

Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables
Examen Final 25 de junio de 2008

Grupo	
A	B

Apellidos:

Nombre:

La duración de esta parte del examen es de **1 hora y 45 minutos**. Las preguntas **1** y **3** valen cada una 1.5 puntos, la **2** vale 0.75 puntos y la **4** vale 1.25 puntos.

1. Define los siguientes conceptos:

- a) σ -álgebra y espacio medible.
- b) Medida positiva y espacio de medida.
- c) Conjunto medible Lebesgue en \mathbb{R}^n .
- d) Medida de Lebesgue de un conjunto medible Lebesgue en \mathbb{R}^n .
- e) Conjunto de Cantor. Indica sus propiedades fundamentales.
- f) Conjunto de Vitali.

2. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida. Define los conceptos de integral en X de una función simple medible no negativa y de integral en X de una función medible no negativa. Demuestra la coherencia de la definición.

3. En cada uno de los apartados siguientes, calcula razonadamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx$$

$$a) f_n(x) = \frac{n^2 \arctan(n^2 x)}{1 + n^2 x^2} \chi_{[\frac{n+1}{n}, n]}(x)$$

$$b) f_n(x) = \frac{1}{nx^{3/2}} \log \left(1 + \frac{nx}{1+n} \right)$$

$$c) f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-s}}{e^{ks}} ds$$

4. Sea $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

- a) Determina razonadamente los valores de t para los que F está bien definida.
- b) Calcula razonadamente $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t)$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$.
- c) Prueba que F es derivable en $(0, +\infty)$. Calcula $F'(t)$.
- d) Deduce una expresión explícita de $F(t)$.

Apellidos:

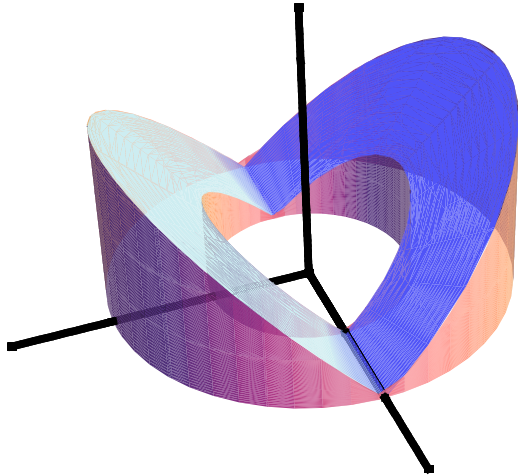
Nombre:

La duración de esta parte del examen es de **1 hora y 45 minutos**. Las preguntas **1** y **2** valen cada una 1.5 puntos y la **3** vale 2 puntos.

1. Enuncia el teorema de cambio de variables. Explica el cambio de variables a coordenadas cilíndricas.

Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq |x|\}$. Indica en la figura adjunta cada una de las superficies que limitan el volumen M . Calcula, mediante coordenadas cilíndricas, el volumen de M , así como la integral

$$\iiint_M \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$



- 2.** Enuncia el teorema de Fubini para funciones medibles no negativas. Enuncia y demuestra el teorema de Tonelli. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$. Calcula las integrales iteradas de f . ¿Es f integrable en \mathbb{R}^2 ? Razona las respuestas.

3. Consideremos el volumen $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: y^2 \leq z \leq y, 0 \leq x \leq 2\}$.

3.1 Proyecta el volumen M en los tres planos coordenados y calcula su volumen.

3.2 Comprueba el teorema de Gauss en el recinto M para el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, 3y, 6z)$. Identifica en la figura siguiente la frontera del recinto M . Dibuja en ellas el vector normal de acuerdo con las parametrizaciones que uses.

