Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables (Grupo A) **04/04/01**

Apellidos:______________________________ **Nombre:**____________________

1. En los siguientes apartados da un ejemplo de lo que se pide o, en caso contrario, indica la imposibilidad del mismo:

Una función $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua que no sea integrable Lebesgue en (a,b).	Dado $a > 0$, un subconjunto medible Lebesgue $A \subset \mathbb{R}$, de interior vacío tal que $\mathfrak{m}(A) = a$.
Dos funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iguales en casi todo $\mathbb{R}$ para la medida de Lebesgue, una integrable Lebesgue y la otra no.	Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ medible Borel que no sea un intervalo, ni un conjunto abierto, ni cerrado, ni acotado.
Una sucesión (f_n) de funciones integrables Riemann en un intervalo, $f_n \to f$, f no integrable Riemannn pero sí Lebesgue.	Una sucesión de funciones integrables que converja en casi todo a una función que no sea integrable.

2. Consideremos la sucesión $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\chi_{(\frac{1}{n},+\infty)}$, de£nida para $x > 0$. ¿Es f_n integrable en $(0,+\infty)$? ¿Puedes aplicar algún teorema de convergencia que garantice la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx?.$$

¿Está la sucesión (f_n) dominada por una función integrable en $(0,+\infty)$?

Firma: