Departamento de
Análisis Matemático

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables

Prof. Dr. José A. Facenda Aguirre
Curso Académico 2005/06

PLAN DE LA ASIGNATURA

La asignatura Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables es una asignatura obligatoria del plan de estudios conducente a la obtención del título oficial de Licenciado en Matemáticas. De acuerdo con dicho plan, (publicado en el B.O.E de 14 de enero de 1998), tiene asignada una carga docente de 7.5 créditos, de los cuales 5 son teóricos y 2.5 prácticos. Así pues, le corresponden 75 horas lectivas, entre teóricas, prácticas y exámenes.
La asignatura está dedicada a estudiar la integral de Lebesgue en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, su expresión como integrales iteradas mediante el teorema de Fubini, los cambios de variables en las integrales múltiples y las integrales de línea y superficie, probándose los teoremas clásicos de Green, Gauss y Stokes.

Metodología *Las clases teóricas tienen por objeto mostrar al alumno los resultados fundamentales de la materia, con sus demostraciones, y con ejemplos que faciliten su comprensión. Algunas pruebas se omiten o simplemente se indican, complementándose con bibliografía adecuada. Se insiste al alumno en la necesidad del estudio continuado y de una actitud crítica y activa ante lo que se le expone en estas clases.*
En las clases prácticas se pretende que el alumno adquiera una comprensión más profunda de los conceptos teóricos, y aprenda a manejarlos y a aplicarlos, mediante la resolución de problemas y ejercicios. Se intenta que sean los propios alumnos quienes los resuelvan, para lo que se les hace entrega de hojas con los enunciados de los problemas.
Es necesario el aprendizaje del lenguaje matemático preciso adecuado, lenguaje que ha de ser empleado con propiedad y claridad. Los alumnos deben poseer la capacidad de expresarse con soltura.
La adecuada preparación de la asignatura aconseja la asistencia a clase, así como consultar las dudas fundamentales a los profesores encargados de impartirla. De acuerdo con las disposiciones vigentes, en el tablón de anuncios del Departamento de Análisis Matemático se publicará el horario de consultas o tutoría del profesorado[1]*. Se recomienda a los alumnos que hagan uso de tal horario, para aclarar aquellas dudas que les plantee el estudio de la asignatura, tanto en sus aspectos teóricos como prácticos, a lo largo del curso, procurando, en la medida de lo posible, no dejar las consultas para los últimos días anteriores a los exámenes.*

Evaluación y calificación *Se realizarán dos exámenes finales ordinarios, que de acuerdo con las fechas fijadas por la Junta de Centro, serán los días 7 de junio de 2006 y 18 de septiembre de 2006. Los exámenes serán escritos, estando determinados tanto el espacio para las respuestas como la duración de la prueba, y en ellos se evaluarán los conocimientos y capacidades adquiridos por los alumnos. Se exigirá el desarrollo o resolución de cuestiones teóricas y prácticas. Es preciso mostrar un conocimiento del conjunto de la asignatura, de tal modo que los exámenes muy descompensados o que demuestren un gran desconocimiento de partes fundamentales de la materia serán considerados insuficientes.*
Se realizarán a lo sumo tres pruebas voluntarias de carácter teórico práctico. A lo largo del curso, y con suficiente antelación, se anunciará la materia correspondiente a estas pruebas. Cada una se valorará sobre 10 puntos. Los alumnos que obtengan al menos 5 puntos en cada una de éstas, aprobarán la asignatura por curso con la calificación media obtenida en ellas. El resto deberá presentarse a examen final de la asignatura, que se valorará sobre 10 puntos. La calificación final en los exámenes ordinarios se obtendrá añadiendo a la nota obtenida en este examen el 10 % de las notas de las pruebas anteriores en las que se haya obtenido al menos 5 puntos. Para aprobar la asignatura la calificación final deberá ser mayor o igual que 5 puntos.

Web *En la página web* `http://www.personal.us.es/facenda/` *aparecerá, a lo largo del curso, información relacionada con la asignatura.*

[1] Prof. José A. Facenda Aguirre: martes de 9:00 a 11:00, miércoles y jueves de 17:00 a 19:00.

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

1. **Espacios medibles. Medida de Lebesgue.** *Espacios medibles y medidas positivas. Medida exterior de Lebesgue. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Estructura de los conjuntos medibles Lebesgue. Regularidad. Invariancia por isometrías de la medida de Lebesgue.*

2. **Integral de Lebesgue.** *Funciones simples. Funciones medibles. Integral de funciones medibles no negativas. Integral de funciones medibles. Conjuntos de medida nula e integración. Teoremas de convergencia. Integrales dependientes de un parámetro. Integrales de Lebesgue de funciones de una variable real.*

3. **Integrales múltiples.** *Teorema de Fubini: integración reiterada. Cambios de variables en una integral múltiple. Aplicaciones.*

4. **Integrales curvilíneas y superficie.** *Integrales curvilíneas. Independencia del camino. Teorema de Green. Integrales de superficie. Teorema de Stokes. Teorema de Gauss. Aplicaciones.*

BIBLIOGRAFÍA

El contenido de la asignatura se encuentra detalladamente desarrollado en el libro

Facenda Aguirre, J. A., Freniche Ibáñez, F. J. *Integración de funciones de varias variables. Pirámide, 2002.*

Este texto se seguirá a lo largo de todo el curso. Para bibliografía adicional, remitimos a la indicada en dicho manual. No obstante, damos a continuación una relación de libros única y exclusivamente de problemas:

Libros de problemas:

1. ***Bombal, F., Rodríguez, L., Vera, G.*** *Problemas de Análisis Matemático (3 tomos). AC, Madrid 1987.*

2. ***Flory, G.*** *Ejercicios de Topología y Análisis (tomo 3). Reverté, Barcelona 1971.*

3. ***Genet, J.; Pupion, G.*** *Analyse Moderne. Vuibert, París 1971.*

4. ***George, C.*** *Exercices et problemes d'integration. Gauthier Villars, París 1988.*

5. ***Liashkó, I.I. y otros.*** *Matemática superior. Problemas resueltos (tomo 4). Editorial URSS, 1999.*

6. ***Spiegel, M.R.*** *Cálculo superior. Serie Schaum, McGraw-Hill 1969.*

7. ***Spiegel, M.R.*** *Variables reales. Serie Schaum, McGraw-Hill 1969.*

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables

Los enunciados en letra cursiva corresponden a problemas propuestos en exámenes del curso académico 2004/05

Ejercicios del tema 1

1. Si X es un conjunto no numerable, la familia formada por los subconjuntos numerables o de complemento numerable, es una σ-álgebra.

2. Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son tales que $d(A,B) > 0$, prueba que $\mathfrak{m}^*(A \cup B) = \mathfrak{m}^*(A) + \mathfrak{m}^*(B)$.

3. Prueba que $Z \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue cero si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión (I_j) de intervalos tales que $Z \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_j) < \varepsilon$.

4. Sea A el conjunto de los puntos del intervalo $[0,1]$ en cuyo desarrollo decimal no aparece un dígito dado. Prueba que es medible y calcula su medida.

5. Sean $A \subset \mathbb{R}^k$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos medibles Lebesgue. Prueba que el conjunto producto cartesiano de ambos, $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+n}$ es medible Lebesgue.

6. *Define los siguientes conceptos:*

Conjunto de Borel	
$\mathscr{F}_\sigma$*-conjunto*	
$\mathscr{G}_\delta$*-conjunto*	

Ejercicios del tema 2

1. En los siguientes apartados da un ejemplo de lo que se pide o, en caso contrario, indica la imposibilidad del mismo:

1. Una función $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua que no sea integrable Lebesgue en (a,b).
2. Dado $a > 0$, un subconjunto medible Lebesgue $A \subset \mathbb{R}$, de interior vacío tal que $\mathfrak{m}(A) = a$.
3. Dos funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iguales en casi todo $\mathbb{R}$ para la medida de Lebesgue, una integrable Lebesgue y la otra no.

4. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ medible Borel que no sea un intervalo, ni un conjunto abierto, ni cerrado, ni acotado.
5. Una sucesión (f_n) de funciones integrables Riemann en un intervalo, $f_n \to f$, f no integrable Riemannn pero sí Lebesgue.
6. Una sucesión de funciones integrables que converja en casi todo a una función que no sea integrable.

2. Consideremos la sucesión $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \chi_{(\frac{1}{n},+\infty)}$, definida para $x > 0$. ¿Es f_n integrable en $(0,+\infty)$? ¿Puedes aplicar algún teorema de convergencia que garantice la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx?.$$

¿Está la sucesión (f_n) dominada por una función integrable en $(0,+\infty)$?

3. Deduce razonadamente si a las siguientes sucesiones de funciones puede aplicárseles el TCD en los recintos indicados. En caso afirmativo, da una función dominante.

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[1/n,1]} + \sqrt{n}\chi_{(0,1/n)},\ 0 \le x \le 1,\\
g_n(x) &= \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\chi_{[0,n]},\ x \ge 0,\\
h_n(x) &= \frac{\operatorname{arc\,tg}(nx^2)}{x^2},\ x \ge 0
\end{aligned}$$

4. Responde las siguientes cuestiones:

1. Sea $E \subset [0,1]$ el conjunto de Vitali y sea $f(x) = e^x\chi_E - e^x\chi_{E^c}$. ¿Qué conjunto es $[f > 0]$? ¿Es f medible? ¿$[f = a]$ es medible?, $\forall a \in \mathbb{R}$.
2. Sea $(X,\mathcal{M})$ un espacio medible y $f\colon X \to \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones, ¿son verdaderas o falsas?

   2.1 Si f es una función medible implica $[f = a] \in \mathcal{M}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

   2.2 $[f = a] \in \mathcal{M}$, para todo $a \in \mathbb{R}$ implica f es una función medible.

5. Sea $a > 0$ y $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Calcula razonadamente $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{\varepsilon_n + x^{3/2}}$.

¿Qué sucede si $a = 0$ y $\varepsilon_n = \log \dfrac{n+1}{n}$?

6. Calcula, si $a \ge 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx$. ¿Puedes aplicar el teorema de la convergencia dominada si $a > 0$? ¿Y si $a = 0$?

7. Indica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Toda función simple es medible.

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Toda función simple y medible es integrable.

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\mu(X) < \infty$, toda función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ simple y medible es integrable.

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si $\mu(X) < \infty$, toda función $f\colon X \to \mathbb{R}$ medible es integrable.

V F Existen espacios de medida en los que toda función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es integrable.

V F Toda función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua es medible Borel.

V F Si $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ son medibles, $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

V F La función $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)}$ es integrable en $(a, +\infty)$, $\forall a > 0$.

V F La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}e^x}$ es integrable en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$.

V F Si f^+ es integrable, f también lo es.

8. En las ocho preguntas siguientes, señala la única respuesta verdadera existente entre las alternativas propuestas.

1. Sean $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ el espacio medible de Lebesgue y $A \subset \mathbb{R}^n$.

   V **F** A es medible.

   V **F** El interior y el cierre de A son medibles.

   V **F** Si A es un conjunto de Borel es abierto.

   V **F** Ninguna de las anteriores.

2. Sean $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mathfrak{m})$ el espacio de medida de Lebesgue y $A \in \mathcal{M}$.

   V **F** Si $\mathfrak{m}(A) < +\infty$, A es acotado.

   V **F** Si $B \subset A$, B también es medible.

   V **F** Si $\mathfrak{m}(A) = 0$, A es acotado.

   V **F** Ninguna de las anteriores.

3. Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f\colon X \to \mathbb{R}$.

   V **F** Si f es simple, es medible.

   V **F** Si f no es simple, no es medible.

   V **F** Si $f = \chi_A$ y A es medible, f es medible.

   V **F** Ninguna de las anteriores.

4. Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función medible.

   V **F** $\exists\ (\varphi_n)$ simples y medibles que converge a f.

   V **F** $\exists\ (\varphi_n)$ creciente, simples y medibles que converge a f.

   V **F** $\nexists\ (\varphi_n)$ simples y medibles que converge a f.

   V **F** Ninguna de las anteriores.

5. Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$ el espacio medible de Lebesgue.

   V **F** Si $f = g$ en casi todo y f es continua, g es continua.

   V **F** Si $f = g$ en casi todo y f es medible, g es medible.

   V **F** Si $f = g$ en casi todo ambas son medibles.

   V **F** Ninguna de las anteriores.

6. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f\colon X \to [0, +\infty]$ una función medible.

   V **F** La integral de f es finita.

V **F** Si existe la integral de f es finita.
V **F** La integral de f existe y es un elemento de $[0,+\infty]$.
V **F** Ninguna de las anteriores.

7. Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida y $f\colon X\to\mathbb{R}$.

V **F** Si f es integrable, $|f|$ es integrable.
V **F** Si f es integrable, las integrales de f y $|f|$ coinciden.
V **F** Si $|f|$ es integrable, f es integrable.
V **F** Ninguna de las anteriores.

8. Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida y $f_n\to f$ una sucesión de funciones medibles.

V **F** $\lim \int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim f_n\,d\mu$.
V **F** Si (f_n) es creciente, $\lim \int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim f_n\,d\mu$.
V **F** Si (f_n) es creciente y $f_1\geq 0$, $\lim \int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim f_n\,d\mu$.
V **F** Ninguna de las anteriores.

9. Sea $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{x^2}$, $x>0$. Estudia la integrabilidad de las funciones f_n en $(0,+\infty)$.

¿Es cierta la igualdad $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$?

Si $a>0$, ¿es cierta la igualdad $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx=\int_a^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$?

10. *De las siguientes afirmaciones, demuestra las verdaderas y da un contraejemplo de las falsas:*

1. *Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es integrable Lebesgue y A y B son medibles, $A\subset B$, entonces $\int_A f\leq\int_B f$*
2. *Si $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son integrables Lebesgue y $f\leq g$, entonces $\int_{\mathbb{R}} f\leq\int_{\mathbb{R}} g$*
3. *Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces $\int \liminf f_n\,d\mu=\liminf\int f_n\,d\mu$.*
4. *Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es medible Lebesgue y $\mathfrak{m}(A)<+\infty$, entonces f es integrable en A*
5. *Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es medible Lebesgue y está acotada en A medible, entonces f es integrable en A*
6. *Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es integrable en A, entonces $\mathfrak{m}(A)<+\infty$*

11. *Calcula* ***razonadamente*** *los límites siguientes:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)}{x}ne^{-x}\,dx,\qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x(1+nx)}{(2+nx)(1+x^2)}\,dx$$

12. Sea $f_n(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-nx^2}}{x^2}$, $n\geq 1$.

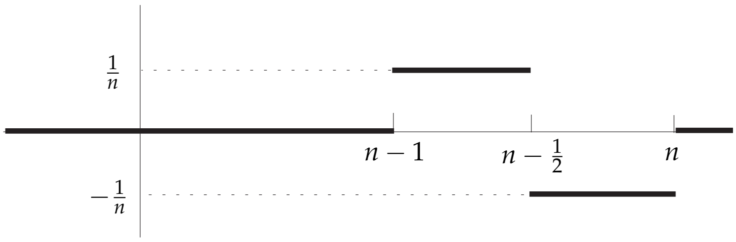
1. Demuestra que f_n es integrable en $(0,+\infty)$.
2. Demuestra que si $a>0$, es $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx=\frac{1}{a}$.
3. Demuestra que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx=+\infty$.

13. *Sea $f_n=-\chi_{(n,+\infty)}$. ¿Es creciente la sucesión de funciones (f_n)? ¿Converge puntualmente? ¿Se verifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$? Comenta en relación con el teorema de la convergencia monótona.*

14. Señala la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

V	F	Todo intervalo de $\mathbb{R}^n$ es medible Lebesgue
V	F	Si $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo, $\mathrm{vol}(I) = \mathfrak{m}(I)$
V	F	Si $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo, $\mathrm{vol}(I) = \mathfrak{m}^*(I)$
V	F	Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto no vacío, $\mathfrak{m}(A) > 0$
V	F	Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado no vacío, $\mathfrak{m}(A) > 0$
V	F	Todo conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ tiene medida finita.
V	F	Todo conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$, de medida finita, es compacto.
V	F	Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es medible Lebesgue y $f(x,y) = (x-y, 2x+3y)$, $f(A)$ es medible Lebesgue.
V	F	Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene interior no vacío, $\mathfrak{m}(A) > 0$.
V	F	Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene interior no vacío, $\mathfrak{m}^*(A) > 0$.
V	F	Toda función continua $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ es medible Lebesgue.
V	F	Toda función continua $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue.
V	F	Toda función continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue.
V	F	Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son medibles Lebesgue, fg es medible Lebesgue.
V	F	Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son tales que fg es medible Lebesgue, f y g son medibles Lebesgue.
V	F	La función $(\log x)/x$ es integrable Lebesgue en el intervalo $(0,1)$.
V	F	La función $x/(\log x)$ es integrable Lebesgue en el intervalo $(0,1)$.
V	F	Si $f_n(x) = nx/(n^2+x^2)$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$.
V	F	La función $x^{18} e^{-\sqrt[36]{x}}$ no es integrable Lebesgue en $(0,+\infty)$.
V	F	La sucesión $n\chi_{[0,1/n]}$ está dominada por una función integrable Lebesgue en $[0,1]$.

15. *Sea f_n la función de la figura adjunta. ¿Cuál es el límite puntual de esta sucesión? Calcula razonadamente $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$. ¿Puedes aplicar el teorema de la convergencia dominada?*



16. Consideremos la función $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx$. ¿Para qué valores de t está bien definida? Calcula razonadamente $\lim_{t\to 0^+} F(t)$ y $\lim_{t\to+\infty} F(t)$

17. Sea $f(x,t) = \dfrac{x+t}{x^3+t}$, y sea $F(t) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx$. Prueba que F está bien definida y es continua en el intervalo $(0,+\infty)$.

18. Sea $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+x^2}\,dx$.

1. ¿Para qué valores de t está bien definida?
2. Prueba que es continua en su dominio de definición.
3. Prueba que es derivable para $t > 0$.
4. ¿Es derivable en $t = 0$?

19. Sea $f(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

1. ¿Para qué valores $t \in \mathbb{R}$ está definida $f(t)$?
2. Estudia la continuidad de f en su dominio de definición.
3. Calcula razonadamente $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ y $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t)$.
4. Estudia la derivabilidad de f. ¿Es derivable en $t = 0$?

20. *Sea* $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{t+x^2}\,dx$. *Prueba que F está bien está bien definida y es continua en $(0,+\infty)$. Calcula razonadamente* $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} F(t)$ *y* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t)$.

21. Consideremos la función $F(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+tx^2)}{x^4}\,dx$, $t \in [0,+\infty)$.

1. Prueba que está bien definida y en continua en $[0,+\infty)$. Calcula $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t)$.
2. Demuestra que F es derivable en su dominio de definición.
3. Calcula F' y deduce una expresión de F.

22. *Sea $a > 0$ fijo. Definamos* $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-ax}}{x}\,dx$, $t > 0$.

1. *Prueba que F está bien definida.*
2. *Prueba que F es derivable.*
3. *Obtén una expresión explícita de F.*

23. *Sea* $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(xt)}{xe^x}\,dx$.

1. *Prueba que F está bien definida.*
2. *¿Es F derivable?*
3. *Obtén una expresión explícita de F.*

24. *Sea* $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+tx)}{1+x^2}\,dx$, $t \geq 0$. *Prueba que F está bien definida. Demuestra que F es derivable en $(0,+\infty)$. Calcula una expresión explícita de F'. ¿Es F derivable en el origen?*

25. Consideremos la función $F(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi - 2\arctan(xt)}{2x^2}\,dx$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Prueba que F está bien definida y es continua en $\mathbb{R}$.
2. Supongamos que $t > 0$. Demuestra que F es derivable en t. Calcula $F'(t)$. Deduce una expresión de $F(t)$.
3. ¿Es F derivable en $t = 0$?

26. Consideremos la función $F(t) = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\arctan(xt)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Prueba que está bien definida.
2. Demuestra que F es derivable para todo $t \neq 0$.

3. Deduce que $F(t) = \dfrac{\pi}{4} \log \dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}$.

27. Sea $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)}{x^2}\, dx$, $t > 0$.

1. Prueba que F está bien definida.
2. Prueba que F es derivable. Calcula F'.
3. Calcula $\lim_{t\to+\infty} F(t)$.
4. Da una expresión explícita de $F(t)$.

28. Sea $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{t+x^2} dx$.

1. Prueba que F está bien definida para todo $t > 0$.
2. Prueba que F es continua para todo $t > 0$.
3. Prueba que F es derivable para todo $t > 0$.

29. Consideremos la función $F(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(1+t^2x^2)}{1+x^2}\, dx$

1. ¿Para qué valores de t está bien definida la función F?
2. Calcula, donde exista, $F'(t)$.
3. Deduce el valor de $F(t)$.

30. Demuestra razonadamente que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{x}{t}}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1+t}{t}$, para $t > 0$.

31. Consideremos la función $F(t) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x} e^{-tx^2}\, dx$. Estudia para qué valores de t está bien definida. Calcula, donde exista, $F'(t)$. Calcula $\lim_{t\to+\infty} F(t)$ y $\lim_{t\to 0^+} F(t)$.

32. Prueba que la función

$$F(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x} \log\left(\frac{1+t\cos x}{1-t\cos x}\right) dx, \quad |t| < 1$$

está bien definida. Calcula su derivada y deduce el valor de $F(t)$.

33. Consideremos la función

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\log(1-t^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad |t| < 1.$$

Prueba que F es derivable en $(-1,1)$ y calcula $F(t)$ explícitamente.

Ejercicios del tema 3

1. Sea $f\colon (0,1)\times(0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, y sea $g\colon (0,1)\times(0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = \dfrac{-x^2}{\sqrt{y}}$. Estudia cual de estas funciones es integrable Lebesgue y cual no en su dominio de definición.

2. Indica la verdad o falsedad de las afirmaciones siguientes, para una función medible $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Las integrales iteradas de f son iguales.
$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si existen las integrales iteradas de f, son iguales.
$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si las integrales iteradas son iguales, f es integrable.
$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si f es integrable, las integrales iteradas son iguales.
$\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Si f es no negativa, las integrales iteradas son iguales y f es integrable.

3. En las siguientes integrales iteradas invierte el orden de integración:

$a)$ $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{\operatorname{arc\,sen} x} f(x,y)\,dy$ $\qquad b)$ $\displaystyle\int_0^{\log 2} dy \int_{e^{-2y}}^{e^y} f(x,y)\,dx$

$c)$ $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{4-x} f(x,y)\,dy$ $\qquad d)$ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$

$e)$ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_{\operatorname{arc\,sen} y}^{\arccos y} f(x,y)\,dx$ $\qquad f)$ $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{+\sqrt{4x-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$

$g)$ $\displaystyle\int_1^2 dx \int_x^{x^2} f(x,y)\,dy$ $\qquad h)$ $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{x^2}^{4x-x^2} f(x,y)\,dy$

$i)$ $\displaystyle\int_{1/e}^1 dy \int_{-\log y}^{\sqrt{-\log y}} f(x,y)\,dx$ $\qquad j)$ $\displaystyle\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy$

$k)$ $\displaystyle\int_0^1 dx \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy$ $\qquad l)$ $\displaystyle\int_4^5 dx \int_{12x}^{3x^2} f(x,y)\,dy$

$m)$ $\displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)\,dy$ $\qquad n)$ $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$

$ñ)$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dx \int_{\operatorname{sen} x}^{3\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy$ $\qquad o)$ $\displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_{\operatorname{sen} x}^{3\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy$

$p)$ $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{y^{2/3}}^{(2-y)^2} f(x,y)\,dx$ $\qquad q)$ $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{2x}^{x+2} f(x,y)\,dy$

$r)$ $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{3-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$ $\qquad s)$ $\displaystyle\int_1^4 dx \int_{x^2-4x+3}^{x-1} f(x,y)\,dy$

$t)$ $\displaystyle\int_{\pi}^{a} dx \int_{\tan x}^{x} f(x,y)\,dy,$ $\qquad u)$ $\displaystyle\int_0^{\log 6} dy \int_{(5-\sqrt{1+4e^y})/2}^{(5+\sqrt{1+4e^y})/2} f(x,y)\,dx$

$v)$ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{\tan x}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy$ $\qquad w)$ $\displaystyle\int_0^{101} dx \int_{x+1}^{2x+2} f(x,y)\,dy$

(Nota: En el apartado u), a es el único número real del intervalo $(\pi, 3\pi/2)$ tal que $\tan a = a$).

4. Sea $f(x,y) = x\mathsf{E}[1+x+y]$, donde $\mathsf{E}[x]$ denota la parte entera de x. Prueba que f es integrable en $[0,1]\times[0,1]$ y calcula el valor de su integral.

5. Consideremos las funciones

$$f(x,y) = ye^{-xy}\operatorname{sen} x,\ \ x>0,\ 0<y<1; \qquad g(x,y) = \operatorname{sig}(x-y)e^{-|x-y|},\ \ x,y>0.$$

($\operatorname{sig}(\cdot)$ es la función signo, $\operatorname{sig}(t)=1$ si $t>0$, $\operatorname{sig}(t)=-1$ si $t<0$, $\operatorname{sig}(0)=0$).

Estudia si son integrables en sus dominios de definición.

6. Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{x^4 + y^2}$.

1. ¿Es f integrable en $\mathbb{R}^2$?
2. ¿Y en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \geq x^2\}$?
3. ¿Y en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \geq x^2 + 1\}$?

7. Sea $f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$. ¿Es integrable en $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$? En caso afirmativo, calcula su integral. Deduce el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$.

8. Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2y + y^3}$. Estudia la integrabilidad de f en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \geq |x|\}$. ¿Es integrable en $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y \geq |x| \geq a > 0\}$?

9. Sea $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$, definida para $x > 0$ e $y > 0$.

1. Prueba que f es integrable en su dominio de definición.
2. Deduce el valor de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1}\, dx$.

10. Sean $0 < a < b$ fijos. Estudia la integrabilidad de la función $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$ en los siguientes recintos, calculando la integral cuando sea posible:

$$A = \{(x,y) \colon\ a \leq |x| \leq b,\ |y| \leq b\} \qquad B = \{(x,y) \colon\ |x| \leq a,\ |y| \leq b\}$$
$$C = \{(x,y) \colon\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} \qquad D = \{(x,y) \colon\ x \geq 1,\ -\sqrt[4]{x} \leq y \leq \sqrt[3]{x}\}$$

11. *Sea* $f \colon (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y^2}y^3}{x^3}, & \text{si } |y| < x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Prueba que f *es integrable en* $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ *y calcula razonadamente* $\displaystyle\iint_{(0,+\infty)\times\mathbb{R}} f(x,y)\, dxdy$.

12. *Consideremos la función* $f \colon (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } y < x < 1 \\ -\dfrac{1}{y^2}, & \text{si } x < y < 1 \end{cases}$$

Calcula las integrales iteradas de f. *¿Es* f *integrable? ¿Cuánto vale* $\displaystyle\iint_{(0,1)\times(0,1)} f(x,y)\, dxdy$*? ¿Y* $\displaystyle\iint_{(0,1)\times(0,1)} |f(x,y)|\, dxdy$*? Razona tus respuestas.*

13. *Sea* $f(x,y) = \begin{cases} +1, & \text{si } 0 \leq x - y \leq 1 \\ -1, & \text{si } 0 \leq y - x \leq 1. \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

1. *Calcula las integrales iteradas de* f.

2. *Calcula* $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dxdy$.
3. *¿Es f integrable en $\mathbb{R}^2$? ¿Existe alguna contradicción con el Teorema de Fubini?*

14. Describe en coordenadas polares el recinto: $1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1 \leq y \leq \sqrt{3}\,x + 1$.

15. Mediante el cambio a coordenadas polares calcula el área comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 2x$ y $x^2 + y^2 = 4x$ y las rectas $y = x$ e $y = 0$.

16. *Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ tal que su volumen se calcula mediante la integral iterada:*

$$\mathfrak{m}(A) = \int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^{+\sqrt{1-y^2}} dz.$$

Rellena los límites de integración en las integrales siguientes, en las que se ha cambiado el orden de integración:

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dz \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dy \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dx; \qquad \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dx \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dz \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} dy$$

Describe el conjunto A y calcula su volumen.

17. *Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\; x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$. Consideremos la integral triple*

$$\iiint_A z\,dxdydz.$$

Realiza en ella el cambio a coordenadas cilíndricas, para escribirla en la forma:

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} d\theta \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} d\rho \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \rho z\,dz,$$

así como el cambio a coordenadas esféricas, para escribirla en la forma:

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} d\theta \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} d\varphi \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \rho^3 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\,d\rho +$$

$$\int_{\boxed{}}^{\boxed{}} d\theta \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} d\varphi \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \rho^3 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\,d\rho$$

Explica a continuación cómo has obtenido los límites de integración que has indicado antes y calcula, usando el cambio a coordenadas cilíndricas, la integral pedida.

18. *Sea $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal tal que el determinante de la matriz asociada a φ respecto de la base canónica en $\mathbb{R}^n$ es cero. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue. ¿cuánto vale la medida del transformado $\varphi(A)$?*

19. Sea $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

1. Calcula $\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} f^+(x,y)\,dx\,dy$.
2. Mediante el cambio de variables $\varphi(x,y) = (-x,-y)$, prueba que
$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} f^-(x,y)\,dx\,dy = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} f^+(x,y)\,dx\,dy.$$
3. ¿Es f integrable en $[-1,1]\times[-1,1]$? ¿Cuál es el valor de $\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} |f(x,y)|\,dx\,dy$? ¿Y el de $\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} f(x,y)\,dx\,dy$?

20. Sea $f(x,y) = \begin{cases} ye^{-y^2/x}, & \text{si } 0 < x < |y| \\ \dfrac{2y}{x^2(1+y^2)^2}, & \text{si } |y| < x \end{cases}$.

Prueba que f es integrable en el conjunto $A = (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ y calcula el valor de la integral $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$.

21. Consideremos la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}, \qquad (x,y) \in [0,+\infty)\times[1,\pi]$$

Prueba que es integrable en el recinto indicado y calcula el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\pi x) - \operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$$

22. Dados los recintos y los cambios de variables indicados, rellena los límites de integración:

(Polares) Recinto $\mathbf{0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1}$

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} \rho\,d\rho + \int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} \rho\,d\rho =$$

$$\int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho\,d\theta + \int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho\,d\theta$$

(Cilíndricas) Recinto $\mathbf{x^2+y^2 \le z^2,\ \ x^2+y^2 \le 2-z \le 2}$.

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} dz \int_{\square}^{\square} \rho\,d\rho + \int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} dz \int_{\square}^{\square} \rho\,d\rho =$$

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho\,dz$$

(Esféricas) Recinto $\mathbf{x^2+y^2+z^2 \leq 1}$, $\mathbf{x^2+y^2+z^2 \leq 2z}$.

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\varphi \int_{\square}^{\square} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho + \int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\varphi \int_{\square}^{\square} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho =$$

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho^2 \cos\varphi \, d\varphi$$

23. Dados los recintos y los cambios de variables indicados, rellena los límites de integración:

(Cilíndricas) Recinto $\mathbf{x^2+y^2 \leq 2az}$, $\mathbf{x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2}$, $(\mathbf{a > 0})$

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho \, dz =$$

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} dz \int_{\square}^{\square} \rho \, d\rho + \int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} dz \int_{\square}^{\square} \rho \, d\rho$$

(Cilíndricas) Recinto $\mathbf{x^2+y^2+z^2 \leq 4}$, $\mathbf{z \leq 1}$.

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} dz \int_{\square}^{\square} \rho \, d\rho =$$

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho \, dz + \int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho \, dz$$

(Esféricas) Recinto $\mathbf{x^2+y^2+z^2 \leq 4}$, $\mathbf{z \leq 1}$.

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\varphi \int_{\square}^{\square} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho + \int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\varphi \int_{\square}^{\square} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho =$$

$$\int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho^2 \cos\varphi \, d\varphi + \int_{\square}^{\square} d\theta \int_{\square}^{\square} d\rho \int_{\square}^{\square} \rho^2 \cos\varphi \, d\varphi$$

24. Mediante el cambio de variables $s = x+y$, $t = y-x$, calcula la integral

$$\iint_A e^{-\max\{x+y, y-x\}} \, dx \, dy, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq |x|\}.$$

25. Mediante el cambio de variables $u = e^x$, $v = y - x$, $w = x + z$, calcula la integral

$$\iiint_A e^x e^{x-y} \log(x+z)\, dx\, dy,\, dz,$$

siendo $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\; 0 < y - x < 1,\; 2x < y,\; 0 < x + z < 1\}$.

26. Describe los siguientes recintos usando coordenadas polares:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\; y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3},\; x \geq 0,\; y \geq 0\right\}$$

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\; y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3},\; x^2 + y^2 \leq 9,\; x \geq 0,\; y \geq 0\right\}$$

27. Integra la función $f(x,y) = e^{-xy} \operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0,a) \times (0,+\infty)$ para probar que

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \cos a \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\, dy - \operatorname{sen} a \int_0^\infty \frac{y e^{-ay}}{1+y^2}\, dy.$$

Deduce entonces que

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

28. Demuestra que la función $f(x,y) = e^{-y} \operatorname{sen}(2xy)$ es integrable en el recinto $[0,1] \times [0,+\infty)$. Deduce que

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y}\, dy = \frac{1}{4} \log 5.$$

29. Expresa el volumen de los conjuntos siguientes mediante una integral triple iterada, cambiando a las variables indicadas:

$$A \text{ (cartesianas)} \equiv \left[0 \leq z \leq y^2, y + z \leq 2, 0 \leq x \leq 2, y \geq 0\right]$$

$$B \text{ (cilíndricas)} \equiv \left[z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2 - z \leq 2\right]$$

$$C \text{ (esféricas)} \equiv \left[x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \leq 2\right]$$

30. Sean $f_n : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas por $f_n(x,y) = \dfrac{n^2(y-x)}{(2 + nx^2 + ny^2)^2}$.

1. Comprueba que

$$\int\int_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} f_n^+(x,y)\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{n}.$$

2. Mediante el cambio de variables $\phi(x,y) = (y,x)$ comprueba que

$$\int\int_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} f_n^+(x,y)\, dx\, dy = \int\int_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} f_n^-(x,y)\, dx\, dy.$$

3. ¿Cuál es el valor de $\int\int_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} f_n(x,y)\, dx\, dy$? ¿Y de $\int\int_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} |f_n(x,y)|\, dx\, dy$?
4. Utilizando el apartado anterior y un teorema de convergencia, prueba que la función $g(x,y) = \dfrac{|y-x|}{(x^2+y^2)^2}$ no es integrable en $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

Ejercicios del tema 4

1. Calcula la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ entre los puntos $(0,0,0)$ y $(1,1/2,1/2)$,

1. A lo largo del segmento de recta que los une.
2. A lo largo del arco de curva $x = t$, $y = t^2/2$, $z = t^4/2$.

Prueba que existe función potencial y calcúlala.

2. Calcula las siguientes integrales de línea:

1. Del campo $\mathbf{f}(x,y,z) = (z,x,y)$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + z = 1$, precisando el sentido de recorrido.
2. Del campo $\mathbf{f}(x,y,z) = (z,0,0)$ a lo largo de la curva $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = Rx$, situada en el primer octante, tomando como inicio el punto con $z = 0$.

3. Calcula la función potencial, si existe, de los siguientes campos:

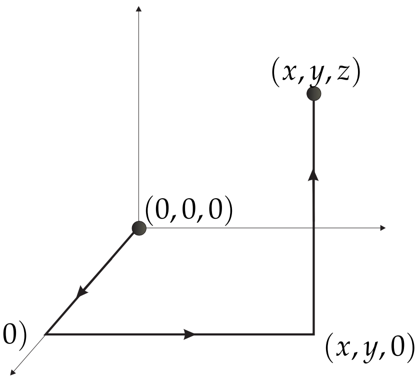
1. $\mathbf{f}_1(x,y) = (\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy))$.
2. $\mathbf{f}_2(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y)$.
3. $\mathbf{f}_3(x,y,z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2)$.

4. Consideremos el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (6xy\cos z, 3x^2\cos z, -3x^2y\operatorname{sen} z)$. ¿Es conservativo? En caso afirmativo, calcula su potencial. Si $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, 0)$, $0 \le t \le \pi/2$, ¿cuánto vale la integral de línea del campo $\mathbf{f}$ a lo largo de la curva descrita por $\mathbf{r}$?

5. *Prueba que el campo vectorial*

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \left(\operatorname{arc\,tg} y + \frac{z}{1+x^2}, \operatorname{arc\,tg} z + \frac{x}{1+y^2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{y}{1+z^2}\right)$$

es conservativo en $\mathbb{R}^3$. Calcula la función potencial integrando a lo largo del camino indicado en la figura.



6. *Determina razonadamente el valor de a para que el campo $\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{y^2}{x}, ay\log x\right)$ sea conservativo en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$. Para este valor de a calcula el valor de la integral curvilínea de $\mathbf{f}$ en la curva $y = \sqrt[4]{1+x^5}$, $1 \le x \le e$.*

7. Calcula las siguientes áreas:

1. Superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ incluida en el cono $x^2 + 2z^2 = y^2$, situada en el primer octante.

2. Superficie esférica de centro $(0,0,a)$ y radio a contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$.
3. Del cono $x^2 = y^2 + z^2$ que está dentro del cilindro elíptico $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
4. De la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ay$ limitada por la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio $a > 0$.
5. Del elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$.
6. De la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ situada en el interior del cono $ax^2 + by^2 = z^2$; $a,b,c > 0$.
7. De la superficie del cono $x^2 + y^2 = 4z^2$ limitada por $x^2 + y^2 = 4x$.
8. Del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ limitada por $z = 0$ y $x^2 + y^2 = z^2$.
9. De la esfera de centro $(a,0,0)$ y radio a comprendida en una hoja del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

8. Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto. Se corta la esfera por dos planos perpendiculares al eje del cilindro. Demuestra que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre ambos planos tienen igual área.

9. Calcula el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que cae dentro del cilindro elíptico $a^2x^2 + y^2 = a^2$, ($a \in (0,1)$). ¿Qué sucede si $a \geq 1$?

10. Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + z^2 \leq 1,\ y + z \leq 2,\ x,y,z \geq 0\}$.

1. Escribe la integral triple que da el volumen de M iterada de tres formas distintas.
2. Si $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z)$, comprueba el teorema de Gauss en el recinto M orientado al exterior.

11. Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}$.

1. Expresa el volumen de M usando coordenadas esféricas y cilíndricas. Calcula el volumen.
2. Calcula el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ contenida en M.

12. Sean el sólido $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ 3(z+1) \leq 2(x^2 + y^2),\ z \geq -1\}$ y el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,0,z)$. Comprueba el teorema de Gauss.

13. Consideremos el recinto M en $\mathbb{R}^3$ determinado por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 + 4z^2 \geq 4$, $z \geq 0$. Calcula su volumen. Dado el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, comprueba el teorema de Gauss en dicho recinto.

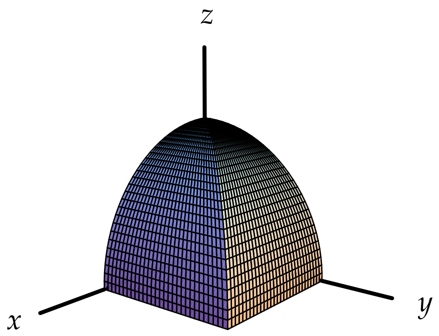
14. Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ (z-1)^2 \leq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$.

1. Calcula el volumen de M utilizando coordenadas esféricas y coordenadas cilíndricas.
2. Comprueba el teorema de Gauss en M, para el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (y, 0, z-1)$.

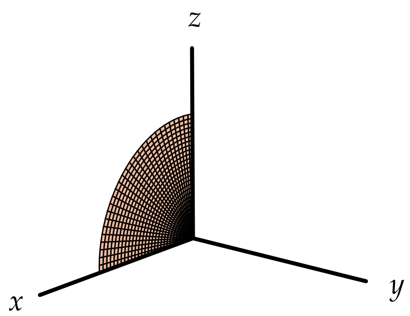
15. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el sólido determinado por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 4 - z$, $z + 2y \leq 4$, $z \geq 0$.

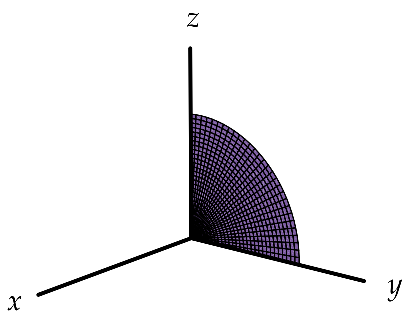
1. Expresa el volumen de M mediante integrales iteradas de la forma
$$\iint dx\,dy \int dz, \qquad \iint dy\,dz \int dx \qquad \iint dx\,dz \int dy.$$
Usando la primera expresión, calcula el volumen de M.
2. Comprueba el resultado del apartado anterior aplicando el teorema de Gauss en el recinto M al campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, -1, 2)$.

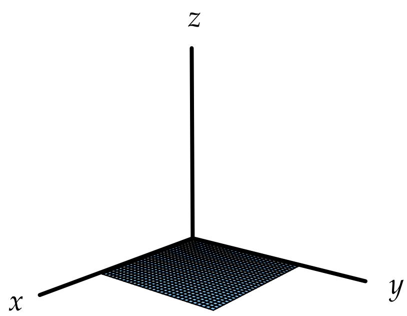
16. *La figura adjunta corresponde al volumen encerrado por los cilindros $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante. Sea M tal volumen. Se pide:*

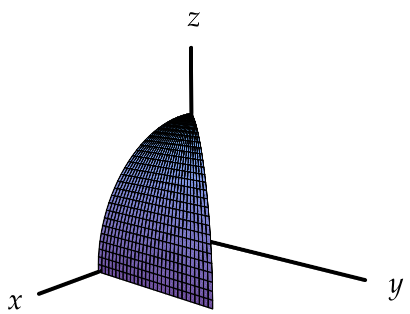


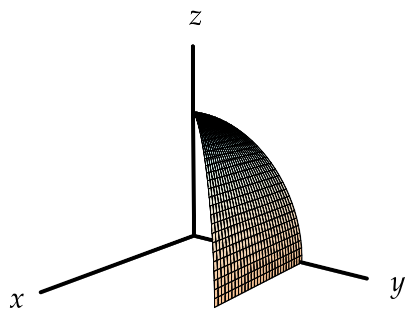
1. *Escribe las ecuaciones cartesianas que definen el recinto M.*
2. *Más abajo, aparecen las gráficas de la frontera de M. Indica al lado de cada gráfica las ecuaciones cartesianas que la describen, así como una parametrización de la misma. Calcula el vector normal de la parametrización e indica en la figura adjunta qué sentido tiene.*
3. *Calcula el área de la frontera de M que está contenida en el cilindro $x^2 + z^2 = 1$.*
4. *Mediante el teorema de Gauss aplicado al campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z)$, calcula el volumen de M.*
5. *Sin efectuar ninguna integral, calcula cuánto vale la circulación del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (0, -x^2/2, yz)$ a lo largo de la frontera del área del apartado tercero, recorrida de modo que el vector normal lo dejemos siempre al mismo lado.*











17. Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ \frac{1}{4}(x^2+y^2) \le z \le \sqrt{x^2+y^2},\ z \le 1\}$ y sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, -y, 1)$.

1. Comprueba el teorema de Gauss para el campo $\mathbf{f}$ en M.
2. Determina un campo $\mathbf{G} = (G_1, 0, G_3)$ tal que su rotacional sea $\mathbf{f}$. Comprueba el teorema de Stokes para el campo $\mathbf{G}$ en la superficie $M \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z = 1\}$.

18. Sea M la región limitada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$.

a) Expresa el volumen de M mediante las integrales triples indicadas abajo,

$$\int dy \int dx \int dz, \quad \int dz \int dx \int dy, \quad \int dz \int dy \int dx$$

b) Calcula la circulación del campo $\mathbf{f}(x,y,z) = (-2y, 2x, -2x)$ a lo largo de la curva $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 1 - y$, orientada de modo que el vector tangente en el punto $(0,0,1)$ tenga su primera coordenada negativa.

19. Consideremos la superficie del plano $z = y + 2$ contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Calcula su área. Dado el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (y, xz, y)$, comprueba el teorema de Stokes en dicha superficie.

20. Consideremos el sólido $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 - z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z, \ z \geq 0\}$. Calcula el volumen de M:

1. Directamente, evaluando mediante un cambio de variables adecuado la integral triple correspondiente.
2. Aplicando el teorema de Gauss al campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,0)$.

21. Consideremos la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Sea A el conjunto de puntos interiores a la esfera y exteriores al cilindro.

1. Escribe la integral triple que da el volumen de A usando coordenadas esféricas y cilíndricas.
2. Calcula el volumen de A, evaluando las integrales del apartado anterior.
3. Comprueba el resultado del apartado anterior mediante el teorema de Gauss aplicado al campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z)$.

22. Consideremos la integral triple

$$\int_0^2 dx \int_{2x}^4 dy \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz.$$

1. Identifica el recinto de integración. Escribe la integral triple en las formas

$$\int dx \int dz \int dy, \qquad \int dy \int dz \int dx.$$

2. Calcula el volumen del recinto anterior.
3. Comprueba el teorema de Gauss en ese recinto para el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,z)$.

23. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq a, \ 0 \leq z \leq y^2\}$, siendo $a > 0$ constante.

1. Escribe la integral triple que da el volumen de A en las formas

$$\int dx \int dy \int dz, \quad \int dx \int dz \int dy, \quad \int dz \int dy \int dx.$$

2. Si M es la parte de la frontera de A incluida en el cilindro $z = y^2$, calcula su área.
3. Comprueba el teorema de Stokes si $\mathbf{f}(x,y,z) = (\cos y + y\cos x, \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y, xyz)$ y M es la superficie del apartado anterior.

24. Consideremos el sólido $M \subset \mathbb{R}^3$ determinado por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 2 - z$, $z \geq 0$, $|y| \leq x$.

1. Expresa el volumen de M mediante integrales triples en coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas.

2. Calcula el volumen de M.
3. Utiliza el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $\mathbf{f}(x,y,z) = (-y,x,2z)$ a través de la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2 = 2-z,\ z \geq 0,\ |y| \leq x\}$, orientada de tal forma que la tercera componente del vector normal sea positiva.
4. Calcula la integral de línea del campo anterior en el borde de S con la orientación inducida.

25. Consideremos las superficies

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ z = x+y,\ x^2+y^2 \leq z\};\ B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ z \leq x+y,\ x^2+y^2 = z\}.$$

1. Parametriza ambas superficies y calcula el área de A.
2. Comprueba el teorema de Gauss en el recinto encerrado por A y B y el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,2y,3z)$.

26. Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ |z| \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

1. Expresa el volumen de M mediante integrales iteradas utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas.
2. Calcula el volumen de M utilizando la expresión en coordenadas cilíndricas.
3. Calcula el área de la porción de superficie esférica contenida en M.
4. Utiliza el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $\mathbf{f}(x,y,z) = (y,x,0)$ a través de la superficie S del apartado anterior, orientada al exterior de M.
5. Si $\mathbf{g}$ es un campo vectorial tal que $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{g}$, (es decir, $\mathbf{f}$ es el rotacional del campo $\mathbf{g}$), deduce razonadamente el valor de la integral de línea de $\mathbf{g}$ a lo largo de la curva ∂S, indicando el sentido de recorrido.

27. Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2 \leq 2y,\ -\sqrt{3}y \leq z \leq y+1,\ x \geq 0\}, \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2 = 2y,\ -\sqrt{3}y \leq z \leq y+1,\ x \geq 0\}. \end{aligned}$$

1. Calcula el volumen del conjunto A y el área de la superficie B.
2. Si $\mathbf{f}(x,y,z) = (0,0,y)$, comprueba el teorema de Stokes en la superficie B.

28. Sea $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ 0 \leq z \leq y \leq \dfrac{3}{2},\ x^2+y^2 \leq 2y\right\}$.

1. Calcula el volumen de M.
2. Usa el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,-2z)$ a través de la superficie $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ z = y \leq \dfrac{3}{2},\ x^2+y^2 \leq 2y\right\}$, orientada de modo que la tercera componente del vector normal a la superficie sea negativa.
3. Encuentra un campo vectorial $\mathbf{g}$ tal que su rotacional sea $\mathbf{f}$. Mediante el teorema de Stokes, comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior.

29. Consideremos el volumen $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ x,z \geq 0\}$, la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2 = 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ x,z \geq 0\}$ y el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x,y,-2z)$.

1. Calcula el volumen de M integrando por secciones paralelas a un eje.
2. Describe la frontera de M. Parametrízala.

3. Describe la frontera de S. Parametrízala.
4. Calcula el flujo del campo $\mathbf{f}$ a través de la superficie S,
   4.1. Mediante el teorema de Stokes, buscando un campo $\mathbf{g} = (g_1, g_2, 0)$ tal que su rotacional sea $\mathbf{f}$.
   4.2. Mediante el teorema de Gauss.

30. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 \leq y + 1, \ y \leq 1, \ z \geq 0\}$.

1. Calcula las proyecciones de A sobre los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.
2. Calcula el volumen de A.

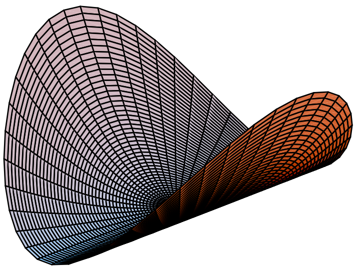
Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + z^2 = y + 1, \ y \leq 1, \ z \geq 0\}$ orientada hacia el exterior de A.

3. Calcula el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (z, z, 1/2)$ a través de S directamente.
4. Comprueba el resultado del apartado anterior usando el teorema de Gauss.

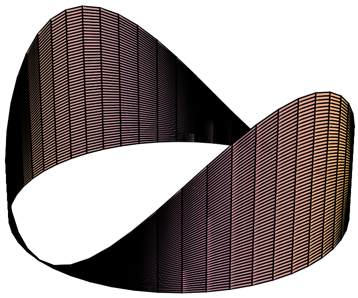
31. *Sean las superficies A y B definidas como:*

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = y^2\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq y^2\}.$$

1. *Parametriza la superficie A y calcula el vector normal.*
2. *Calcula el área de la superficie B.*
3. *Calcula, mediante el teorema de Gauss, el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, y, -2z)$ a través de la superficie A, orientada de modo que la tercera componente del vector normal sea positiva.*
4. *Comprueba el resultado del apartado anterior buscando un campo vectorial $\mathbf{g} = (A, B, 0)$ tal que $\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{f}$ y aplicando el teorema de Stokes.*



Superficie A

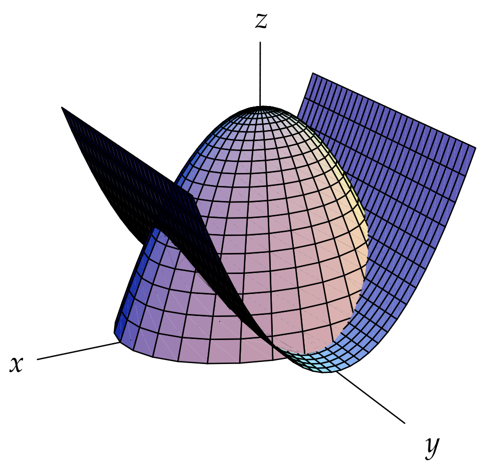


Superficie B

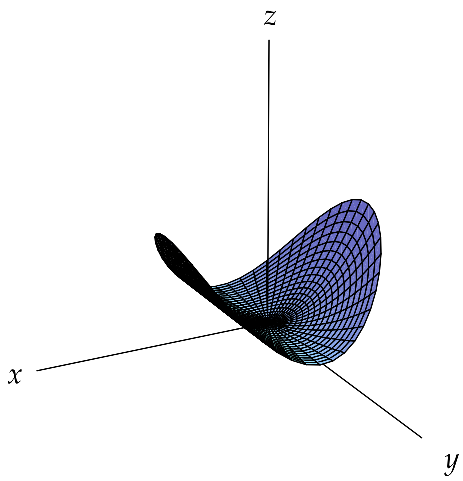
32. *Sean el sólido M y la superficie S definidas como:*

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 \leq 2 - z, \ x^2 \leq z\}$$
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 \leq 2 - z, \ x^2 = z\}.$$

1. *Comprueba el teorema de Gauss en el sólido M para el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (0,0,3z)$.*
2. *Orientemos la superficie S de tal forma que el vector normal en cada punto tenga la tercera componente menor que cero, y sea $\mathbf{g}$ el campo vectorial $\mathbf{g}(x,y,z) = (y, x, 0)$.* ***Expresa*** *el flujo del campo vectorial $\mathbf{g}$ a través de S mediante una integral de línea $\int_C \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds$, determinando el campo $\mathbf{h}$ y la curva C parametrizada con la orientación adecuada.*



Sólido M



Superficie S

33. *Sea S la superficie definida como la porción del paraboloide $x^2 + y^2 = 2 - z$ determinada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, orientada de tal forma que el vector normal en cada punto tiene la tercera componente mayor que cero (figura 1). Sea $\mathbf{f}$ el campo vectorial definido por $\mathbf{f}(x,y,z) = (0,0,y)$.*

1. *Comprueba el teorema de Stokes para el campo $\mathbf{f}$ y la superficie S.*
2. *Deduce razonadamente que el flujo del campo $\mathbf{f}$ a través de S es igual al flujo de $\mathbf{f}$ a través de cualquier cuadrado $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ z = a\}$, donde $a \leq 0$ y orientados con vector normal $\mathbf{n} = (0,0,1)$ (puedes utilizar la figura 2 para indicar el razonamiento seguido).*

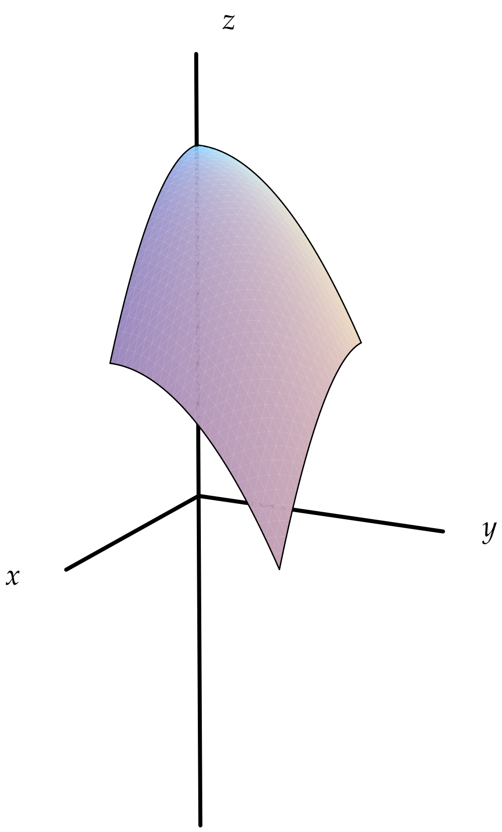


Figura 1

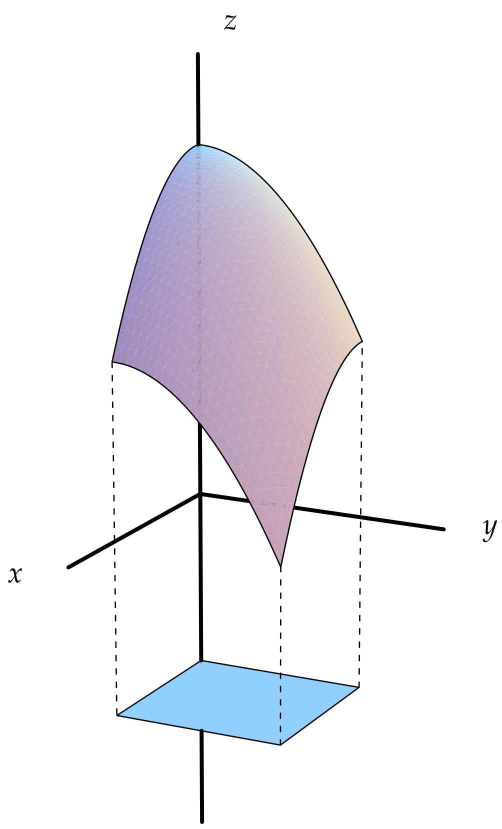


Figura 2