PRIMERA PARTE

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables

Examen Final   18 de diciembre de 2007

Apellidos:

Nombre:

El examen se compone de 6 preguntas. Dispones de **tres horas y media**. Indica a qué grupo perteneces.

GRUPO	**A**	**B**

1. **(2 puntos)** Enuncia y demuestra el teorema de aproximación de funciones medibles no negativas por funciones simples medibles no negativas.

2. **(1.5 puntos)** Calcula razonadamente cada uno de los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \operatorname{sen}(nx) \log(1 + \frac{x}{n})\, dx$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx)\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx$

3. (1.5 puntos) Sea $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x} e^{-x}\, dx$

1. ¿Para qué valores de t está F bien definida?
2. Calcula razonadamente: $\lim_{t \to 0} F(t)$
3. ¿Para qué valores de t es F derivable?. Expresa $F'(t)$.

SEGUNDA PARTE

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables

Examen Final 18 de diciembre de 2007

Apellidos:

Nombre:

El examen se compone de 6 preguntas. Dispones de **tres horas y media**. Indica a qué grupo perteneces.

GRUPO	**A**	**B**

4. **(1 punto)** Enuncia el teorema de Green. Indica cómo lo aplicas para calcular el área de recintos planos.

5. (1.5 puntos)

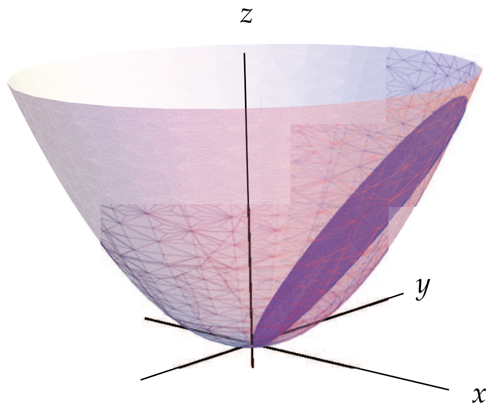
Consideremos la integral doble $\displaystyle\iint_D \frac{\log(y-x)}{(1+|y+x|)^2}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < x+e\,,\ -\infty < x < +\infty\}$.
Mediante el cambio de variables: $y - x = u$, $y + x = v$; prueba que existe la integral y calcula su valor.

6. **(2.5 puntos)** Consideremos las superficies

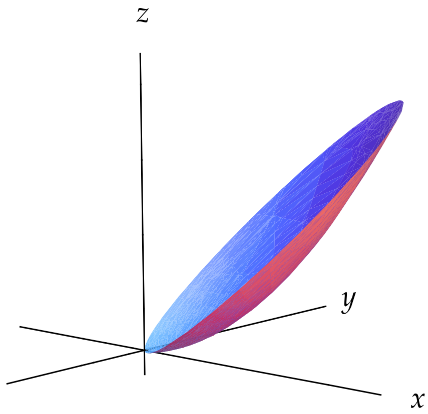
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ z = x+y,\ x^2+y^2 \leq z\} \quad \text{y} \quad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ z \leq x+y,\ x^2+y^2 = z\}.$$

a) Parametriza ambas superficies y calcula el área de A.

b) Comprueba el teorema de Gauss en el recinto encerrado por A y B y el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$.



Superficie A



Superficie B