Ejercicio 3.– En el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ con el sistema de referencia canónico consideramos la afinidad $f\colon \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ de matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 4/9 & 5/9 & -2/9 \\ -1 & 2/3 & 5/9 & 4/9 & 2/9 \\ 1 & 1/3 & -2/9 & 2/9 & -8/9 \end{pmatrix}.$$

Asimismo consideramos el plano π definido por las ecuaciones siguientes,

$$\pi\colon \quad \begin{cases} x_1 & = 2, \\ \quad 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 6. \end{cases}$$

Escoged un punto $P \in \pi$ y determinad la posición relativa de π y $\pi' = f(P) + \overrightarrow{f}(D(\pi))$ hallando explícitamente los puntos y las direcciones comunes. ¿Son perpendiculares?

La matriz del isomorfismo $\overrightarrow{f}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ inducido por la afinidad f es B,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 4/9 & 5/9 & -2/9 \\ 2/3 & 5/9 & 4/9 & 2/9 \\ 1/3 & -2/9 & 2/9 & -8/9 \end{pmatrix}.$$

Las direcciones de π forman el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones siguientes,

$$D(\pi)\colon \quad \begin{cases} x_1 & = 0, \\ \quad 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 0. \end{cases}$$

Una base es $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v_2}\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,-2,0)^t, \qquad \mathbf{v}_2 = (0,0,-2,1)^t,$$

por tanto una base de $\overrightarrow{f}(D(\pi))$ viene dada por $\{B\mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_2\}$,

$$B\mathbf{v}_1 = (-2,-2/3,-1/3,-2/3)^t, \qquad B\mathbf{v}_2 = (-1,-4/3,-2/3,-4/3)^t.$$

Los planos π y π' no son perpendiculares ya que

$$\langle \mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_1\rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_2\rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{v}_2, B\mathbf{v}_1\rangle = 0, \qquad \langle \mathbf{v}_2, B\mathbf{v}_2\rangle = 0.$$

En particular no pueden tener direcciones comunes, así que se cruzan, es decir, su única dirección común es la trivial. Ello implica que bien se cortan en un único punto o bien no se cortan. Es más, es fácil ver usando la fórmula de la dimensión para subespacios afines que dos planos en $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ se tienen que cortar. Pasamos ahora a calcular el punto de corte en este caso.

Tomemos un punto de π, por ejemplo $P = (2, 0, 6, 0)^t \in \pi$, por tanto

$$f(P) = (5, 3, 3, 3)^t \in \pi'$$

ya que

$$A(1, 2, 0, 6, 0)^t = (1, 5, 3, 3, 3)^t.$$

Las coordenadas paramétricas de π' son,

$$\pi' = \{f(P) + \lambda B\mathbf{v}_1 + \mu B\mathbf{v}_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$
$$f(P) + \lambda B\mathbf{v}_1 + \mu B\mathbf{v}_2 = (5 - 2\lambda - \mu, 3 - (2/3)\lambda - (4/3)\mu, 3 - (1/3)\lambda - (2/3)\mu, 3 - (2/3)\lambda - (4/3)\mu).$$

Veamos cuándo un punto genérico de π' está en π. Para ello sustituimos las coordenadas paramétricas de π' en las ecuaciones de π,

$$\begin{cases} 2 = 5 - 2\lambda - \mu, \\ 6 = 2(3 - (2/3)\lambda - (4/3)\mu) + (3 - (1/3)\lambda - (2/3)\mu) + 2(3 - (2/3)\lambda - (4/3)\mu) = 15 - 3\lambda - 6\mu. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones se reduce a

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 3, \\ \lambda + 2\mu = 3, \end{cases}$$

que tiene una única solución $\lambda = 1 = \mu$, por tanto π y π' se cortan en un único punto cuyas coordenadas se obtienen al sustituir estos valores en las ecuaciones paramétricas de π',

$$\pi \cap \pi' = \{(2, 1, 2, 1)\}.$$

De aquí también se deduce el hecho ya probado de que π y π' se cruzan.