

Apellidos: _____ Nombre: _____

1. (3 puntos) Responde razonadamente las siguientes cuestiones:

¿Existen conjuntos medibles Lebesgue $A \subset \mathbb{R}$ tales que $m(\overset{\circ}{A}) = m(\overline{A}) = 3$?

¿Existen conjuntos medibles Lebesgue $B \subset \mathbb{R}$ tales que $0 = m(\overset{\circ}{B}) < m(\overline{B}) = 3$?

¿Existen conjuntos medibles Lebesgue $C \subset \mathbb{R}$ tales que $2 = m(\overset{\circ}{C}) < m(\overline{C}) = 3$?

Sea E el conjunto no medible de Vitali y sea $f(x) = x\chi_E(x)$. ¿Es f medible Lebesgue? Si $a \in \mathbb{R}$, ¿es el conjunto $[f = a]$ medible Lebesgue?

Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y sea $f_n(x) = x^n f(x)$. ¿Son las funciones f_n integrables? Calcula su límite puntual. ¿Cuánto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$?

2. (3 puntos) Calcula razonadamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(e^x)}{1 + nx^2} dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \cos x}{1 + n^2 x^{3/2}} dx$$

3. (4 puntos) Sea $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{t^2 + x} dx$.

¿Para qué valores de t está bien definida F ? Prueba que es continua en su dominio de definición. Calcula razonadamente $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.

Firma: