Teoría de la Medida **Examen final** **1/2/01**

Apellidos: Firma:

Nombre:

Desarrolla una y sólo una pregunta de estas dos:

1. (valor: 2 puntos) Demuestra el teorema de extensión de Hahn.

2. (valor: 2 puntos) Demuestra el teorema de descomposición de Hahn.

3. (valor: 1'5 puntos) Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

(a) ¿Es todo conjunto medible Lebesgue de $\mathbf{R}^n$ un conjunto boreliano?

(b) ¿Es todo conjunto medible Lebesgue de $\mathbf{R}^n$ unión de un conjunto boreliano y uno de medida nula?

(c) ¿Es todo conjunto medible Lebesgue de $\mathbf{R}^n$ unión de un conjunto cerrado y uno de medida nula? Prueba con el intervalo $[0,1)$ en $\mathbf{R}$.

(d) ¿Es todo subconjunto de $\mathbf{R}^n$ unión de un conjunto boreliano y uno de medida nula?

Apellidos: Firma:

Nombre:

4. (valor: 2 puntos) Sea μ la medida de Borel en $\mathbf{R}$ de densidad e^{-x^2} respecto de la de Lebesgue. Si D es el disco unidad $x^2 + y^2 \leq 1$, calcula $\mu \times \mu(D)$.

5. (valor: 2'5 puntos) Sea $\alpha(x) = -1/(1+x^2)$ si $x < 0$, $\alpha(x) = (x-2)/2$ si $0 \leq x < 1$ y $\alpha(x) = 1/(1+x^2)$ si $x \geq 1$.

(a) Calcula $\mathrm{var}_\alpha(-\infty, x]$ para cada $x \in \mathbf{R}$.

(b) Expresa α como diferencia de dos funciones monótonas crecientes.

(c) Obtén las descomposiciones de Hahn y de Jordan de la medida real μ asociada a α.

(d) Obtén la descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodym de μ respecto de la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}$.

6. (valor: 2 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finito y sea $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Se define $I_n = \int_X |f|^n \, d\mu$.

(a) Escribe $|f|^n = |f|^{(n-1)/2}|f|^{(n+1)/2}$ y aplica la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener que $I_n^2 \leq I_{n-1}I_{n+1}$.

(b) Deduce que la sucesión (I_{n+1}/I_n) es monótona creciente.

Si además $\|f\|_\infty = 1$:

(c) Demuestra que $I_{n+1} \leq I_n$ y que por tanto I_{n+1}/I_n converge a un número $b \leq 1$.

(d) Aplica la desigualdad de Hölder adecuadamente para obtener

$$\int_X |f|^n \, d\mu \leq \Big(\int_X |f|^{n+1} \, d\mu \Big)^{n/(n+1)} \mu(X)^{1/(n+1)}$$

(e) Teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = \|f\|_\infty = 1$, deduce que $b = 1$.