 + y^2$, determina, mediante el teorema de los multiplicadores de Lagrange, los extremos absolutos de f en el conjunto M.
3. Prueba que $\log x^2 - x^2 \geq 1 - e$, si $x \in [1, \sqrt{e}]$. Deduce si el punto $(\sqrt{e}, 0)$ es un extremo relativo condicionado de f en M.

Problema 66. Prueba que la función $f(x,y,z) = x + 2y + z$ alcanza extremos absolutos en el conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \ x^2 + z^2 = 1, \ y^2 + z^2 \leq 1\}$. Calcúlalos.

Determina si f tiene en el punto $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ un extremo relativo condicionado a M .

Problema 67. Consideremos la curva en $\mathbb{R}^3$ dada por las ecuaciones $2x^2 + y^2 = 4$, $x + y + z = 0$. Encuentra los puntos de dicha elipse que están respectivamente más cerca y más lejos del eje OY.

Problema 68. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \ x^2 + y^2 \leq 4, \ y + z = 3\}$. Calcula los puntos de A que están respectivamente más cerca y más lejos del origen de coordenadas. ¿Qué puedes decir del punto $(0,2,1)$?

Problema 69. Encuentra razonadamente, los puntos más altos y bajos de la curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$$

¿Cuáles son los puntos más cercanos y cuáles los más lejanos al eje **OZ**?

Problema 70. Consideremos la función $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 2$.

1. Calcula los extremos de f en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ (x-1)^2 + 4y^2 = 4\}$.
2. Calcula los extremos de f en $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \ (x-1)^2 + 4y^2 \leq 4\}$. ¿Todos los extremos de f en A son extremos de f en B? Justifica la respuesta.

Problema 71.
1. Prueba que la función $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x, y) = x^2 + (y - \sqrt{3})^2$ alcanza extremos absolutos en el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 1\}$ y calcúlalos.
2. Prueba que f restringida a M no tiene un extremo relativo en el punto $(1, \sqrt{3})$.
3. Interpreta geométricamente el problema de extremos planteado.

Problema 72. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2$. Calcula, si existen, los extremos relativos y absolutos de f en

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \geq 1\}$.

Problema 73. Sea $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 1$.

1. Calcula, si existen, los extremos relativos y absolutos de f en $\mathbb{R}^2$.
2. Calcula, si existen, los extremos relativos y absolutos de f en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 = 9\}$.
3. Deduce de los apartados anteriores los extremos relativos y absolutos de f en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4

Teoremas de inversión local

Teorema de la función inversa

Definición 4.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $\mathbf{f}\colon A \to \mathbb{R}^n$ es localmente invertible en $\mathbf{a} \in A$ cuando existe $r > 0$ tal que $\mathbf{f}$ es inyectiva en $B(\mathbf{a}, r)$. En ese caso, se puede definir la función inversa $\mathbf{f}^{-1}$ en un entorno de $\mathbf{f}(B(\mathbf{a}, r))$.

Se dice que $\mathbf{f}$ es localmente invertible en A cuando lo es en cada $\mathbf{a} \in A$. Se dice que es globalmente invertible cuando es inyectiva en A.

Lema 4.2.

1. *Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A abierto, $\mathbf{a} \in A$ y $D_j f_i$ continuas en $\mathbf{a}$, $1 \leq i, j \leq n$. Entonces la aplicación $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n \to |J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})| \in \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{a}$.*

2. *El conjunto Isom$(\mathbb{R}^n)$ es abierto, y la aplicación que a cada isomorfismo $\mathbf{f}$ le asocia su inversa $\mathbf{f}^{-1} \in$ Isom$(\mathbb{R}^n)$, es de clase $\mathcal{C}^\infty$.*

Teorema 4.3 (de la función inversa)**.** *Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que:*

1. *$\mathbf{f}$ es diferenciable en A, A abierto.*

2. *$D\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{a}$.*

3. *$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$.*

Entonces, existen abiertos $V, W \subset \mathbb{R}^n$ tales que:

- *$\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in W$, $\mathbf{f}\colon V \to W$ es biyectiva.*

- *$\mathbf{f}^{-1}$ es diferenciable en W y $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (D\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})))^{-1}$, $\forall \mathbf{y} \in W$.*

- *$D\mathbf{f}^{-1}$ es continua en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.*

Corolario 4.4. *En las condiciones del teorema, si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^p(A)$ entonces $\mathbf{f}^{-1} \in \mathcal{C}^p(W)$.*

Teorema de la función implícita

Definición 4.5. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{f}\colon A \times B \to \mathbb{R}^m$. Se dice que la ecuación $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ define a $\mathbf{y}$ como función implícita de $\mathbf{x}$ en $A \times B$ cuando para todo $\mathbf{x} \in A$ existe un único $\mathbf{y} \in B$ de modo que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Teorema 4.6 (de la función implícita)**.** *Sea $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, U abierto, tal que*

1. *$\mathbf{f}$ es diferenciable en U.*
2. *$D\mathbf{f}$ es continua en $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$, $(\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m)$.*
3. *$\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.*

Sea $M = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le m}$, $\alpha_{ij} = D_{n+j} f_i(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces, si $\det |M| \neq 0$,

- *Existen $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ abiertos con $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$, $A \times B \subset U$.*
- *Existe $\mathbf{g}\colon A \to B$ diferenciable, $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, $D\mathbf{g}$ continua en $\mathbf{a}$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in A$.*
- *La aplicación $\mathbf{g}$ es única en el sentido de que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B$.*

Corolario 4.7. *En las condiciones del teorema, si $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^p(U)$ entonces $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^p(A)$.*

Derivada de la función implícita

Definición 4.8. Si $\mathbf{f}\colon U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el abierto U, definimos las derivadas parciales bloques, que notamos $D_{(1)}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $D_{(2)}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como las aplicaciones:

$$D_{(1)}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad D_{(1)}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{u}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{0})$$

$$D_{(2)}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \qquad D_{(2)}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{v}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{0}, \mathbf{v})$$

Teorema 4.9 (Derivada de la función implícita)**.** *Con las hipótesis y notaciones del teorema de la función implícita, la diferencial de la función implícita $\mathbf{g}$ es*

$$D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\left(D_{(2)}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \circ D_{(1)}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))$$

Ejercicio 4.1. Sean $f(x, y, z) = 0$ y $g(x, y, z) = 0$ dos superficies en $\mathbb{R}^3$ cuyos planos tangentes no son paralelos. Pruébese que el vector tangente a la curva intersección es $\left(\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}, \dfrac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}, \dfrac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\right)$.

Problemas

Problema 74. Sea $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

1. Calcula el jacobiano de $\mathbf{f}$ en cualquier punto de su dominio.
2. ¿Es localmente invertible? ¿Es inyectiva? ¿Puedes dar una expresión de la inversa?

Problema 75. Sea $\mathbf{f}\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{1}{2}(|x| - y), \sqrt{|x|y}\right), \quad \text{siendo} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \neq 0,\ y > 0\}$$

Estudia la existencia de la inversa local de $\mathbf{f}$ en cualquier punto de su dominio. Calcúlala en los puntos en que exista.

Problema 76. Sea $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(x,y) = (-3x + y^3, -3y + x^3)$. ¿Admite $\mathbf{f}$ inversa local en un entorno del punto $(1,0)$? ¿Y del $(1,1)$? (Indicación: considera la restricción de $\mathbf{f}$ a la diagonal $y = x$).

Problema 77. Sea $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$. ¿Dónde es localmente invertible f? Comprueba que cualquiera que sea $s \in \mathbb{R}$, $f(-s/2, \sqrt{3}s/2) = f(s,0)$. ¿Es localmente invertible en $(0,0)$?

Problema 78. Sea $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{f}(x,y) = (x^3 + x + y^2, y^3)$.

1. Comprueba que $\mathbf{f}$ es inyectiva en $\mathbb{R}^2$.
2. Determina los puntos en los que $\mathbf{f}$ admite inversa local diferenciable.
3. Calcula la matriz jacobiana de $\mathbf{f}^{-1}$ en los puntos en los que $\mathbf{f}^{-1}$ sea diferenciable.

Problema 79. Sea $\mathbf{f}(x,y) = (\cos x + \cos y, \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)$.

1. ¿En qué puntos del dominio garantiza el teorema de la función inversa que $\mathbf{f}$ es localmente invertible?
2. Calcula $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(0,\pi/2))$.
3. ¿Es $\mathbf{f}$ localmente invertible en $(0,\pi)$?

Problema 80. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, $g(0) = 1$. Sea $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\int_x^y g(t)\,dt, \int_y^{x^2} g(t)\,dt\right).$$

Demuestra que $\mathbf{F}$ tiene inversa en un entorno de $(0,0)$ y calcula $D\mathbf{F}^{-1}(0,0)$.

Problema 81. Consideremos la función $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(x,y) = (\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{y}, \mathrm{e}^{y})$.

1. Prueba que $\mathbf{f}$ es localmente invertible en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(x,y))$.

2. ¿Es $\mathbf{f}$ inyectiva? ¿Puedes dar una expresión de la inversa? Halla su matriz jacobiana y comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior.

Problema 82. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 1\}$ y sea $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{x}{1-x-y}, \frac{y}{1-x-y} \right)$$

1. Prueba que $\mathbf{f}$ es localmente invertible en todos los puntos de A. Calcula $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(x,y))$.
2. Demuestra que $\mathbf{f}$ es inyectiva en A. Calcula $\mathbf{f}^{-1}$. ¿Cuál es su dominio?
3. Halla la matriz jacobiana de $\mathbf{f}^{-1}$ y comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior.

Problema 83. Sea $f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + z^3 - z$. Prueba que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $z = z(x,y)$, verificando $z(0,0) = 1$ y que $(0,0)$ es un extremo relativo de z.

Problema 84. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\mathbb{R}$, $\alpha(1) = \beta(1) = \gamma(1) = \delta(1) = 1$. Prueba que la ecuaciones

$$\begin{cases} \displaystyle\int_u^{v^2} \alpha(t)\,dt - \int_x^y \beta(t)\,dt = 0 \\ \displaystyle\int_{u^3}^{v^4} \gamma(t)\,dt - \int_{x^2}^{y^2} \delta(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

definen en un entorno del punto $(1,1)$ dos funciones $u(x,y)$, $v(x,y)$ tales que $u(1,1) = 1$, $v(1,1) = 1$ y que verifican las ecuaciones anteriores. Calcula las derivadas parciales de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ en $(1,1)$.

Problema 85. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que

$$f(0,1,1) = 0, \qquad \nabla f(0,1,1) = (1,2,1), \qquad H_f(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtener el polinomio de Taylor de orden dos de la función implícita $z(x,y)$, definida por la ecuación $f(x,y,z) = 0$ en un entorno del punto $(0,1)$.

Problema 86.
1. Prueba que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{e}^{x+y+z} - 1$ define a z como función implícita de clase $\mathcal{C}^\infty$ verificando $z(0,0) = 0$.
2. Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = z(x,y)$ en el punto $(0,0,0)$.
3. Calcula el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $z(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

Problema 87. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en el abierto A. Supuesto que $(1,2,3) \in A$, que $f(1,2,3) = 0$ y que $\nabla f(1,2,3) = (-1,0,2)$, se pide:

1. Si $F(x,y,z) = f(x,y,z) + 2x - y + z$, calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $F(x,y,z) = 3$ en el punto $(1,2,3)$.
2. Deduce razonadamente que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define $x = g(y,z)$ en un entorno de $(2,3)$ verificando $g(2,3) = 1$ y $f(g(y,z),y,z) = 0$ para todos los puntos de ese entorno.
3. Si $\mathbf{v} = (1,-1)$, calcula la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}g(2,3)$.

Problema 88. 1. Utiliza los multiplicadores de Lagrange para calcular los extremos de la función $f(x,y,z) = x + y - z^2$ en el conjunto $(x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. ¿Tiene f extremos absolutos en ese recinto? ¿Cuáles son?
2. Prueba que la ecuación $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$ define y como función implícita de (x,z) cumpliendo $y(2 - 1/\sqrt{2}, 0) = -1/\sqrt{2}$.
3. Utiliza la función del apartado anterior para estudiar la naturaleza del punto $(2 - 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

Problema 89. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ \log(1 + xy) + \operatorname{sen}(zt) = 0 \\ \mathrm{e}^{x-z} - \mathrm{e}^{y-t} = 0 \end{cases}$$

Prueba que define una función implícita $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ verificando $g(0) = (1,0,1)$. Si $h(t) = x(t)^{\left((1+y(t))^{z(t)}\right)}$, calcula $h'(0)$.

Problema 90. Comprueba que las ecuaciones

$$\begin{cases} x\mathrm{e}^s - \dfrac{yt}{\pi} = 0 \\ \pi y \tan s + x \operatorname{sen} t = 1 \end{cases}$$

definen una función implícita $(s,t) = \varphi(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno del punto $(1,2)$, cumpliendo $\varphi(1,2) = (0, \pi/2)$. Calcula la derivada direccional de la función $s + t$ en el punto $(1,2)$ en la dirección $(-4\pi, 4)$.

Problema 91. Consideremos la ecuación $\mathrm{e}^z + xz + y = 0$.

1. Prueba que define una función $z = z(x,y)$ indefinidamente diferenciable en un entorno del punto $(0,-1)$.
2. Calcula a y b para que $(0,-1)$ sea punto crítico de la función $g(x,y) = z(x,y) + ax + by$.
3. Para esos valores de a y b, ¿es $(0,-1)$ extremo relativo de g?

Problema 92. Prueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1 \end{cases}$$

define una función $\mathbf{g}(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z))$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ verificando $\mathbf{g}(0,1,1) = (1,0)$.

Si $\mathbf{h}(x,y) = (x+2y, 1+x, 1+y^2)$, calcula razonadamente la matriz jacobiana de $\mathbf{g} \circ \mathbf{h}$ en $(0,0)$ y la de $\mathbf{h} \circ \mathbf{g}$ en $(0,1,1)$.

La función $\mathbf{g} \circ \mathbf{h}$, ¿es localmente invertible en $(0,0)$? Justifica tu respuesta.

Problema 93. Consideremos las funciones $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ y $g(x,y) = x^3y + xy^3 - 2$.

1. Prueba que, en un entorno del punto $(1,1)$, la ecuación $g(x,y) = 0$ define una función implícita h, de clase $\mathcal{C}^\infty$, $y = h(x)$.
2. Usando la función h del apartado anterior, estudia si el punto $(1,1)$ es extremo relativo de la función f bajo la condición $g(x,y) = 0$.
3. ¿Qué puedes decir del punto $(-1,-1)$?
4. El conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; g(x,y) = 0\}$, ¿es acotado?

Problema 94. Consideremos la función $f(x,y,z) = \mathrm{e}^z - (z-1)(x^2+y^2) - \mathrm{e}^3$, definida en el conjunto abierto $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z > 2\}$.

1. Prueba que la ecuación $f(x,y,z) = 0$ define a z como función implícita de (x,y) en un entorno de cada punto (x_0,y_0,z_0) que la verifique.
2. Calcula los puntos críticos de la función implícita.
3. Calcula los extremos de la función implícita.

Problema 95. Prueba que el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{aligned} \log(x+yu) + x^2v &= 1 \\ \arctan(u^2vx) + \operatorname{sen}(yv) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right.$$

define una función $(x,y) = \psi(u,v)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno de $(1,1)$ cumpliendo $\psi(1,1) = (1,0)$. Estudia si ψ es localmente invertible en el punto $(1,1)$

Bibliografía

Libros de teoría:

1. **Apostol, T. M.** Análisis Matemático, 2^a edición. Reverté, 1976.
2. **Apostol, T. M.** Calculus, 2^a edición. Reverté, 1986.
3. **Burgos, J. de** Cálculo infinitesimal de varias variables. McGraw-Hill, 1995.
4. **Castillo, F.** Análisis Matemático II. Alhambra, 1980.
5. **García, A. y otros** Cálculo II. Teoría y problemas de funciones de varias variables. Clagsa, Madrid 2002.
6. **Larson, R.E., Hostetler, R.P., Edwards, B.H.** Cálculo y Geometría Analítica. McGraw-Hill, 1995.
7. **Marsden, J.E., Tromba, A.J., Weinstein, A.** Basic multivariable calculus. Springer, 1993.
8. **Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C.A.** Análisis Matemático, vol. II. Kapelusz, 1957.
9. **Rudin, W.** Principios de Análisis Matemático, 3^a edición. McGraw-Hill, 1980.
10. **Spivak, M.** Cálculo en variedades. Reverté, 1970.
11. **Stewart, J.** Cálculo multivariable. Thomson Learning, 4ª edición. 2002.
12. **Stromberg, K.** An Introduction to Classical Real Analysis. Wadsworth, 1981.
13. **Webb, J.R.L.** Functions of several real variables. Ellis Horwood, 1991.

Libros de problemas:

1. **Bombal, F., Rodríguez, L., Vera, G.** Problemas de Análisis Matemático (3 tomos). AC, 1987.
2. **Fernández Viñas, J. M.** Ejercicios y problemas de Análisis Matemático II. Tecnos, 1986.
3. **Flory, G.** Ejercicios de Topología y Análisis (tomo 3). Reverté, 1971.
4. **Liashkó, I.I. y otros.** Matemática superior. Problemas resueltos (tomo 3). Editorial URSS, 1999.
5. **Spiegel, M.R.** Cálculo superior. Serie Schaum, McGraw-Hill 1969.