Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables

Examen Final   30 de noviembre de 2000

Apellidos:

Nombre:

Esta parte del examen dura **dos horas**. Las dos primeras preguntas valen cada una **1.5 puntos**, la tercera tiene un valor de **2 puntos**.

1. Enuncia y demuestra el teorema de aproximación de funciones medibles no negativas por funciones simples, medibles no negativas.

2. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

2.1 Define la integral de una función simple medible no negativa, de una función medible no negativa y de una función medible arbitraria. Comprueba la consistencia de estas definiciones.

2.2 Define el concepto de función integrable. Prueba que una función medible es integrable si y sólo si lo es su valor absoluto.

3. Mediante el cambio de variables $s = x + y$, $t = y - x$, calcula la integral

$$\iint_A e^{-\operatorname{máx}\{x+y,y-x\}}\, dx\, dy, \qquad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq |x|\}.$$

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables

Examen Final 30 de noviembre de 2000

Apellidos:

Nombre:

Esta segunda parte del examen dura **dos horas**. El primer problema vale **2 puntos**, el segundo **3 puntos**.

1. Consideremos la función

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\log(1-t^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad |t| < 1.$$

Prueba que F es derivable en $(-1,1)$ y calcula $F(t)$ explícitamente.

2. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (z-1)^2 \leq x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z \geq 0\}$.

2.1 Calcula el volumen de M utilizando coordenadas esféricas y coordenadas cilíndricas.

2.2 Comprueba el teorema de Gauss en M, para el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 0, z-1)$.