ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
DETERMINANTES Y APLICACIONES

FERNANDO MURO

Estas notas son un tratamiento alternativo de las secciones 2.3 a la 2.8 del tema 2 de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría del Grado de Física tal como las ha visto el grupo 2 durante el curso 2009/2010.

1. Determinantes

Sea k un cuerpo.

Definición 1. La **paridad**, **signatura** o **signo** de una permutación $\sigma \in S_n$ se define como
$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\{\text{inversiones de } \sigma\}}.$$
Recuérdese que la noción de inversión se ha estudiado en el Ejercicio 9 del Tema 1.

Proposición 2. *Dados $1 \leq i < j \leq n$, si $\tau_{i,j} \in S_n$ está definida por $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ y $\tau_{i,j}(l) = l$ si $l \neq i, j$, entonces $\operatorname{sgn}(\tau_{i,j}) = -1$.*

Demostración. La permutación τ invierte los pares siguientes,
$$\begin{array}{l}(i, i+1); \dots ; (i, j-1); (i, j);\\ (i+1, j); \dots ; (j-1, j).\end{array}$$
El número de estos pares es impar. □

La siguiente caracterización del signo es obvia.

Proposición 3. *Sea $\sigma \in S_n$ y $P \in k[x_1, \dots, x_n]$ el polinomio de n variables*
$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j),$$
entonces
$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})}{P(x_1, \dots, x_n)}.$$

Se basa en que σ transforma un factor $(x_i - x_j)$ en otro de los factores del producto, con el signo cambiado si σ invierte el par (i, j). Esta caracterización es conveniente para demostrar la siguiente propiedad del signo.

Proposición 4. *Para todo $\sigma, \tau \in S_n$, $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$.*

Demostración. Como $\sigma\colon \{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ es una aplicación biyectiva puedo hacer el cambio de variable $x_i = x_{\sigma(i)}$ a la hora de calcular $\operatorname{sgn}(\tau)$, de modo que

$$\operatorname{sgn}(\tau) = \frac{P(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)})}{P(x_1,\dots,x_n)} = \frac{P(x_{\sigma\circ\tau(1)},\dots,x_{\sigma\circ\tau(n)})}{P(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})},$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\operatorname{sgn}(\tau) &= \frac{P(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})}{P(x_1,\dots,x_n)}\cdot\frac{P(x_{\sigma\circ\tau(1)},\dots,x_{\sigma\circ\tau(n)})}{P(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})}\\ &= \frac{P(x_{\sigma\circ\tau(1)},\dots,x_{\sigma\circ\tau(n)})}{P(x_1,\dots,x_n)}\\ &= \operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau).\end{aligned}$$

□

Combinando este resultado con la Proposición 2 es fácil comprobar que en S_n la mitad de las permutaciones tienen signo negativo y la otra mitad positivo, lo cual se ha visto en el Ejercicio 9 del Tema 1 para $n = 3, 4$.

Como el signo de la identidad es positivo deducimos lo siguiente de la anterior proposición.

Corolario 5. *Para todo* $\sigma\in S_n$, $\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.

Definición 6. Dada una matriz cuadrada $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(k)$, se define su **determinante** como el escalar

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}.$$

Diremos que A es **regular** si $|A|\neq 0$, en caso contrario diremos que A es **singular**.

Observación 7. Cada sumando del determinante es un producto de un elemento de cada una de las filas, por tanto si A tiene una fila de ceros entonces $|A| = 0$, lo mismo ocurre si A tiene una columna de ceros en virtud del siguiente resultado.

El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

Proposición 8. $|A| = |A^t|$.

Demostración. En las siguientes ecuaciones hacemos el cambio de variable $\tau = \sigma^{-1}$, que está permitido ya que la aplicación $S_n \to S_n$ que envía σ a σ^{-1} es biyectiva por la existencia y unicidad de inversos en un grupo. También aplicamos el Corolario 5.

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}\\ &= \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1}\cdots a_{\tau(n)n}\\ &= |A^t|.\end{aligned}$$

□

El determinante no se comporta del todo bien respecto de la suma de matrices, pero sí respecto del producto.

Teorema 9. *Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$, $|AB| = |A|\cdot|B|$.*

Demostración. Usando la definición del producto de matrices así como la distributividad del producto con respecto de la suma en k obtenemos que

$$\begin{aligned}|AB| &= \sum_{\mu\in S_n} \operatorname{sgn}(\mu) \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{l\mu(i)}\right)\\ &= \sum_{\mu\in S_n} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{l_1,\dots,l_n=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{il_i} b_{l_i\mu(i)}.\end{aligned}$$

Una colección de elementos $1 \leq l_1,\dots,l_n \leq n$ es lo mismo que una aplicación $l\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, $l(n) = l_n$. Sea

$$I = \{\text{aplicaciones } \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}\} \supset S_n.$$

Continuando con las ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned}|AB| &= \sum_{\mu\in S_n} \operatorname{sgn}(\mu) \sum_{l\in I}\prod_{i=1}^{n} a_{il(i)} b_{l(i)\mu(i)}\\ &= \sum_{\mu\in S_n} \operatorname{sgn}(\mu) \left(\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} b_{\sigma(i)\mu(i)} + \sum_{l\in I\setminus S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{il(i)} b_{l(i)\mu(i)}\right)\\ &= \sum_{\mu,\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\mu) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} b_{\sigma(i)\mu(i)} + \sum_{\mu\in S_n}\sum_{l\in I\setminus S_n} \operatorname{sgn}(\mu)\prod_{i=1}^{n} a_{il(i)} b_{l(i)\mu(i)}.\end{aligned}$$

Veamos que

$$\sum_{\mu\in S_n}\sum_{l\in I\setminus S_n} \operatorname{sgn}(\mu)\prod_{i=1}^{n} a_{il(i)} b_{l(i)\mu(i)} = 0.$$

El conjunto $I\backslash S_n$ está formado por aplicaciones que no son inyectivas. Es fácil ver (¡ejercicio!) que una aplicación entre conjuntos finitos del mismo cardinal es biyectiva si y sólo si es inyectiva. Dada $l \in I\backslash S_n$, como no es inyectiva podemos tomar $1 \leq i < j \leq n$ tales que $l(i) = l(j)$. Sea $\tau_{i,j} \in S_n$ como en la Proposición 2. Los factores siguientes de la suma anterior se cancelan entre sí,

$$\operatorname{sgn}(\mu)\prod_{s=1}^{n} a_{il(s)}b_{l(s)\mu(i)},$$
$$\operatorname{sgn}(\mu\circ\tau_{i,j})\prod_{s=1}^{n} a_{il(s)}b_{l(s)\mu\circ\tau_{i,j}(i)}.$$

De aquí se deduce que la suma es en efecto trivial, ya que sus factores se cancelan dos a dos.

Continuando con las ecuaciones anteriores y haciendo los cambios de variables $\mu = \tau\circ\sigma$ y $j = \sigma(i)$,

$$\begin{aligned}
|AB| &= \sum_{\mu,\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\mu)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}b_{\sigma(i)\mu(i)}\\
&= \sum_{\tau,\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}b_{\sigma(i)\tau\circ\sigma(i)}\\
&= \sum_{\tau,\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} b_{j\tau(j)}\right)\\
&= \left(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right)\cdot\left(\sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)\prod_{j=1}^{n} b_{j\tau(j)}\right)\\
&= |A|\cdot|B|.
\end{aligned}$$

□

A partir de este resultado podemos deducir otros que nos ayudarán a calcular determinantes de matrices concretas.

Corolario 10. *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ cuya descomposición por cajas de vectores fila denotamos*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1*}\\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*}\end{pmatrix},$$

si $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, $\alpha \in k$ *y*

$$B = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + \alpha A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix},$$

entonces $|A| = |B|$.

Demostración. Si $C = (c_{st})_{1 \leq s,t \leq n}$ es la matriz con $c_{ss} = 1$, $c_{i,j} = \alpha$ y $c_{st} = 0$ si $s \neq t$ y $(s,t) \neq (i,j)$, entonces $B = CA$, así que el resultado se deduce del teorema ya que $|C| = 1$. □

Corolario 11. *Una matriz cuadrada con dos filas iguales o proporcionales tiene determinante trivial.*

Corolario 12. *Dada una matriz* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ *cuya descomposición por cajas de vectores fila denotamos*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}.$$

Si $1 \leq i < j \leq n$ *y*

$$B = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{j*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix},$$

entonces $-|A| = |B|$.

Demostración. Se razona como el prueba del Corolario 10 pero con la matriz $C = (c_{st})_{1 \leq s,t \leq n}$ cuyas únicas entradas no nulas son $c_{s\tau_{i,j}(s)} = 1$, donde $\tau_{i,j}$ es la permutación de la Proposición 2. En este caso $|C| = \operatorname{sgn}(\tau_{i,j}) = -1$. □

El siguiente teorema es muy útil para calcular determinantes de matrices donde haya una fila con muchos ceros. Además tiene importantes aplicaciones teóricas, como más adelante veremos.

Teorema 13 (Desarrollo del determinante por filas)**.** *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$, sea $A_{ij} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(k)$ la submatriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j, entonces para todo $1 \leq i \leq n$,*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|.$$

Demostración. Tenemos la siguiente descomposición de S_n como unión disjunta de subconjuntos,

$$S_n = \bigcup_{j=1}^{n} S_n^{ij}; \quad S_n^{ij} = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = j\}, \quad S_n^{ij} \cap S_n^{il} = \emptyset \text{ si } j \neq l.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma\in S_n^{ij}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\sigma\in S_n^{ij}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\sigma(i-1)} \cdot a_{i+1\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Dado $1 \leq j \leq n$, sea $B = A_{ij}$, es decir,

$$b_{st} = \begin{cases} a_{ij}; & 1 \leq s < i, 1 \leq t < j; \\ a_{i+1,j}; & n-1 \geq s \geq i, 1 \leq t < j; \\ a_{i,j+1}; & 1 \leq s < i, n-1 \geq t \geq j; \\ a_{ij}; & n-1 \geq s \geq i, n-1 \geq t \geq j. \end{cases}$$

Sea

$$\phi\colon S_{n-1} \longrightarrow S_n^j$$

la aplicación biyectiva definida por $\phi(\tau)(i) = j$ y

$$\phi(\tau)(l) = \begin{cases} \tau(l); & 1 \leq l < i, 1 \leq \tau(l) < j; \\ \tau(l)+1; & 1 \leq l < i, n-1 \geq \tau(l) \geq j; \\ \tau(l-1); & n \geq l > i, 1 \leq \tau(l-1) < j; \\ \tau(l-1)+1; & n \geq l > i, n-1 \geq \tau(l-1) \geq j. \end{cases}$$

Veamos que $\operatorname{sgn}(\phi(\tau)) = (-1)^{i+j}\operatorname{sgn}(\tau)$ para todo $\tau \in S_{n-1}$. Sean

$$\begin{aligned} a &= \#\{l \mid 1 \leq l < i, 1 \leq \tau(l) < j\}, \\ b &= \#\{l \mid 1 \leq l < i, n-1 \geq \tau(l) \geq j\}, \\ c &= \#\{l \mid n \geq l > i, 1 \leq \tau(l-1) < j\}, \\ d &= \#\{l \mid n \geq l > i, n-1 \geq \tau(l-1) \geq j\}. \end{aligned}$$

Estos números satisfacen las ecuaciones siguientes,

$$\begin{aligned} a+b &= i-1, \\ c+d &= n-i, \\ a+c &= j-1, \\ b+d &= n-j, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $-b+c = j-i$, por tanto $b+c = 2b+j-i$. Si m es el número de inversiones de τ entonces el número de inversiones de $\phi(\tau)$ es $m+b+c$, así que

$$\operatorname{sgn}(\phi(\tau)) = (-1)^{m+b+c} = (-1)^{m+2b+j-i} = (-1)^{i+j+m} = (-1)^{i+j}\operatorname{sgn}(\tau).$$

De aquí se deduce fácilmente que

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma\in S_n^{ij}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i-1\sigma(i-1)}\cdot a_{i+1\sigma(i+1)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\phi(\tau)) a_{1\phi(\tau)(1)}\cdots a_{i-1\phi(\tau)(i-1)}\cdot a_{i+1\phi(\tau)(i+1)}\cdots a_{n\phi(\tau)(n)} \\ &= \sum_{\tau\in S_{n-1}} (-1)^{i+j}\operatorname{sgn}(\tau) b_{i\tau(1)}\cdots b_{n\tau(n)} \\ &= |B|. \end{aligned}$$

□

Observación 14. Los resultados por columnas análogos a este teorema así como a los tres corolarios anteriores son también ciertos porque el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

2. Matriz inversa

Definición 15. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ es **invertible** si existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ tal que $AB = I = BA$. En este caso diremos que B es **inversa** de A.

Proposición 16. *La inversa de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ si existe es única y se denota A^{-1}.*

Demostración. Supongamos que $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ son inversas de A. Entonces, aplicando la asociatividad del producto de matrices,

$$C = IC = (BA)C = B(AC) = BI = B.$$

□

El siguiente resultado es una aplicación importante del desarrollo de un determinante por filas y columnas.

Teorema 17. *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$, y en ese caso su inversa es la matriz*

$$A^{-1} = |A|^{-1}((-1)^{i+j}|A_{ij}|)^t_{1\leq i,j\leq n}.$$

Demostración. Si A es invertible entonces por el Teorema 9

$$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|,$$

así que $|A| \in k$ es invertible y $|A|^{-1} = |A^{-1}|$, luego $|A| \neq 0$.

Recíprocamente, si $|A|$ es invertible la matriz

$$B = |A|^{-1}((-1)^{i+j}|A_{ij}|)^t_{1\leq i,j\leq n}$$

está bien definida. Veamos que $AB = I$. Si $i < j$, sea C la matriz siguiente,

$$C = \begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} \\ \vdots \\ A_{j-1,*} \\ A_{i*} \\ A_{j+1*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{pmatrix}$$

Usuando el Teorema 13 y el Corolario 11,

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}|A|^{-1}(-1)^{j+l}|A_{jl}| \\ &= |A|^{-1}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{j+l}a_{il}|A_{jl}| \\ &= |A|^{-1}|C| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que si $i > j$ entonces también $(AB)_{ij} = 0$. En cambio, si $i = j$, usando de nuevo el Teorema 13,

$$\begin{aligned} (AB)_{ii} &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}|A|^{-1}(-1)^{i+l}|A_{il}| \\ &= |A|^{-1}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{i+l}a_{il}|A_{il}| \\ &= |A|^{-1}|A| \\ &= 1, \end{aligned}$$

por tanto $AB = I$. Usando los resultados análogos por columnas se prueba que $BA = I$ (¡ejercicio!), lo cual concluye esta demostración. □

3. Rango de una matriz

Definición 18. Un **menor** de orden r de una matriz A es el determinante de una submatriz $r\times r$. El **rango** de A, que denotamos $\operatorname{rango}(A)$, es el máximo de los órdenes de los menores no nulos.

Proposición 19. *Si todas los menores de A de orden r son nulos entonces* $\operatorname{rango}(A) < r$.

Demostración. Hay que probar que todos los menores de orden $n > r$ son nulos. Por el Teorema 13 cualquiera de estos menores es combinación lineal de menores de orden $n-1$, así que la proposición es cierta por inducción. □

Proposición 20. *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(k)$ y $P \in GL_n(k)$ entonces* $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(PA)$.

Demostración. Veamos que $\operatorname{rango}(PA) \leq \operatorname{rango}(A) = r-1$. Dadas dos sucesiones $1 \leq s_1 < \cdots < s_r \leq n$ y $1 \leq t_1 < \cdots < t_r \leq m$, sea $B \in \mathcal{M}_{n\times r}(k)$ la siguiente matriz de vectores columna,

$$B = (A_{*t_1}|\cdots|A_{*t_r}).$$

El menor de PA correspondiente a estas sucesiones es, usando notación por cajas de vectores fila,

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{l_1=1}^{n} p_{s_1,l_1} B_{l_1 *} \\ \vdots \\ \sum\limits_{l_r=1}^{n} p_{s_r,l_r} B_{l_r *} \end{vmatrix} = \sum_{l_1,\dots,l_r=1}^{n} p_{s_1,l_1}\cdots p_{s_r,l_r} \begin{vmatrix} B_{l_1*} \\ \vdots \\ B_{l_r*} \end{vmatrix} = 0,$$

que es trivial por ser combinación lineal de determinantes de matrices con filas repetidas y de menores de orden r de A, que son cero.

Una vez probada esta desigualdad, como $PA \in \mathcal{M}_{n\times m}(k)$ y $P^{-1} \in GL_n(k)$, deducimos que $\operatorname{rango}(PA) \geq \operatorname{rango}(P^{-1}(PA)) = \operatorname{rango}(A)$, de donde obtenemos la igualdad. □

Corolario 21. *El rango no varía al intercambiar filas, al sumarle a una fila una combinación lineal de otras o al multiplicar una fila por un escalar no nulo.*

Esto es cierto porque estas operaciones corresponden a multiplicar por la izquierda por una matriz regular, compárese con los Corolarios 10 y 12.

Los dos siguientes corolarios se obtienen usando que el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

Corolario 22. *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(k)$ y $Q \in GL_m(k)$ entonces* $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(AQ)$.

Corolario 23. *El rango no varía al intercambiar columnas, al sumarle a una columna una combinación lineal de otras o al multiplicar una columna por un escalar no nulo.*

La siguiente proposición es muy útil a la hora de calcular rangos.

Proposición 24. *Dada* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(k)$ *de* $\mathrm{rango}(A) \geq r+1$*, si* B *es una submatriz* $r\times r$ *con* $|B| \neq 0$*, entonces existe una submatriz* C *de* A *de dimensiones* $(r+1)\times(r+1)$ *que contiene a* B *con* $|C| \neq 0$*.*

Demostración. Intercambiando filas y columnas en A podemos obtener una matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline E & F \end{array}\right)$$

con el mismo rango que A. Multiplicando a ambos lados por matrices invertibles (de determinante $= 1$) obtenemos la siguiente matriz que también tendrá el mismo rango que A,

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -EB^{-1} & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline E & F \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & -B^{-1}D \\ \hline 0 & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & F-EB^{-1}D \end{array}\right).$$

Como el rango de esta matriz es mayor que la dimensión de B, $F \neq EB^{-1}D$, es decir, existen $1 \leq i, j \leq n-r$ tales que

$$(\star) \qquad f_{ij} \neq |B|^{-1}\sum_{s,t=1}^{r}(-1)^{s+t}e_{is}|B_{ts}|d_{tj}.$$

Aquí estamos usando el Teorema 17.

Por reducción al absurdo, supongamos que

$$\left|\begin{array}{c|c} B & D_{*j} \\ \hline E_{i*} & f_{ij} \end{array}\right| = 0.$$

Si desarrollamos este determinante por la última columna y luego desarrollamos los determinantes de la primera línea de la siguente ecuación por la última fila nos queda,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=1}^{r}(-1)^{t+r+1}d_{tj}\begin{vmatrix} B_{1*} \\ \vdots \\ B_{t-1,*} \\ B_{t+1,*} \\ \vdots \\ B_{r,*} \\ E_{i*} \end{vmatrix} + f_{ij}|B| \\ &= \sum_{t=1}^{r}(-1)^{t+r+1}d_{tj}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{r+s}e_{is}|B_{ts}| + f_{ij}|B| \\ &= -\sum_{s,t=1}^{r}(-1)^{s+t}e_{is}|B_{ts}|d_{tj} + f_{ij}|B|, \end{aligned}$$

lo cual contradice ($\star$). $\square$

4. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 25. Un **sistema de ecuaciones lineales** consiste en plantearse la existencia de escalares $x_1, \ldots, x_n$ (denominados en principio **incógnitas**) que satisfagan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

donde los $a_{ij}, b_i \in k$ son conocidos, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Este sistema puede tener soluciones o no tenerlas, y en caso de tenerlas puede tener muchas o una sóla.

Una manera alternativa de expresar el sistema de ecuaciones lineales es mediante la **matriz de coeficientes** $A = (a_{i,j})$, y el **vector de incógnitas** $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ y el **vector de términos independientes** $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$. El sistema de ecuaciones equivale a

$$A\underline{x} = \underline{b}.$$

Obsérvese que este sistema de ecuaciones lineales es lo mismo que plantearse si $\underline{b}$ es combinación lineal de las columnas de A.

Proposición 26 (Regla de Cramer)**.** *Sea $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tal que la matriz de coeficientes tiene determinante no nulo, $|A| \neq 0$. Este sistema tiene solución única dada por la siguiente fórmula:*

$$x_i = |A|^{-1} \cdot \left| \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_{*1} & \cdots & A_{*(i-1)} & \underline{b} & A_{*(i+1)} & \cdots & A_{*n} \end{array} \right) \right|.$$

Demostración. El sistema tiene solución única ya que al ser $|A| \neq 0$ podemos multiplicar por A^{-1} a izquierda y nos queda que necesariamente $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$. Es obvio que

$$A \begin{pmatrix} 1 & & & x_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & x_i & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & x_n & & & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_{*1} & \cdots & A_{*(i-1)} & \underline{b} & A_{*(i+1)} & \cdots & A_{*n} \end{array} \right).$$

Tomando determinantes en esta igualdad obtenemos

$$|A|x_i = \left| \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_{*1} & \cdots & A_{*(i-1)} & \underline{b} & A_{*(i+1)} & \cdots & A_{*n} \end{array} \right) \right|.$$

$\square$

Proposición 27. *Si*

$$\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_{*1} & \cdots & A_{*(i-1)} & A_{*(i+1)} & \cdots & A_{*n} \end{array}\right)$$

entonces la columna A_{*i} es combinación lineal de las otras.

Demostración. Sea $r = \operatorname{rango}(A)$. Permutando filas y columnas podemos suponer que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right)$$

donde $B \in GL_r(k)$, e $i = r + 1$. El sistema de r ecuaciones con r incógnitas

$$B\underline{x} = \begin{pmatrix} a_{1,r+1} \\ \vdots \\ a_{r,r+1} \end{pmatrix}$$

tiene solución única $\underline{x}^t = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Supongamos por reducción al absurdo que

$$\alpha_1 A_{*1} + \cdots + \alpha_r A_{*r} \neq A_{*,r+1}.$$

Los primeros r elementos del vector columna $\underline{v} = \alpha_1 A_{*1} + \cdots + \alpha_r A_{*r} - A_{*,r+1}$ son cero. Sea $j > r$ tal que el elemento j-ésimo y de $\underline{v}$ es no nulo $y \neq 0$. El rango de

$$F = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_{*1} & \cdots & A_{*r} & \underline{v} & A_{*,r+2} & \cdots & A_{*,n} \end{array}\right)$$

ha de coincidir con el de A, pero el menor correspondiente a las filas $1 < \cdots < r < j$ y columnas $1 < \cdots < r < r + 1$ es de la forma

$$\left|\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline w & y \end{array}\right| = |B| y \neq 0.$$

Aquí hemos desarrollado el determinante por la última columna. Esto implica que $\operatorname{rango}(A) \geq r + 1$, lo cual es una contradicción. $\square$

Esta proposición es también cierta si cambiamos filas por columnas.

Corolario 28 (Teorema de Rouché-Frobenius)**.** *Un sistema de ecuaciones lineales $A\underline{x} = \underline{b}$ tiene solución si y sólo si* $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|\underline{b})$.

Demostración. El sistema tiene solución si y sólo si $\underline{b}$ es combinación lineal de las columnas de A, lo cual por lo visto anteriormente ocurre si y sólo si $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A|\underline{b})$. $\square$

La matriz $(A|\underline{b})$ se denomina **matriz ampliada** del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$.