UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables
Grupo A ■ 30 de marzo de 2006

Apellidos:______________________________ **Nombre:**________________

1. Define, con precisión y claridad, los siguientes conceptos:

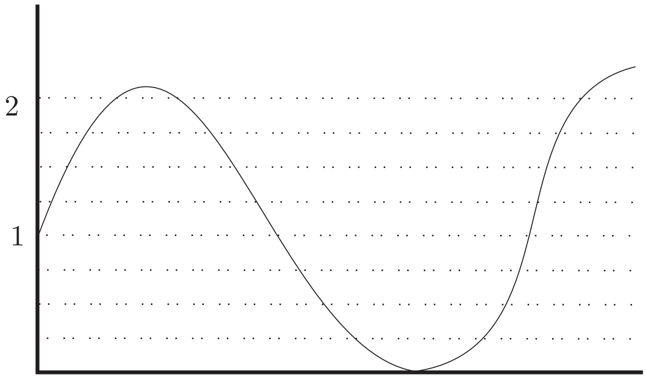
Intervalo en $\mathbb{R}^n$
Volumen de un intervalo
Intervalo diádico
Medida exterior de Lebesgue
Conjunto medible Lebesgue

2. De las siguientes afirmaciones, demuestra las verdaderas y da un contraejemplo de las falsas:

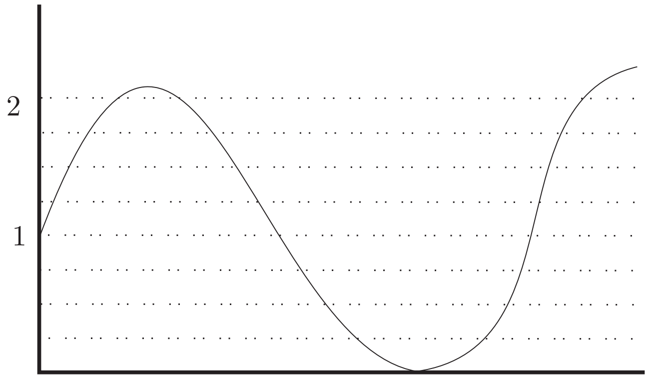
Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son integrables entonces $f \cdot g$ también es integrable
Si $f = g$ e.c.t. $\mathbb{R}$ y f es medible, g es medible
Si $f = g$ e.c.t. $\mathbb{R}$ y f es continua, g es continua
Si $f = g$ e.c.t. $\mathbb{R}$ y f es integrable, g es integrable
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $\lvert f\rvert$ también es medible
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\lvert f\rvert$ es medible, entonces f también es medible. (Indicación: sea $E \subset [0,1]$ el conjunto de Vitali y $f = \boldsymbol{\chi}_E - \boldsymbol{\chi}_{[0,1]\setminus E}$. Entonces f no es medible pero $\lvert f\rvert$ sí es medible)

3. Sea f_n la función de la figura adjunta. ¿Cuál es el límite puntual de la sucesión (f_n)? ¿Converge la sucesión uniformemente en $\mathbb{R}$? Calcula razonadamente $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$. ¿Puedes aplicar el teorema de la convergencia monótona o el de la dominada?

4. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función medible. Es conocido que existe una sucesión creciente (φ_n) de funciones simples, medibles, no negativas, que convergen a f en todo X. ¿Cómo se define esa sucesión? Prueba que, efectivamente, cualquiera que sea $x \in X$, es $\varphi_n(x) \to f(x)$.
En las gráficas indicadas abajo, dibuja las dos primeras funciones de la sucesión (φ_n).



Gráfica de φ_1



Gráfica de φ_2

5. Sea $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}}\, dx$. Prueba que F está bien está bien definida y es continua en $(0, +\infty)$. ¿Es F derivable en $(0, +\infty)$? Calcula razonadamente $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t)$ y $\lim\limits_{t\to +\infty} F(t)$.

Firma: