Ejercicio 3.– Los gamusinos son una especie animal que apareció en el planeta el año 0 de nuestra era. Poseen tres géneros: masculino, femenino y hermafrodita. Todos los gamusinos mueren con poco más de un año de edad justo después de reproducirse. Cada año todos los gamusinos femeninos dan a luz a dos de género masculino, la mitad de los gamusinos femeninos da a luz a otro gamusino femenino y la sexta parte de los gamusinos femeninos da a luz a un hermafrodita. Todos los gamusinos hermafroditas dan a luz anualmente a tres masculinos, la sexta parte de los gamusinos hermafroditas da a luz a uno de género femenino y la mitad de los gamusinos hermafroditas da a luz a otro gamusino hermafrodita. Los gamusinos de género masculino no dan a luz.

a) Calculad la población de gamusinos en el año 1492 suponiendo que la población inicial de gamusinos era de 3^{1500} especímenes repartidos a partes iguales entre los tres géneros.

b) ¿Tiende la población de gamusinos a extinguirse a largo plazo?

Denotemos, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} M_n =&\ \text{número de gamusinos masculinos en el año } n, \\ F_n =&\ \text{número de gamusinos femeninos en el año } n, \\ H_n =&\ \text{número de gamusinos hermafroditas en el año } n. \end{aligned}$$

El enunciado del problema nos dice que,

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= 2F_n + 3H_n, \\ F_{n+1} &= \frac{1}{2}F_n + \frac{1}{6}H_n, \\ H_{n+1} &= \frac{1}{6}F_n + \frac{1}{2}H_n. \end{aligned}$$

Si denotamos $\mathbf{v}_n = (M_n, F_n, H_n)^t$ podemos expresar estas ecuaciones de forma matricial de la siguiente manera,

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n, \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por inducción,

$$\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0.$$

Si A fuera diagonalizable entonces nos sería cómodo calcular A^n para todo $n \geq 0$. Comprobemos que lo es. Para ello calculamos su polinomio característico,

$$p(x) = \begin{vmatrix} -x & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2}-x & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix} = -x\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 - \frac{1}{36}\right] = -x\left(\frac{1}{4} - x + x^2 - \frac{1}{36}\right)$$
$$= -x\left(x^2 - x + \frac{2}{9}\right) = -x\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

Vemos que A tiene tres autovalores diferentes, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, por tanto es diagonalizable, es decir, existe una matriz invertible P tal que,

$$A = PDP^{-1}, \qquad\qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Con el objetivo de hallar P calculamos ahora una base de $\mathbf{R}^3$ formada por autovectores de A. Para ello obtenemos generadores de los tres diferentes subespacios invariantes:

$$V(0)\colon \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcl} 2y + 3z & = & 0, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}z & = & 0. \end{array} \right.$$

La solución de este sistema es $y = 0$, $z = 0$, por tanto $\{(1,0,0)\} \subset V(0)$ es una base. Si consideramos ahora el autovalor $\frac{1}{3}$,

$$V\left(\frac{1}{3}\right)\colon \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{1}{3}x + 2y + 3z & = & 0, \\ \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z & = & 0. \end{array} \right.$$

La solución de este sistema es $y = -z$, $x = 3z$, por tanto $\{(3,-1,1)\} \subset V(\frac{1}{3})$ es una base. Finalmente consideramos el autovalor $\frac{2}{3}$,

$$V\left(\frac{2}{3}\right)\colon \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{2}{3}x + 2y + 3z & = & 0, \\ -\frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z & = & 0. \end{array} \right.$$

La solución de este sistema es $y = z$, $x = \frac{15}{2}z$, por tanto $\{(15,2,2)\} \subset V(\frac{2}{3})$ es una base.

Sea $f\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ el homomorfismo de matriz A respecto de la base canónica $\mathcal{C}$. La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0); (3,-1,1); (15,2,2)\}$ es D, por tanto,

$$A = M_{\mathcal{C}}(f) = M(\mathcal{B},\mathcal{C})M_{\mathcal{B}}(f)M(\mathcal{C},\mathcal{B}) = M(\mathcal{B},\mathcal{C})M_{\mathcal{B}}(f)M(\mathcal{B},\mathcal{C})^{-1} = PDP^{-1},$$

donde P denota la siguiente matriz,

$$P = M(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$A^n = PD^nP,$$

así que,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = \lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{v}_0 = \lim_{n\to\infty} PD^nP\mathbf{v}_0 = (0,0,0)^t,$$

ya que,

$$\lim_{n\to\infty} D^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2^n}{3^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la población de gamusinos tiende a extinguirse.

La inversa de P es,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{9}{4} & -\frac{21}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

La hipótesis del apartado a) es $\mathbf{v}_0 = (3^{1499}, 3^{1499}, 3^{1499})$. Se nos pide calcular,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{1492} &= A^{1492}\mathbf{v}_0 = PD^{1492}P^{-1}\mathbf{v}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^{1492}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2^{1492}}{3^{1492}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{9}{4} & -\frac{21}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{1499} \\ 3^{1499} \\ 3^{1499} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^8 \cdot 2^{1491} \cdot 5 \\ 3^7 \cdot 2^{1492} \\ 3^7 \cdot 2^{1492} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$