

1. Da un ejemplo de una función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ medible, acotada, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ tal que $f \notin \mathcal{L}^p(0, +\infty)$, cualquiera que sea $1 \leq p < +\infty$.
2. Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + |\log x|)}$. Prueba que $f \in \mathcal{L}^p(0, +\infty)$ si y sólo si $p = 2$.
3. Sea $1 \leq p < +\infty$. Resuelve las siguientes cuestiones:
 - (a) Da un ejemplo de una sucesión $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en \mathcal{L}^p , que sea uniformemente convergente pero que no converja en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.
 - (b) Da un ejemplo de una sucesión $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en \mathcal{L}^p , que sea puntualmente convergente pero que no converja en $\mathcal{L}^p([0, 1])$.
 - (c) Prueba que si $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de \mathcal{L}^p tal que la sucesión (f_n) es uniformemente convergente, $[a, b]$ es un intervalo compacto, entonces la sucesión (f_n) es convergente en $\mathcal{L}^p([a, b])$.
 - (d) Para cada n natural sea m el único número natural tal que $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Sea $0 \leq k < 2^m$ tal que $n = k + 2^m$. Sea f_n la función característica del intervalo $[k/2^m, (k+1)/2^m]$. Prueba que la sucesión (f_n) converge en $\mathcal{L}^p([0, 1])$ pero no es puntualmente convergente.

4. Sean $f_n(x) = \frac{n^\alpha}{(n + |x|)^\beta}$, $\beta > 1$ y $g_n(x) = n^\gamma e^{-n|x|}$.

- (a) Prueba que cualquiera que sea $p \in [1, +\infty]$, $f_n \in \mathcal{L}^p$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcula su norma.
 - (b) Prueba que cualesquiera que sean $\gamma \in \mathbb{R}$ y $p \in [1, +\infty]$, $g_n \in \mathcal{L}^p$. Calcula su norma.
 - (c) Utiliza estas sucesiones para probar que las topologías inducidas por \mathcal{L}^p y \mathcal{L}^q en $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ no son comparables.
5. Prueba que las siguientes desigualdades son inconsistentes para una función $f \in \mathcal{L}^2(0, \pi)$:

$$\int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 dx \leq \frac{4}{9}, \quad \int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx \leq \frac{1}{9}.$$

6. Sea $E = \mathcal{L}^3([0, +\infty))$. Prueba que

$$\sup_{f \in E} \frac{1}{1 + \|f\|_3} \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x} dx = \sqrt[3]{4}.$$

7. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida finito.

- (a) Prueba que $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p$.
 - (b) Sea $p_2 > p_1$. Da una función $f \in \mathcal{L}^{p_2} \setminus \mathcal{L}^{p_1}$.
 - (c) Da una función $f \in \mathcal{L}^{p_1}$, para todo $p_1 < p_2$ pero $f \notin \mathcal{L}^{p_2}$.
8. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}^p$ y $g \in \mathcal{L}^q$. Si $1/r = 1/p + 1/q$, prueba que $fg \in \mathcal{L}^r$ y que $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
9. Sea $X = [0, +\infty)$ y $\mu(A) = \int_A e^{-x} dx$. Cualquiera que sea $n = 0, 1, 2, \dots$, definamos

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

- (a) Prueba que L_n es un polinomio de grado n (llamado de Laguerre) tal que $L_n \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$.
- (b) Prueba que la sucesión (L_n) es ortonormal en $\mathcal{L}^2(X, \mu)$, es decir, $\int_X L_n L_m d\mu = \delta_{nm}$.
- (c) Deduce que $\mathcal{L}^2(X, \mu)$ no tiene dimensión finita.

10. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida, f una función medible e $I(f) = \{p \in (0, +\infty) : \|f\|_p < +\infty\}$.

(a) Prueba que $I(f)$ es un intervalo.

(b) Si $I(f) \neq \emptyset$, la aplicación $p \in I(f) \rightarrow \|f\|_p$ es continua. Incluso si r es un extremo de $I(f)$, aunque $r \notin I(f)$, es $\lim_{p \rightarrow r} \|f\|_p = \|f\|_r$.

(c) Si $0 < p < q < r \leq +\infty$ se tiene que $\|f\|_q \leq \max\{\|f\|_p, \|f\|_r\}$, $\mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^r(\mu) \subset \mathcal{L}^q(\mu)$.

11. Comprueba que el intervalo $I(f)$ (cuando se considera la medida de Lebesgue en $(0, +\infty)$) es el indicado en cada caso:

(a) $f(x) = 1, I(f) = \{\infty\}$.

(b) $f(x) = x, I(f) = \emptyset$.

(c) $f(x) = e^{-x}, I(f) = (0, +\infty]$.

(d) $f(x) = \sum_{n \geq 1} n \chi_{(n, n+2^{-n})}, I(f) = (0, +\infty)$.

(e) $f(x) = x^{-1/a} \chi_{(0,1)}, a > 0, I(f) = (0, a)$.

(f) $f(x) = x^{-1/a} \chi_{(1,+\infty)}, a > 0, I(f) = (-a, +\infty]$.

(g) $f(x) = x^{-1/a} (\log x)^{-b} \chi_{(0,1/2)}, ab > 1, I(f) = (0, a]$.

(h) $f(x) = x^{-1/a} (\log x)^{-b} \chi_{(10,+\infty)}, ab > 1, I(f) = [a, +\infty]$.

Observa que considerando sumas de este tipo de funciones se logra que $I(f)$ sea cualquier intervalo prefijado de antemano.

12. Sea $0 < b \leq a$ y consideremos las funciones características $f = \chi_{(-a,a)}$ y $g = \chi_{(-b,b)}$. Prueba que

$$f \star g(x) = \begin{cases} 2b, & \text{si } |x| \leq a - b \\ a + b - |x|, & \text{si } a - b \leq |x| \leq a + b \\ 0, & \text{si } a + b \leq |x| \end{cases}$$

Haz un gráfico de estas funciones.

13. Sea $a > 0$. Prueba que

$$\frac{1}{a^2 + x^2} \star \frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{2\pi/a}{4a^2 + x^2}.$$

14. Consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-bx}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde suponemos que $a \neq b$. Prueba que

$$f \star g = \begin{cases} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b - a}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si $a = b$, entonces $f \star g(x) = xe^{-ax}$ para $x \geq 0$.