

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables
Examen Final 14 de septiembre de 2007

Grupo	
-------	--

A	B
---	---

Apellidos:

Nombre:

La duración de esta parte del examen es de 1 hora y 45 minutos .

La puntuación asignada a cada pregunta es: 1 (1 punto), 2 (2.25 puntos) y 3 (1.75 puntos).

1. En cada una de las afirmaciones siguientes demuéstrala si es verdadera, o da un contraejemplo si es falsa:
- a) La unión de dos conjuntos no medibles es un conjunto no medible.
 - b) Cualquier subconjunto de un conjunto medible Lebesgue de medida nula, es medible Lebesgue.
 - c) Si una función es constante no nula e integrable en un conjunto medible, dicho conjunto tiene medida finita.
 - d) Las funciones medibles no negativas son integrables en los conjuntos de medida finita.

2. Enuncia los teoremas de la convergencia monótona y dominada.

Cuestiones:

a) Da un ejemplo de una sucesión $f_n \rightarrow f$ en el que la sucesión $\{f_n\}$ verifique las hipótesis del teorema de la convergencia monótona y f no sea integrable. En las condiciones anteriores, ¿es posible que la sucesión $\{f_n\}$ verifique las hipótesis del teorema de la convergencia dominada?

b) Calcula razonadamente el valor de los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x/n)^2}}{1+x^2} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{e^{nx}} dx$$

3. Consideremos la función $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{t}\right)}{x(1+x^2)} dx, t > 0.$

Prueba que está bien definida y que es derivable. Da una expresión explícita de F .

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables
Examen Final 14 de septiembre de 2007

Grupo	
A	B

Apellidos:

Nombre:

La duración de esta parte del examen es de **1 hora y media**.
Cada pregunta tiene un valor de **2.5 puntos**.

1. Enuncia el teorema de Fubini. Enuncia y demuestra el teorema de Tonelli.

Demuestra que la función $f(x, y) = e^{-y} \sin(2xy)$ es integrable en el recinto $[0, 1] \times [0, +\infty)$. Deduce que

$$\int_0^{\infty} e^{-y} \frac{\sin^2 y}{y} dy = \frac{1}{4} \log 5.$$

2. Sea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y + 1, y \leq 1, z \geq 0\}$.

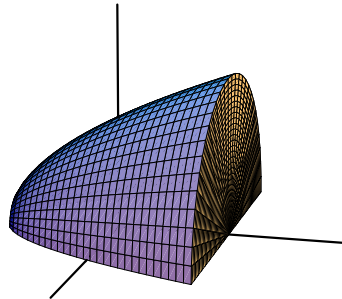
1. Calcula las proyecciones de A sobre los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

2. Calcula el volumen de A .

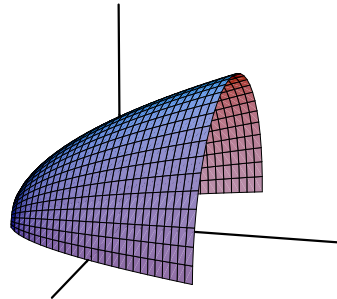
Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y + 1, y \leq 1, z \geq 0\}$ orientada hacia el exterior de A .

3. Calcula el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, z, 1/2)$ a través de S directamente.

4. Comprueba el resultado del apartado anterior usando el teorema de Gauss.



Volumen A



Superficie S .