Ejercicio 54.– Consideremos tres empresas A, B y C relacionadas del siguiente modo: cada año el 30% de los trabajadores de A pasan a trabajar en B y el 20% en C. El 40% de los trabajadores de B pasan a trabajar en A y el 20% en C. Además, el 50% de los de C pasan a trabajar en A. El resto de los trabajadores continúa trabajando en su empresa inicial.

a) Hallad el número de trabajadores de A al cabo de n años suponiendo que inicialmente hay 50000 trabajadores en cada empresa.

b) Calcular la evolución a largo plazo suponiendo que inicialmente la suma de los trabajadores de las tres empresas es 300000.

Suponemos que las tres empresas comienzan a funcionar un determinado año y denotamos,

$$\begin{aligned} A_n &= \text{ número de trabajadores de } A \text{ al cabo de } n \text{ años,} \\ B_n &= \text{ número de trabajadores de } B \text{ al cabo de } n \text{ años,} \\ C_n &= \text{ número de trabajadores de } C \text{ al cabo de } n \text{ años.} \end{aligned}$$

El enunciado del problema nos dice que, para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{50}{100}A_n + \frac{40}{100}B_n + \frac{50}{100}C_n, \\ B_{n+1} &= \frac{30}{100}A_n + \frac{40}{100}B_n, \\ C_{n+1} &= \frac{20}{100}A_n + \frac{20}{100}B_n + \frac{50}{100}C_n. \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{1}{2}A_n + \frac{2}{5}B_n + \frac{1}{2}C_n, \\ B_{n+1} &= \frac{3}{10}A_n + \frac{2}{5}B_n, \\ C_{n+1} &= \frac{1}{5}A_n + \frac{1}{5}B_n + \frac{1}{2}C_n. \end{aligned}$$

Es más, si denotamos $\mathbf{v}_n = (A_n, B_n, C_n)^t$ podemos expresar estas ecuaciones de forma matricial de la siguiente manera,

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n, \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por inducción,

$$\mathbf{v}_n = A^n \mathbf{v}_0.$$

Si A fuera diagonalizable entonces nos sería cómodo calcular A^n para todo $n \geq 0$. Comproblemos si lo es. Para ello calculamos su polinomio característico,

$$\begin{aligned}
p(x) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-x & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5}-x & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}-x\right)^2\left(\frac{2}{5}-x\right) + \frac{3}{100} - \frac{1}{10}\left(\frac{2}{5}-x\right) - \frac{3}{25}\left(\frac{1}{2}-x\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}-x+x^2\right)\left(\frac{2}{5}-x\right) - \frac{7}{100} + \frac{11}{50}x = \frac{1}{10} - \frac{13}{20}x + \frac{7}{5}x^2 - x^3 - \frac{7}{100} + \frac{11}{50}x \\
&= -x^3 + \frac{7}{5}x^2 - \frac{43}{100}x + \frac{3}{100} = -\left(x-\frac{1}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)(x-1).
\end{aligned}$$

Vemos que A tiene tres autovalores diferentes, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$ y 1, por tanto es diagonalizable, es decir, existe una matriz invertible P tal que,

$$A = PDP^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con el objetivo de hallar P calculamos ahora una base de $\mathbf{R}^3$ formada por autovectores de A. Para ello obtenemos generadores de los tres diferentes subespacios invariantes:

$$V\left(\frac{1}{10}\right): \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0, \\ x+y+2z & = & 0. \end{array} \right.$$

La solución de este sistema es $y=-x$, $z=0$, por tanto $\{(1,-1,0)\} \subset V(\frac{1}{10})$ es una base. Si consideramos ahora el autovalor $\frac{3}{10}$,

$$V\left(\frac{3}{10}\right): \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+y & = & 0, \\ x+y+z & = & 0. \end{array} \right.$$

La solución de este sistema es $y=-3x$, $z=2x$, por tanto $\{(1,-3,2)\} \subset V(\frac{3}{10})$ es una base. Finalmente consideramos el autovalor 1,

$$V(1): \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcl} x-2y & = & 0, \\ 2x+2y-5z & = & 0. \end{array} \right.$$

La solución de este sistema es $x=2y$, $z=\frac{6}{5}y$, por tanto $\{(10,5,6)\} \subset V(1)$ es una base.

Sea $f\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ el homomorfismo de matriz A respecto de la base canónica $\mathcal{C}$. La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,-1,0); (1,-3,2); (10,5,6)\}$ es D, por tanto,

$$A = M_{\mathcal{C}}(f) = M(\mathcal{B},\mathcal{C})M_{\mathcal{B}}(f)M(\mathcal{C},\mathcal{B}) = M(\mathcal{B},\mathcal{C})M_{\mathcal{B}}(f)M(\mathcal{B},\mathcal{C})^{-1} = PDP^{-1},$$

donde P denota la siguiente matriz,

$$P = M(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

El apartado a) nos pide calcular $\mathbf{v}_n$ suponiendo que $\mathbf{v}_0 = (50000, 50000, 50000)^t$. Tenemos que

$$\mathbf{v}_n = PD^nP^{-1}\mathbf{v}_0,$$

y $\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{v}_0$ es la solución del sistema de ecuaciones

$$P\mathbf{x} = \mathbf{v}_0, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50000 \\ 50000 \\ 50000 \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 10z & = & 50000, \\ -x - 3y + 5z & = & 50000, \\ 2y + 6z & = & 50000, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y + 10z & = & 50000, \\ -2y + 15z & = & 100000, \\ 21z & = & 150000, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcr} z & = & -25000, \\ y & = & \frac{25000}{7}, \\ z & = & \frac{50000}{7}, \end{array} \right.$$

de este modo,

$$\mathbf{v}_n = PD^nP^{-1}\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{10^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^n}{10^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -25000 \\ \frac{25000}{7} \\ \frac{50000}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25000}{10^n} + \frac{25000\cdot 3^n}{7\cdot 10^n} + \frac{500000}{7} \\ \frac{25000}{10^n} - \frac{75000\cdot 3^n}{7\cdot 10^n} + \frac{250000}{7} \\ \frac{50000\cdot 3^n}{7\cdot 10^n} + \frac{30000}{7} \end{pmatrix},$$

lo cual responde al apartado a).

El apartado b) nos pide que calculemos $\mathbf{v}_n$ para valores grandes de n suponiendo que

$$A_0 + B_0 + C_0 = 300000.$$

La inversa de P es,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n &= \lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{v}_0 = \lim_{n\to\infty} PD^nP^{-1}\mathbf{v}_0 \\
&= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{10^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^n}{10^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{10}{21} & \frac{10}{21} & \frac{10}{21} \\ \frac{5}{21} & \frac{5}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{21}(A_0+B_0+C_0) \\ \frac{5}{21}(A_0+B_0+C_0) \\ \frac{2}{7}(A_0+B_0+C_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1000000}{7} \\ \frac{500000}{7} \\ \frac{600000}{7} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$