

# Índice general

Índice de figuras .....	13
<b>Prólogo</b> .....	15
<b>1. Medida de Lebesgue</b> .....	21
<i>Henri Léon Lebesgue</i> .....	22
1.1. Espacios medibles. Medidas positivas .....	23
<i>Félix Édouard Justin Émile Borel</i> .....	24
1.2. Medida de Lebesgue .....	28
<i>Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor</i> .....	44
1.3. Invariancia de la medida de Lebesgue.....	46
1.4. Un conjunto no medible.....	51
<i>Arquímedes de Siracusa</i> .....	52
1.5. Ejercicios .....	53
<b>2. Integral de Lebesgue</b> .....	57
2.1. Integral de funciones simples .....	57
2.2. Funciones medibles .....	62
2.3. Integral de funciones medibles no negativas .....	69
2.3.1. El teorema de la convergencia monótona .....	74
<i>Beppo Levi</i> .....	77
2.4. Integral de funciones con signo arbitrario.....	79
2.4.1. El teorema de la convergencia dominada .....	83
<i>Dimitri Feddovich Egoroff</i> .....	84
2.5. Ejercicios .....	90

## 10 Índice general

<b>3. Integral de funciones de una variable</b> .....	93
3.1. Integrales de funciones de una variable real .....	93
<i>Isaac Newton</i> .....	98
3.2. Integrales dependientes de un parámetro .....	107
<i>Gottfried Wilhelm von Leibniz</i> .....	109
3.3. La función gamma .....	114
3.3.1. El número $e$ es trascendente .....	117
<i>David Hilbert</i> .....	118
3.3.2. La fórmula de Stirling .....	121
3.4. Integral de Lebesgue e integral de Riemann .....	124
<i>Georg Friedrich Bernhard Riemann</i> .....	124
3.5. Ejercicios .....	129
<b>4. Integral de funciones de varias variables</b> .....	133
<i>Guido Fubini</i> .....	133
4.1. Teorema de Fubini .....	134
<i>Bonaventura Francesco Cavalieri</i> .....	137
<i>Leonida Tonelli</i> .....	146
4.1.1. Recintos proyectables .....	150
4.1.2. Interpretación geométrica de la integral .....	155
4.2. Cambio de variables .....	156
4.2.1. Cambios de variables de uso más corriente .....	167
<i>Vincenzo Viviani</i> .....	173
4.3. Ejercicios .....	175
<b>5. Integrales de línea y de superficie</b> .....	181
5.1. Longitud .....	181
5.2. Integrales curvilíneas .....	190
5.2.1. Curvas regulares a trozos .....	194
5.2.2. Trabajo .....	197
5.3. Independencia del camino .....	198
5.4. Teorema de Green .....	208
<i>George Green</i> .....	211
5.5. Integrales de superficie .....	217
5.5.1. Superficies regulares simples sin borde .....	218
5.5.2. Superficies generales .....	223
5.5.3. Área de una superficie .....	226
5.5.4. Integración de campos escalares y vectoriales .....	232
5.6. Teorema de Stokes .....	234
<i>George Gabriel Stokes</i> .....	234
5.7. Teorema de Gauss .....	246
<i>Johann Carl Friedrich Gauss</i> .....	255

5.7.1. Una interpretación física de la integral de superficie.....	257
5.8. Ejercicios .....	259
<b>Apéndice. Dos resultados de cálculo diferencial</b> .....	265
A.1. Un teorema de incrementos finitos .....	265
A.2. Funciones con matriz jacobiana de rango máximo .....	266
<b>Bibliografía</b> .....	269
<b>Índice alfabético</b> .....	273



## Índice de figuras

1.1.	Intervalo diádico con extremos naturales.....	30
1.2.	Construcción del conjunto de Cantor.....	46
1.3.	Movimiento de una figura en el plano. ....	47
2.1.	Gráfica de una función simple.....	58
2.2.	Construcción de la sucesión $(\varphi_n)$ . ....	66
2.3.	Gráfica de una función, su parte positiva y su parte negativa. ....	67
3.1.	Gráfica de la función $\text{sen } x/x$ .....	104
3.2.	Gráfica de la función $\Gamma$ . ....	116
4.1.	Sección de un conjunto. ....	135
4.2.	Secciones de la elipse.....	136
4.3.	Secciones del tetraedro.....	137
4.4.	Recintos proyectables en el plano. ....	151
4.5.	Recintos proyectables en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . ....	153
4.6.	Área encerrada por una función $f \geq 0$ . ....	155
4.7.	Imagen de $[0, 1] \times [0, 1]$ por $\varphi(x, y) = (2(x - y)/3, 2(2x + y)/3)$ .....	157
4.8.	Imagen de $[0, 1] \times [0, 1]$ por $\varphi(x, y) = (2x, y)$ . ....	158
4.9.	Imagen de $A$ si $\varphi$ es del segundo tipo. ....	159
4.10.	Coordenadas polares. ....	167
4.11.	Área en coordenadas polares. ....	169
4.12.	Coordenadas esféricas.....	170
4.13.	Volumen limitado por una esfera y dos conos.....	171
4.14.	Coordenadas cilíndricas.....	172
4.15.	Bóveda de Viviani.....	174
4.16.	Construcción de la sucesión $(I_j)$ y sus subcuadrados. ....	176

## 14 Índice de figuras

5.1.	Curva parametrizada. ....	182
5.2.	Circunferencia con dos sentidos de recorrido.....	183
5.3.	Parametrización de un rectángulo. ....	184
5.4.	Poligonal inscrita en una curva. ....	185
5.5.	Vector tangente a una curva. ....	186
5.6.	Gráfica de la curva $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ . ....	188
5.7.	Se conserva la orientación. ....	189
5.8.	Se cambia la orientación. ....	190
5.9.	Campo de fuerzas y campo de presiones. ....	191
5.10.	Hélice $x = \cos t$ , $y = \operatorname{sen} t$ , $z = t$ . ....	194
5.11.	Curva regular a trozos. ....	195
5.12.	Camino que va de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ . ....	202
5.13.	Recinto para el teorema de Green. ....	208
5.14.	Teorema de Green en una corona circular.....	215
5.15.	Superficie poliédrica inscrita en cilindro.....	217
5.16.	Vector normal a un octante. ....	219
5.17.	Superficie en explícitas.....	221
5.18.	Una semiesfera con un cono. ....	226
5.19.	Superficie regular simple con borde.....	236
5.20.	Orientación de la curva frontera. ....	237
5.21.	Paraboloide cortado por un plano. ....	241
5.22.	Proyección de $S$ en el plano $z = 0$ . ....	242
5.23.	Trozo de superficie esférica y su frontera.....	244
5.24.	Sólido considerado en el teorema de Gauss. ....	247
5.25.	Tronco de paraboloides y de cilindro. ....	254