UNIVERSIDAD
de SEVILLA

DEPARTAMENTO DE
ANÁLISIS MATEMÁTICO

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables

Prof. Dr. José A. Facenda Aguirre

Curso Académico 2002/03

PLAN DE LA ASIGNATURA

La asignatura Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables es una asignatura obligatoria del plan de estudios conducente a la obtención del título oficial de Licenciado en Matemáticas. De acuerdo con dicho plan, (publicado en el B.O.E de 14 de enero de 1998), tiene asignada una carga docente de 7.5 créditos, de los cuales 5 son teóricos y 2.5 prácticos. Así pues, le corresponden 75 horas lectivas, divididas en 50 teóricas y 25 prácticas.
La asignatura está dedicada a estudiar la integral de Lebesgue en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$*, su expresión como integrales iteradas mediante el teorema de Fubini, los cambios de variables en las integrales múltiples y las integrales de línea y superficie, probándose los teoremas clásicos de Green, Gauss y Stokes.*
Las clases teóricas tienen por objeto mostrar al alumno los resultados fundamentales de la materia, con sus demostraciones, y con ejemplos que faciliten su comprensión. Algunas pruebas se omiten o simplemente se indican, complementándose con bibliografía adecuada. Se insiste al alumno en la necesidad del estudio continuado y de una actitud crítica y activa ante lo que se le expone en estas clases.
En las clases prácticas se pretende que el alumno adquiera una comprensión más profunda de los conceptos teóricos, y aprenda a manejarlos y a aplicarlos, mediante la resolución de problemas y ejercicios. Se intenta que sean los propios alumnos quienes los resuelvan, para lo que se les hace entrega de hojas con los enunciados de los problemas. Los siguientes ejercicios, en fechas que se indicarán a lo largo del curso, deberán entregarse completamente resueltos:

Tema 1	*3*
Tema 2	*6, 13, 17, 27*
Tema 3	*5(e,i,j,p), 16, 21, 33*
Tema 4	*3(1,2), 21, 24, 26*

La resolución y explicación en clase de ciertos problemas puede ser valorada positivamente, reflejándose en la nota correspondiente, como se detalla más abajo.
Es necesario el aprendizaje del lenguaje matemático preciso adecuado, lenguaje que ha de ser empleado con propiedad y claridad. Los alumnos deben poseer la capacidad de expresarse con soltura.
La adecuada preparación de la asignatura aconseja la asistencia a clase, así como consultar las dudas fundamentales a los profesores encargados de impartirla. De acuerdo con las disposiciones vigentes, en el tablón de anuncios del Departamento de Análisis Matemático se publicará el horario de consultas o tutoría del profesorado. Se recomienda a los alumnos que hagan uso de tal horario, para aclarar aquellas dudas que les plantee el estudio de la asignatura, tanto en sus aspectos teóricos como prácticos, a lo largo del curso, procurando, en la medida de lo posible, no dejar las consultas para los últimos días anteriores a los exámenes.
Se insiste también en el respeto a tal horario. Para consultas fuera del mismo, los interesados deben ponerse en contacto con el profesor encargado, al efecto de concertar la cita correspondiente.

Régimen de exámenes y calificación. *A lo largo del curso se realizarán dos pruebas de carácter voluntario y dos exámenes finales. La primera prueba de carácter voluntario evaluará los conocimientos adquiridos de los dos primeros temas y la segunda los del tercero. Ambas se realizarán preferentemente en horario lectivo[1]. En la primera convocatoria*

[1] Estas dos pruebas se realizarán siempre y cuando lo permita la capacidad del aula

ordinaria la calificación se obtendrá añadiendo, si la puntuación obtenida en el ejercicio es al menos de 4 puntos, el 10 % de la obtenida en las pruebas voluntarias en las que también se haya alcanzado esa mínima puntuación, así como hasta 0.5 puntos por la resolución de problemas.
Queremos resaltar, para terminar, los siguientes puntos:

- *Para aprobar la asignatura será necesario obtener al menos 5 puntos y haber entregado los ejercicios propuestos a lo largo del curso.*
- *Los exámenes serán escritos, quedando determinado el espacio correspondiente a las respuestas de cada pregunta.*
- *Los exámenes podrán ser algunos de ellos, bien en su totalidad o en parte, de tipo test.*
- *Para superar las pruebas se requiere un conocimiento general de la asignatura, lo que significa que los exámenes descompensados o que manifiesten ignorancia de partes de lo que se pregunte, se considerarán insuficientes para superar el curso.*
- *Por acuerdo de Junta de Facultad, las clases se impartirán desde el 10 de febrero de 2003 hasta el 29 de mayo de 2003, y los exámenes finales se realizarán el martes 17 de junio de 2003 y el jueves 11 de septiembre de 2003.*

En la página web `http://www.pdipas.us.es/f/facenda/` *aparecerá, a lo largo del curso, información relacionada con la asignatura.*

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

1. Espacios medibles. Medida de Lebesgue. Espacios medibles. Medidas positivas. Medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Medida de Lebesgue.

2. Integral de Lebesgue. Integral de funciones simples. Funciones medibles. Integral de funciones medibles no negativas. Integral de funciones con signo arbitrario: Teoremas de convergencia. Integrales dependientes de un parámetro. Relación entre las integrales de Riemann y Lebesgue.

3. Integrales múltiples. Teorema de Fubini. Cambios de variables en una integral múltiple. Aplicaciones.

4. Integrales de línea y superficie. Integrales curvilíneas. Independencia del camino. Teorema de Green. Integrales de superficie. Teoremas de Stokes y Gauss. Aplicaciones.

BIBLIOGRAFÍA

El contenido de la asignatura se encuentra detalladamente desarrollado en el libro

Facenda Aguirre, J. A., Freniche Ibáñez, F. J. Integración de funciones de varias variables. Pirámide, 2002.

Este texto se seguirá a lo largo de todo el curso. Para bibliografía adicional, remitimos a la indicada en dicho manual. No obstante, damos a continuación una relación de libros única y exclusivamente de problemas:

Libros de problemas:

1. **Bombal, F., Rodríguez, L., Vera, G.** Problemas de Análisis Matemático (3 tomos). AC, Madrid 1987.
2. **Flory, G.** Ejercicios de Topología y Análisis (tomo 3). Reverté, Barcelona 1971.
3. **Genet, J.; Pupion, G.** Analyse Moderne. Vuibert, París 1971.
4. **George, C.** Exercices et problemes d'integration. Gauthier Villars, París 1988.
5. **Liashkó, I.I. y otros.** Matemática superior. Problemas resueltos (tomo 4). Editorial URSS, 1999.
6. **Spiegel, M.R.** Cálculo superior. Serie Schaum, McGraw-Hill 1969.
7. **Spiegel, M.R.** Variables reales. Serie Schaum, McGraw-Hill 1969.

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables

Los enunciados en letra cursiva corresponden a problemas propuestos en exámenes del curso académico 2001/02

Ejercicios del tema 1

1. Si X es un conjunto no numerable, la familia formada por los subconjuntos numerables o de complemento numerable, es una σ-álgebra.

2. Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son tales que $d(A,B) > 0$, prueba que $\mathfrak{m}^*(A \cup B) = \mathfrak{m}^*(A) + \mathfrak{m}^*(B)$.

3. Prueba que $Z \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue cero si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión (I_j) de intervalos tales que $Z \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_j) < \varepsilon$.

4. Sea A el conjunto de los puntos del intervalo $[0,1]$ en cuyo desarrollo decimal no aparece un dígito dado. Prueba que es medible y calcula su medida.

5. Sean $A \subset \mathbb{R}^k$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos medibles Lebesgue. Prueba que el conjunto producto cartesiano de ambos, $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+n}$ es medible Lebesgue.

Ejercicios del tema 2

1. En los siguientes apartados da un ejemplo de lo que se pide o, en caso contrario, indica la imposibilidad del mismo:

a) Una función $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua que no sea integrable Lebesgue en (a,b).

b) Dado $a > 0$, un subconjunto medible Lebesgue $A \subset \mathbb{R}$, de interior vacío tal que $\mathfrak{m}(A) = a$.

c) Dos funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iguales en casi todo $\mathbb{R}$ para la medida de Lebesgue, una integrable Lebesgue y la otra no.

d) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ medible Borel que no sea un intervalo, ni un conjunto abierto, ni cerrado, ni acotado.

e) Una sucesión (f_n) de funciones integrables Riemann en un intervalo, $f_n \to f$, f no integrable Riemannn pero sí Lebesgue.

f) Una sucesión de funciones integrables que converja en casi todo a una función que no sea integrable.

2. Calcula, mediante el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, dx.$$

3. Consideremos la sucesión $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\chi_{(\frac{1}{n},+\infty)}$, definida para $x > 0$. ¿Es f_n integrable en $(0,+\infty)$? ¿Puedes aplicar algún teorema de convergencia que garantice la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx?.$$

¿Está la sucesión (f_n) dominada por una función integrable en $(0,+\infty)$?

4. De las siguientes afirmaciones, demuestra las verdaderas y da un contraejemplo de las falsas:

a) Si f_n es la función característica del intervalo abierto $(n, n+1)$, entonces

$$\lim \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim f_n.$$

b) Si $f_n \longrightarrow f$ [unif] en un intervalo acotado $[a,b]$, f_n medible, entonces

$$\lim \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \lim f_n.$$

c) Si $f_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{-x/n}$, entonces $f_n \longrightarrow 0$ [unif] en $\mathbb{R}^+$ pero $\lim \int_{\mathbb{R}^+} f_n \neq \int_{\mathbb{R}^+} \lim f_n$.

5. Deduce razonadamente si a las siguientes sucesiones de funciones puede aplicárseles el TCD en los recintos indicados. En caso afirmativo, da una función dominante.

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[1/n,1]} + \sqrt{n}\chi_{(0,1/n)},\ 0 \le x \le 1,$$
$$g_n(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\chi_{[0,n]},\ x \ge 0,$$
$$h_n(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg}(nx^2)}{x^2},\ x \ge 0$$

6. *a*) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f_n(x) = n^\alpha$, si $0 \le x < 1/n$; $f_n(x) = 1/\sqrt{x}$ si $1/n \le x \le 1$, ¿para qué valores de α puedes aplicar a esta sucesión el teorema de la convergencia dominada?

b) Sea ahora $g_n(x) = n$, si $0 \le x < 1/n$; $g_n(x) = 0$ si $1/n \le x \le 1$. Prueba que si g es una función que domina a la sucesión (g_n), entonces g no es integrable en $[0,1]$.

7. *Sea* $a > 0$ *y* $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. *Calcula razonadamente* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}\frac{dx}{\varepsilon_n + x^{3/2}}$.

¿Qué sucede si $a = 0$ *y* $\varepsilon_n = \log\dfrac{n+1}{n}$*?*

8. Indica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Toda función simple es medible.

V F Toda función simple y medible es integrable.

V F Si $\mu(X) < \infty$, toda función $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ simple y medible es integrable.

V F Si $\mu(X) < \infty$, toda función $f \colon X \to \mathbb{R}$ medible es integrable.

V F Existen espacios de medida en los que toda función $f \colon X \to \mathbb{R}$ es integrable.

V F Toda función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua es medible Borel.

V F Si $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ son medibles, $\displaystyle\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

V F La función $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)}$ es integrable en $(a, +\infty)$, $\forall a > 0$.

V F La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}e^x}$ es integrable en $(0,1)$ y en $(1, +\infty)$.

V F Si f^+ es integrable, f también lo es.

---

9. En las ocho preguntas siguientes, señala la única respuesta verdadera existente entre las alternativas propuestas.

a) Sean $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ el espacio medible de Lebesgue y $A \subset \mathbb{R}^n$.

- **V** **F** A es medible.
- **V** **F** El interior y el cierre de A son medibles.
- **V** **F** Si A es un conjunto de Borel es abierto.
- **V** **F** Ninguna de las anteriores.

b) Sean $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mathfrak{m})$ el espacio de medida de Lebesgue y $A \in \mathcal{M}$.

- **V** **F** Si $\mathfrak{m}(A) < +\infty$, A es acotado.
- **V** **F** Si $B \subset A$, B también es medible.
- **V** **F** Si $\mathfrak{m}(A) = 0$, A es acotado.
- **V** **F** Ninguna de las anteriores.

c) Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f \colon X \to \mathbb{R}$.

- **V** **F** Si f es simple, es medible.
- **V** **F** Si f no es simple, no es medible.
- **V** **F** Si $f = \chi_A$ y A es medible, f es medible.
- **V** **F** Ninguna de las anteriores.

d) Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función medible.

- **V** **F** $\exists\ (\varphi_n)$ simples y medibles que converge a f.
- **V** **F** $\exists\ (\varphi_n)$ creciente, simples y medibles que converge a f.
- **V** **F** $\nexists\ (\varphi_n)$ simples y medibles que converge a f.
- **V** **F** Ninguna de las anteriores.

e) Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ el espacio medible de Lebesgue.

- **V** **F** Si $f = g$ en casi todo y f es continua, g es continua.
- **V** **F** Si $f = g$ en casi todo y f es medible, g es medible.
- **V** **F** Si $f = g$ en casi todo ambas son medibles.
- **V** **F** Ninguna de las anteriores.

f) Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función medible.

- **V** **F** La integral de f es finita.
- **V** **F** Si existe la integral de f es finita.
- **V** **F** La integral de f existe y es un elemento de $[0, +\infty]$.
- **V** **F** Ninguna de las anteriores.

g) Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to \mathbb{R}$.

- **V** **F** Si f es integrable, $|f|$ es integrable.
- **V** **F** Si f es integrable, las integrales de f y $|f|$ coinciden.
- **V** **F** Si $|f|$ es integrable, f es integrable.
- **V** **F** Ninguna de las anteriores.

h) Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n \to f$ una sucesión de funciones medibles.

- **V** **F** $\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim f_n \, d\mu$.
- **V** **F** Si (f_n) es creciente, $\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim f_n \, d\mu$.
- **V** **F** Si (f_n) es creciente y $f_1 \geq 0$, $\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim f_n \, d\mu$.
- **V** **F** Ninguna de las anteriores.

10. Sea $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{x^2}$, $x > 0$. Estudia la integrabilidad de las funciones f_n en $(0, +\infty)$.

¿Es cierta la igualdad $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$?

Si $a > 0$, ¿es cierta la igualdad $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$?

11. Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) = n/(n^2 + x^2)$, $x > 0$. ¿Es cierta la identidad

$$\int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\, dx?$$

¿Converge la sucesión (f_n) uniformemente en $(0, +\infty)$? ¿Y si integramos en un intervalo acotado $[0, a]$?

12. *Consideremos la sucesión de funciones* $f_n(x) = \arctan \dfrac{1}{nx}$*, definidas para* $x > 0$*. Justifica razonadamente si puede aplicársele alguno de los siguientes teoremas:*

TCU	*convergencia uniforme*	***TCA***	*convergencia acotada*
TCD	*convergencia dominada*	***TCM***	*convergencia monótona*

en los recintos indicados, siendo $0 < a < b < +\infty$*.*

	TCU	***TCA***	***TCD***	***TCM***
$[0, a]$				
$[a, b]$				
$[a, +\infty)$				
$[0, +\infty)$				

13. Consideremos la sucesión de funciones, definidas para $t > 0$ por

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt[n]{t}\left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n}$$

Prueba que si $n > 1$, $f_n \in \mathcal{L}^1\big((0, +\infty)\big)$. Calcula $\lim \displaystyle\int_{(0,+\infty)} f_n d\mathfrak{m}$.

14. Calcula razonadamente, en lo casos siguientes, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\mathfrak{m}$:

$$f_n(x) = \frac{1 + nx}{(1 + x)^n} \qquad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

$$f_n(x) = \frac{nx \log x}{1 + n^2x^2} \qquad f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x^2}$$

15. Sea $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ si x es racional, $f(x) = 1/a$ si a es el primer dígito no nulo en su representación decimal. Prueba que f es medible Lebesgue y calcula el valor de su integral.

16. Integra en $[0, 1]$ la serie $\displaystyle\sum_{n\geq} \frac{x}{n(x + n)}$ y deduce la existencia del límite

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right),$$

conocido como constante de Euler-Mascheroni.

17. Demuestra la igualdad

$$\int_0^1 x^{-x} \, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}.$$

18. Sea la función $f\colon (0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,\alpha)=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}\,e^{-x}$.

a) Prueba que para todo $\alpha\in\mathbb{R}$ la función $f_\alpha\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_\alpha(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}\,e^{-x}$ es integrable Lebesgue en $(0,+\infty)$.

b) Calcula $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}\,e^{-x}\,dx$.

19. *Consideremos la función* $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\,dx$. *¿Para qué valores de t está bien definida? Calcula razonadamente* $\lim_{t\to0^+}F(t)$ *y* $\lim_{t\to+\infty}F(t)$

20. Definamos $I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 xt}{xe^x}\,dx$, para cada $t\geq 0$.

a) Prueba que el valor de $I(t)$ está bien definido y es finito.

b) ¿Es la función I continua?

c) ¿Es la función I derivable?

d) Calcula el valor de $I(t)$ para cada $t\geq 0$.

21. *Sea* $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+x^2}\,dx$.

a) ¿Para qué valores de t está bien definida?

b) Prueba que es continua en su dominio de definición.

c) Prueba que es derivable para $t>0$.

d) ¿Es derivable en $t=0$*?*

22. Sea $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)}{x^2}\,dx$, $t>0$.

a) Prueba que F está bien definida.

b) Prueba que F es derivable. Calcula F'.

c) Calcula $\lim_{t\to+\infty}F(t)$.

d) Da una expresión explícita de $F(t)$.

23. *Consideremos la función* $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{t}\right)}{x(1+x)}\,dx$.

Prueba que está bien definida y que es derivable. Da una expresión explícita de F.

24. Consideremos la función

$$F(t)=\int_0^1\frac{\log(1-t^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad |t|<1.$$

Prueba que F es derivable en $(-1,1)$ y calcula $F(t)$ explícitamente.

25. Consideremos la función $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+t^2x^2)}{1+x^2}\,dx$

a) ¿Para qué valores de t está bien definida la función F?

b) Calcula, donde exista, $F'(t)$.

c) Deduce el valor de $F(t)$.

26. Demuestra razonadamente que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\frac{x}{t}}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1+t}{t}$, cualquiera que sea $t > 0$.

27. Consideremos la función

$$F(t) = \int_1^\infty \frac{1}{x}e^{-tx^2}\,dx.$$

Estudia para qué valores de t está bien definida. Calcula, donde exista, $F'(t)$. Calcula $\lim_{t\to+\infty} F(t)$ y $\lim_{t\to 0^+} F(t)$.

28. Prueba que la función

$$F(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x}\log\left(\frac{1+t\cos x}{1-t\cos x}\right)dx, \quad |t| < 1$$

está bien definida. Calcula su derivada y deduce el valor de $F(t)$.

29. Consideremos la función

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\log(1-t^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad |t| < 1.$$

Prueba que F es derivable en $(-1, 1)$ y calcula $F(t)$ explícitamente.

30. Sea $F(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}x^t\,dx, \quad t > -1.$

a) Prueba que está bien definida y que es derivable. Deduce que

$$F(t) = \log\frac{t+2}{t+1} + C$$

b) Considera ahora la función

$$G(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log x}\,dx, \quad t > 0$$

Prueba que es diferenciable, calcula el valor de la función G y deduce cuanto vale la constante C del apartado anterior.

Ejercicios del tema 3

1. Sea $f\colon (0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, y sea $g\colon (0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R}$ dada por $g(x,y)=\dfrac{-x^2}{\sqrt{y}}$. Estudia cual de estas funciones es integrable Lebesgue y cual no en su dominio de definición.

2. Indica la verdad o falsedad de las afirmaciones siguientes, para una función medible $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Las integrales iteradas de f son iguales.
- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si existen las integrales iteradas de f, son iguales.
- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si las integrales iteradas son iguales, f es integrable.
- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si f es integrable, las integrales iteradas son iguales.
- $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si f es no negativa, las integrales iteradas son iguales y f es integrable.

3. Consideremos las funciones

$$f(x,y)=ye^{-xy}\operatorname{sen}x,\ \ x>0,\ 0<y<1; \qquad g(x,y)=\operatorname{sig}(x-y)e^{-|x-y|},\ \ x,y>0.$$

($\operatorname{sig}(\cdot)$ es la función signo, $\operatorname{sig}(t)=1$ si $t>0$, $\operatorname{sig}(t)=-1$ si $t<0$, $\operatorname{sig}(0)=0$).
Estudia si son integrables en sus dominios de definición.

4. Si B es un conjunto de Borel, todas las secciones son medibles.

5. En las siguientes integrales iteradas invierte el orden de integración:

a) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_x^{\operatorname{arc\,sen}x} f(x,y)\,dy$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\log 2} dy\int_{e^{-2y}}^{e^y} f(x,y)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_x^{4-x} f(x,y)\,dy$ *d)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} dy\int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} dy\int_{\operatorname{arc\,sen}y}^{\arccos y} f(x,y)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{+\sqrt{4x-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$

g) $\displaystyle\int_1^2 dx\int_x^{x^2} f(x,y)\,dy$ *h)* $\displaystyle\int_0^2 dx\int_{x^2}^{4x-x^2} f(x,y)\,dy$

i) $\displaystyle\int_{1/e}^1 dy\int_{-\log y}^{\sqrt{-\log y}} f(x,y)\,dx$ *j)* $\displaystyle\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy$

k) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_1^{e^x} f(x,y)\,dy$ *l)* $\displaystyle\int_4^5 dx\int_{12x}^{3x^2} f(x,y)\,dy$

m) $\displaystyle\int_0^{\pi} dx\int_0^{\cos x} f(x,y)\,dy$ *n)* $\displaystyle\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$

ñ) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dx\int_{\operatorname{sen}x}^{3\operatorname{sen}x} f(x,y)\,dy$ *o)* $\displaystyle\int_0^{\pi} dx\int_{\operatorname{sen}x}^{3\operatorname{sen}x} f(x,y)\,dy$

$p)\quad \displaystyle\int_0^1 dy \int_{y^{2/3}}^{(2-y)^2} f(x,y)\,dx \qquad q)\quad \int_0^2 dx \int_{2x}^{x+2} f(x,y)\,dy$

$r)\quad \displaystyle\int_0^1 dy \int_{+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{3-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \qquad s)\quad \int_1^4 dx \int_{x^2-4x+3}^{x-1} f(x,y)\,dy$

$t)\quad \displaystyle\int_\pi^a dx \int_{\tan x}^{x} f(x,y)\,dy, \qquad u)\quad \int_0^{\log 6} dy \int_{(5-\sqrt{1+4e^y})/2}^{(5+\sqrt{1+4e^y})/2} f(x,y)\,dx.$

(Nota: En el apartado u), a es el único número real del intervalo $(\pi, 3\pi/2)$ tal que $\tan a = a$).

6. Sea $f\colon (-\infty,+\infty)\times(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^3}$.

a) Calcula las integrales iteradas de f en $(-\infty,+\infty)\times(1,+\infty)$.

b) ¿Es f integrable en $(-\infty,+\infty)\times(1,+\infty)$? En caso afirmativo, ¿cuál es el valor de su integral?

7. Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{x^4+y^2}$.

a) ¿Es f integrable en $\mathbb{R}^2$?

b) ¿Y en el conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ y\ge x^2\}$?

c) ¿Y en el conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ y\ge x^2+1\}$?

8. Un cuerpo está limitado por el cilindro $x^2+z^2=a^2$, y los planos $y=0$, $z=0$ e $y=x$. Calcula su volumen.

9. Sea $f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$. ¿Es integrable en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$? En caso afirmativo, calcula su integral. Deduce el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$.

10. Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$, definida para $x>0$ e $y>0$.

a) Prueba que f es integrable en su dominio de definición.

b) Deduce el valor de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx$.

11. Sea $f\colon (0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}(1-\arctan x)}{(1+x^2)(1+xy^2)}$. ¿Es integrable? En caso afirmativo, calcula el valor de su integral.

12. Sea $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ x^2+y^2<8az\}$, ($a>0$) y sea P el plano de ecuación $x+y+2z=8a$. Calcula el volumen del conjunto interceptado por P en S.

13. Calcula las siguientes integrales en los recintos indicados:

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz, \quad \iiint_B z\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint_C ze^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,dz, \qquad \iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 2az, \ x^2+y^2+z^2 \ge a^2, \ a > 0\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \le 1, \ x^2+y^2+z^2 \le 4\}$$
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2(x^2+y^2) \le z^2 \le x^2+y^2+1, \ z \ge 0\}$$
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2az \ge x^2+y^2, \ x^2+y^2+z^2 \le 3a^2\} \ (a > 0)$$

14. Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}, & \text{si } 0 < y < |x| < 1 \\ \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula las integrales iteradas de f. ¿Es f integrable en $\mathbb{R}^2$?

15. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Prueba que las integrales iteradas de f son nulas, cualquiera que sea $\alpha > 1$. ¿Para qué valores de $\alpha > 1$ es f integrable en el plano?

16. Sea $f(x,y) = (y - \sqrt{x})\log(y\sqrt{x})$, $x, y \in (0,1)$. Calcula las integrales iteradas de f. ¿Es integrable?

17. *Sea* $f(x,y) = \begin{cases} ye^{-y^2/x}, & \text{si } 0 < x < |y| \\ \dfrac{2y}{x^2(1+y^2)^2}, & \text{si } |y| < x \end{cases}.$

Prueba que f es integrable en el conjunto $A = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ y calcula el valor de la integral $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.

18. Consideremos la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}, \qquad (x,y) \in [0,+\infty) \times [1,\pi]$$

Prueba que es integrable en el recinto indicado y calcula el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\pi x) - \operatorname{arc\,tg} x}{x} dx$$

19. Sea $0 < \beta < \pi/2$ y consideremos la integral reiterada

$$\int_0^{\operatorname{sen}\beta} \left(\int_{y\operatorname{cotg}\beta}^{\sqrt{1-y^2}} \log(x^2+y^2)\,dx \right) dy.$$

Dibuja el recinto de integración. Mediante un cambio de variables adecuado, calcula esta integral reiterada. ¿Es integrable esta función? Invierte el orden de integración.

20. Consideremos el recinto del plano euclídeo determinado por las desigualdades $x^2+y^2 \leq 20$, $y \geq x+2$. Realiza el cambio a coordenadas polares, que denotamos por (r,t), y expresa su área como integrales iteradas de la forma indicada.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} r\, dr.$$

t_1	
t_2	
$\alpha_1(t)$	
$\alpha_2(t)$	

21. Mediante un cambio de variables lineal calcula

$$\iint_A (x+y)e^{x-2y}\, dx\, dy$$

siendo A el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

22. *Mediante el cambio de variables $u=2x+y$, $v=x-2y$ calcula el valor de la integral*

$$\iint_A (2x+y)^2(x-2y)e^{-(2x+y)^3}\, dx\, dy,$$

donde A es el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,-2)$, $(2,1)$ y $(3,-1)$.

23. Mediante el cambio de variables $s=x+y$, $t=y-x$, calcula la integral

$$\iint_A e^{-\,\text{máx}\{x+y,y-x\}}\, dx\, dy, \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y\geq |x|\}.$$

24. *Mediante el cambio de variables $u=e^x$, $v=y-x$, $w=x+z$, calcula la integral*

$$\iiint_A e^x e^{x-y}\log(x+z)\, dx\, dy,\, dz,$$

siendo $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<y-x<1,\ 2x<y,\ 0<x+z<1\}$.

25. *Describe los siguientes recintos usando coordenadas polares:*

$$\mathbf{A}=\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^2:\ \mathbf{y}\leq \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{3}},\ \mathbf{x}\geq \mathbf{0},\ \mathbf{y}\geq \mathbf{0}\right\}$$

$$\mathbf{B}=\left\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^2:\ \mathbf{y}\leq \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{3}},\ \mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2\leq \mathbf{9},\ \mathbf{x}\geq \mathbf{0},\ \mathbf{y}\geq \mathbf{0}\right\}$$

26. Calcula la medida de Lebesgue de los conjuntos siguientes:

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; |x| + |y| + |z| < 2, \; |x| < 1, \; |y| < 1\}$

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; |x| + |y| + |z| < 2, \; z^2 < y\}$

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 < z, \; z < x + b, \; b > 0\}$

d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 < 1, \; x^2 + y^2 < x\}$

e) Conjunto limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

f) Conjunto comprendido entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cono $z^2 \operatorname{sen}^2 b = (x^2 + y^2) \cos^2 b$, usando coordenadas esféricas y cartesianas.

g) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0, \; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1\right\}$.

27. Integra la función $f(x,y) = e^{-xy} \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0,a) \times (0,+\infty)$ para probar que

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \cos a \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\, dy - \operatorname{sen} a \int_0^\infty \frac{y e^{-ay}}{1+y^2}\, dy.$$

Deduce entonces que

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

28. *Demuestra que la función* $f(x,y) = e^{-y} \operatorname{sen}(2xy)$ *es integrable en el recinto* $[0,1] \times [0,+\infty)$. *Deduce que*

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\, dy = \frac{1}{4} \log 5.$$

29. *Consideremos el recinto* $\mathbf{A} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 : \; \mathbf{z^2 \le x^2 + y^2 \le 9z^2}, \; \mathbf{x^2 + y^2 + z^2 \le 16}\}$. *Escribe su volumen mediante integrales triples en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas*

30. Dada la integral iterada

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx,$$

realiza el cambio a coordenadas esféricas y cilíndricas.

31. Expresa el volumen de los conjuntos siguientes mediante una integral triple iterada, cambiando a las variables indicadas:

$$A \text{ (cartesianas)} \equiv \left[0 \le z \le y^2, y + z \le 2, 0 \le x \le 2, y \ge 0\right]$$

$$B \text{ (cilíndricas)} \equiv \left[z^2 \le x^2 + y^2 \le 2 - z \le 2\right]$$

$$C \text{ (esféricas)} \equiv \left[x^2 + y^2 + z^2 \le 2z \le 2\right]$$

32. Calcula el volumen del conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \le z \le x^2 + y^2 \le 1\}$, realizando el cambio a coordenadas cilíndricas, escribiendo las integrales en la forma

$$\int dt \int dr \int dz, \qquad \int dt \int dz \int dr.$$

33. Calcula el volumen de la región interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y exterior al cilindro $4(x^2 + y^2) = 1$, usando coordenadas esféricas.

34. Calcula el volumen del sólido en el primer octante que está limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano XY.

35. Designemos por $v_n(a)$ la medida de Lebesgue de la bola euclídea de $\mathbb{R}^n$ de radio $a > 0$.

a) Prueba que $v_n(a) = a^n v_n(1)$.

b) Supuesto $n \ge 3$, prueba que

$$v_n(1) = v_{n-2}(1) \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{n}{2} - 1} r\, dr = \frac{2\pi}{n} v_{n-2}(1).$$

c) Deduce que $v_n(a) = \dfrac{a^n \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$.

36. Consideremos el recinto del espacio euclídeo determinado por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$, $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Cambia las coordenadas a esféricas, que denotamos (r, s, t), y expresa el volumen de tal recinto como integrales iteradas de la forma

$$\int_{s_1}^{s_2} ds \int_{r_1(s)}^{r_2(s)} dr \int_{t_1(r,s)}^{t_2(r,s)} r^2 \cos t\, dt + \int_{s_3}^{s_4} ds \int_{r_3(s)}^{r_4(s)} dr \int_{t_3(r,s)}^{t_4(r,s)} r^2 \cos t\, dt.$$

s_1		s_3	
s_2		s_4	
$r_1(s)$		$r_3(s)$	
$r_2(s)$		$r_4(s)$	
$t_1(r,s)$		$t_3(r,s)$	
$t_2(r,s)$		$t_4(r,s)$	

Ejercicios del tema 4

1. Calcula la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ entre los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1/2, 1/2)$,

a) A lo largo del segmento de recta que los une.

b) A lo largo del arco de curva $x = t$, $y = t^2/2$, $z = t^4/2$.

Prueba que existe función potencial y calcúlala.

2. Calcula las siguientes integrales de línea:

a) Del campo $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, x, y)$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + z = 1$, precisando el sentido de recorrido.

b) Del campo $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, 0, 0)$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = Rx$, situada en el primer octante, tomando como inicio el punto con $z = 0$.

3. Calcula la función potencial, si existe, de los siguientes campos:

a) $\mathbf{f}_1(x, y) = (\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy))$.

b) $\mathbf{f}_2(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$.

c) $\mathbf{f}_3(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2)$.

4. Calcula, mediante el teorema de Green, la integral doble

$$\iint_A \frac{2ay - x^2 - y^2}{y}\, dx\, dy,$$

siendo A el recinto limitado por el arco de curva $x^2 + y^2 = 2ay$, $0 \le y \le a$ y el segmento $y = a$, $|x| \le a$.

5. Consideremos el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (6xy\cos z, 3x^2\cos z, -3x^2y\operatorname{sen} z)$. ¿Es conservativo? En caso afirmativo, calcula su potencial. Si $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, 0)$, $0 \le t \le \pi/2$, ¿cuánto vale la integral de línea del campo $\mathbf{f}$ a lo largo de la curva descrita por $\mathbf{r}$?

6. Calcula las siguientes áreas:

a) Superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ incluida en el cono $x^2 + 2z^2 = y^2$, situada en el primer octante.

b) Superficie esférica de centro $(0, 0, a)$ y radio a contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

c) Del cono $x^2 = y^2 + z^2$ que está dentro del cilindro elíptico $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

d) De la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ay$ limitada por la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $a > 0$.

e) Del elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$.

f) De la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ situada en el interior del cono $ax^2 + by^2 = z^2$; $a, b, c > 0$.

g) De la superficie del cono $x^2 + y^2 = 4z^2$ limitada por $x^2 + y^2 = 4x$.

h) Del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ limitada por $z = 0$ y $x^2 + y^2 = z^2$.

i) De la esfera de centro $(a, 0, 0)$ y radio a comprendida en una hoja del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

7. Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto. Se corta la esfera por dos planos perpendiculares al eje del cilindro. Demuestra que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre ambos planos tienen igual área.

8. Calcula el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que cae dentro del cilindro elíptico $a^2x^2 + y^2 = a^2$, ($a \in (0, 1)$). ¿Qué sucede si $a \geq 1$?

9. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + z^2 \leq 1, \; y + z \leq 2, \; x, y, z \geq 0\}$.

a) Escribe la integral triple que da el volumen de M iterada de tres formas distintas.

b) Si $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$, comprueba el teorema de Gauss en el recinto M orientado al exterior.

10. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq z^2, \; z \geq 0\}$.

a) Expresa el volumen de M usando coordenadas esféricas y cilíndricas. Calcula el volumen.

b) Calcula el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ contenida en M.

11. Sean el sólido $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \; 3(z + 1) \leq 2(x^2 + y^2), \; z \geq -1\}$ y el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, 0, z)$. Comprueba el teorema de Gauss.

12. Dadas la superficie $z = y + 2$ que está contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, xz, y)$, comprueba el teorema de Stokes.

13. Consideremos el recinto M en $\mathbb{R}^3$ determinado por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + 4z^2 \geq 4$, $z \geq 0$. Calcula su volumen. Dado el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, comprueba el teorema de Gauss en dicho recinto.

14. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; (z - 1)^2 \leq x^2 + y^2, \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; z \geq 0\}$.

a) Calcula el volumen de M utilizando coordenadas esféricas y coordenadas cilíndricas.

b) Comprueba el teorema de Gauss en M, para el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 0, z - 1)$.

15. Consideremos el sólido $M \subset \mathbb{R}^3$ determinado por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 4 - z$, $z + 2y \leq 4$, $z \geq 0$.

a) Expresa el volumen de M mediante integrales iteradas de la forma

$$\iint dx\, dy \int dz, \qquad \iint dy\, dz \int dx \qquad \iint dx\, dz \int dy.$$

Usando la primera expresión, calcula el volumen de M.

b) Comprueba el resultado del apartado anterior aplicando el teorema de Gauss en el recinto M al campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,-1,2)$.

16. Consideremos el recinto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 4, \ 0 \le z \le y + 3\}$$

a) Proyecta el recinto en los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Escribe su volumen como integrales iteradas de la forma

$$\int dx \int dy \int dz, \quad \int dy \int dz \int dx, \quad \int dx \int dz \int dy$$

Mediante un cambio de variables adecuado en la primera de ellas, calcula el volumen de M.

b) Si S es la superficie $x^2 + y^2 \le 4$, $z = y + 3$, calcula el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,0,-z)$ a través de S, orientada de modo que el vector normal es $(0,1,-1)$ mediante los teoremas de Gauss y Stokes.

17. Sea T un sólido en $\mathbb{R}^3$ cuyo volumen es igual a

$$\iiint_T dx\,dy\,dz = \int_0^3 dx \int_x^{6-x} dy \int_0^{2x} dz.$$

a) Expresa la integral iterada que da el volumen de T como

$$\int dz \int dx \int dy, \quad \int dx \int dz \int dy, \quad \int dz \int dy \int dx$$

b) Si $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,2y,3z)$, comprueba el teorema de Gauss en el sólido T.

18. *Sea* $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}, \ z \le 1\}$ *y sea el campo vectorial* $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,-y,1)$.

a) Comprueba el teorema de Gauss para el campo $\mathbf{f}$ *en* M.

b) Determina un campo $\mathbf{G} = (G_1,0,G_3)$ *tal que su rotacional sea* $\mathbf{f}$. *Comprueba el teorema de Stokes para el campo* $\mathbf{G}$ *en la superficie* $M \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1\}$.

19. Sea M la región limitada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$.

a) Expresa el volumen de M mediante las integrales triples indicadas abajo,

$$\int dy \int dx \int dz, \quad \int dz \int dx \int dy, \quad \int dz \int dy \int dx$$

b) Calcula la circulación del campo $\mathbf{f}(x,y,z) = (-2y,2x,-2x)$ a lo largo de la curva $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 1 - y$, orientada de modo que el vector tangente en el punto $(0,0,1)$ tenga su primera coordenada negativa.

20. *Consideremos la superficie del plano $z = y + 2$ contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Calcula su área. Dado el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, xz, y)$, comprueba el teorema de Stokes en dicha superficie.*

21. Si M es el sólido determinado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x + z = 6$, $z = 0$, calcula, mediante el teorema de Gauss, el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + \operatorname{sen} z, xy + \cos z, e^y)$ a través de la frontera de M, orientada de modo que el vector normal apunte al exterior de M.

22. Consideremos el sólido $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 - z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z, \ z \geq 0\}$. Calcula el volumen de M:

a) Directamente, evaluando mediante un cambio de variables adecuado la integral triple correspondiente.

b) Aplicando el teorema de Gauss al campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, 0)$.

23. *Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \ z \leq 1\}$ y sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, -y, 1)$.*

a) Comprueba el teorema de Gauss para el campo $\mathbf{f}$ en M.

b) Determina un campo $\mathbf{G} = (G_1, 0, G_3)$ tal que su rotacional sea $\mathbf{f}$. Comprueba el teorema de Stokes para el campo $\mathbf{G}$ en la superficie $M \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1\}$.

24. Consideremos la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Sea A el conjunto de puntos interiores a la esfera y exteriores al cilindro.

a) Escribe la integral triple que da el volumen de A usando coordenadas esféricas y cilíndricas.

b) Calcula el volumen de A, evaluando las integrales del apartado anterior.

c) Comprueba el resultado del apartado anterior mediante el teorema de Gauss aplicado al campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$.

25. *Consideremos la integral triple*

$$\int_0^2 dx \int_{2x}^4 dy \int_0^{\sqrt{y^2 - 4x^2}} dz.$$

a) Identifica el recinto de integración. Escribe la integral triple en las formas

$$\int dx \int dz \int dy, \qquad \int dy \int dz \int dx.$$

b) Calcula el volumen del recinto anterior.

c) Comprueba el teorema de Gauss en ese recinto para el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$.

26. Sea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq a, \ 0 \leq z \leq y^2\}$, siendo $a > 0$ constante.

a) Escribe la integral triple que da el volumen de A en las formas

$$\int dx \int dy \int dz, \quad \int dx \int dz \int dy, \quad \int dz \int dy \int dx.$$

b) Si M es la parte de la frontera de A incluida en el cilindro $z = y^2$, calcula su área.

c) Comprueba el teorema de Stokes si $\mathbf{f}(x,y,z) = (\cos y + y\cos x, \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y, xyz)$ y M es la superficie del apartado anterior.

27. *Consideremos el sólido $M \subset \mathbb{R}^3$ determinado por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 2 - z$, $z \geq 0$, $|y| \leq x$.*

a) Expresa el volumen de M mediante integrales triples en coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas.

b) Calcula el volumen de M.

c) Utiliza el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $\mathbf{f}(x,y,z) = (-y, x, 2z)$ a través de la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 2 - z, \; z \geq 0, \; |y| \leq x\}$, orientada de tal forma que la tercera componente del vector normal sea positiva.

d) Calcula la integral de línea del campo anterior en el borde de S con la orientación inducida.