

Apellidos:

Firma:

Nombre:

Desarrolla una y sólo una pregunta de estas dos:

1. (**valor: 3 puntos**) Demuestra el teorema de Caratheodory.
2. (**valor: 3 puntos**) Demuestra el teorema de Radon-Nikodym para medidas positivas finitas.

3. (valor: 2 puntos) Sea (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dos espacios medibles y sean μ y ν dos medidas positivas finitas en X . Sea $f : X \rightarrow Y$ una función medible y sean μf^{-1} y νf^{-1} las medidas imágenes. De las siguientes afirmaciones, prueba las verdaderas y da un contraejemplo para las falsas:

- (a) Si μ y ν son mutuamente singulares, entonces μf^{-1} y νf^{-1} también lo son.
- (b) Si μf^{-1} y νf^{-1} son mutuamente singulares, entonces μ y ν también lo son.
- (c) Si ν es absolutamente continua respecto de μ , entonces νf^{-1} lo es respecto de μf^{-1} .
- (d) Si νf^{-1} es absolutamente continua respecto de μf^{-1} , entonces ν lo es respecto de μ .

Apellidos:

Firma:

Nombre:

4. (valor: 2'5 puntos) Sea $G = \{(x, y) : 0 < y < x\}$ y sea $f : G \rightarrow (0, +\infty)$ definida por $f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$. Sea μ la medida de Lebesgue restringida a los conjuntos de Borel de G .

(a) Prueba que existe una constante $C > 0$ tal que $\mu(f^{-1}(0, a)) = Ca^2$ para todo $a > 0$. Calcula C .

(b) Demuestra que la medida imagen de μ mediante f es la que tiene por densidad $g(t) = 2Ct$ respecto de la medida de Lebesgue en $(0, +\infty)$.

(c) ¿Para qué valores de α es finita la integral

$$\iint_G \frac{dxdy}{x^{2/3}y^{1/3} + (x^2y)^\alpha}?$$

Calcula el valor de esta integral para $\alpha = 1$.

- 5. (valor: 2'5 puntos)** Sea $1 < p < +\infty$ y sea q su exponente conjugado.
- (a) Demuestra que la función $\exp(-qx/p)$ está en $L^p(0, +\infty)$ y calcula su norma p .
 - (b) Calcula

$$\sup \left\{ \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} dx : f \in L^p(0, +\infty), \|f\|_p \leq 1 \right\}.$$