Ejercicio 3 (3 puntos).– Sea $a \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ un número real y $f_a \colon \mathbf{C}^4 \longrightarrow \mathbf{C}^4$ el endomorfismo de $\mathbf{C}$–espacios vectoriales cuya matriz respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ es $M_{\mathcal{C}}(f_a) = A$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -a & 2a \\ -1 & 1 & -a & 1+2a \\ 0 & 0 & -a & 2a \\ 0 & 0 & -a & a \end{pmatrix}.$$

a) ¿Para qué valores de a es f_a diagonalizable?

b) Para los valores de a obtenidos en el apartado anterior, hallad una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}^4$ tal que $M_{\mathcal{B}}(f_a)$ sea diagonal.

c) Para los valores de a obtenidos en el primer apartado y para todo entero $n \geq 1$, hallad la matriz A^n.

---

a) Calculemos el polinomio característico $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ de f_a. Para ello haremos uso de la conocida fórmula que simplifica el cálculo del determinante de una matriz triangular superior por cajas,

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right| = |A||C|,$$

$$p(x) = |xI_4 - A| = \begin{vmatrix} x+1 & -2 & a & -2a \\ 1 & x-1 & a & -1-2a \\ 0 & 0 & x+a & -2a \\ 0 & 0 & a & x-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x+a & -2a \\ a & x-a \end{vmatrix}$$
$$= (x^2+1)(x^2+a^2).$$

Los autovalores de f_a son las raíces de $p(x)$, que son i, $-i$, ai y $-ai$.

Si $a \neq 0, 1, -1$ entonces hay 4 autovalores distintos, todos con multiplicidad 1 (como raíces de $p(x)$), por tanto f_a es diagonalizable.

Si $a = 0$ entonces i y $-i$ tienen multiplicidad 1 y 0 muliplicidad 2. La dimensión del subespacio invariante del autovalor 0 es,

$$\dim V_0 = \dim \mathbf{C}^4 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

por tanto f_0 es también diagonalizable.

Si $a = 1$ entonces la multiplicidad de i es 2, y la de $-i$ también. La dimensión del subespacio invariante del autovalor i es,

$$\dim V_i = \dim \mathbf{C}^4 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} i+1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & i-1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & i+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & i-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de esta matriz es como mucho 3, ya que i es un autovalor y por tanto $\dim V_i \geq 1$. Para calcular el rango de esta matriz observamos que las dos primeras columnas son linealmente dependientes entre sí, y también las dos últimas filas, por tanto la única posibilidad de que tenga rango 3 es que el menor obtenido al eliminar la primera columna y la última fila no sea cero,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ i-1 & 1 & -3 \\ 0 & i+1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 6i - 6 + 2i - 2 = -4i \neq 0,$$

luego $\dim V_i = 4 - 3 = 1 \neq 2$ y por ello f_1 no es diagonalizable.

Análogamente, si $a = -1$ entonces la multiplicidad de i es 2, y la de $-i$ también. La dimensión del subespacio invariante del autovalor i es,

$$\dim V_i = \dim \mathbf{C}^4 - \text{rango} \begin{pmatrix} i+1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & i-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & i-1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & i+1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

puesto que el menor obtenido al eliminar la primera columna y la última fila es

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ i-1 & -1 & 1 \\ 0 & i-1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2(i-1)^2 + 2(i-1) + 2(i-1) = 0,$$

y

$$\dim V_{-i} = \dim \mathbf{C}^4 - \text{rango} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -i-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -i-1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -i-1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

puesto que

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -i-1 & -1 & 1 \\ 0 & -i-1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2(-i-1)^2 + 2(-i-1) + 2(-i-1) = 0,$$

por ello f_{-1} sí es diagonalizable.

En resumen f_a es diagonalizable si y sólo si $a \neq 1$.

b) Para $a \neq 1$, busquemos bases de los subespacios invariantes.

El subespacio V_i es el conjunto de soluciones de

$$\begin{pmatrix} i+1 & -2 & a & -2a \\ 1 & i-1 & a & -1-2a \\ 0 & 0 & i+a & -2a \\ 0 & 0 & a & i-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq -1$ la primera ecuación depende de las demás ya que el rango de la matriz de coeficientes es 3 y

$$\begin{vmatrix} i-1 & a & -1-2a \\ 0 & i+a & -2a \\ 0 & a & i-a \end{vmatrix} = (i-1)(a^2-1) \neq 0,$$

por tanto podemos eliminar la primera ecuación y despejar x_2, x_3 y x_4 en función de $x_1 = \lambda \in \mathbf{C}$,

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} (i-1)x_2 & +ax_3 & -(1+2a)x_4 & = & -\lambda, \\ & (i+a)x_3 & -2ax_4 & = & 0, \\ & ax_3 & +(i-a)x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

Las dos últimas ecuaciones forman un sistema homogéneo con matriz de coeficientes regular, ya que su determinante es $a^2-1\neq 0$, luego $x_3=x_4=0$ y por tanto $x_2=\frac{1+i}{2}\lambda$. Tomando $\lambda=2$ obtenemos que $V_i=\langle(2,1+i,0,0)\rangle$.

Si $a=-1$ el rango de la matriz de coeficientes es 2, las dos primeras filas son independientes y podemos despejar x_3 y x_4 en función de $x_1=\lambda$ y $x_2=\mu$, $\lambda,\mu\in\mathbf{C}$,

$$\left\{\begin{array}{rrcl} -x_3 & +2x_4 & = & -(1+i)\lambda+2\mu, \\ -x_3 & +x_4 & = & -\lambda+(1-i)\mu. \end{array}\right.$$

De aquí se deduce fácilmente que $x_4=-i\lambda+(1+i)\mu$ y $x_3=(1-i)\lambda+2i\mu$. Una base de V_i viene dada por los vectores que se obtienen al hacer $\lambda=1$ y $\mu=0$, y $\lambda=0$ y $\mu=1$,

$$\{(1,0,1-i,-i);(0,1,2i,1+i)\}\subset V_i.$$

Como A es una matriz de números reales, si $\underline{v}$ es un autovector asociado al autovalor α, es decir $A\underline{v}=f_a(\underline{v})=\alpha\underline{v}$, entonces tomando conjugados a ambos lados vemos que $A\bar{\underline{v}}=f_a(\bar{\underline{v}})=\bar{\alpha}\bar{\underline{v}}$, por tanto $\bar{\underline{v}}$ es un autovector asociado al autovalor $\bar{\alpha}$.

Si $a\neq -1$ vemos que $(2,1-i,0,0)\in V_{-i}$, además sabemos que $\dim V_{-i}=1$ es la multiplicidad del autovalor, luego $\{(2,1-i,0,0)\}\subset V_{-i}$ es una base.

Análogamente, si $a=-1$ entonces $\{(1,0,1+i,i);(0,1,-2i,1-i)\}\subset V_{-i}$. Claramente este conjunto es linealmente independiente, y como sabemos que $\dim V_{-i}=2$ es la multiplicidad del autovalor deducimos que se trata de una base.

Para $a=-1$ este apartado queda totalmente solucionado ya que podemos tomar la base

$$\{(1,0,1-i,-i);(0,1,2i,1+i);(1,0,1+i,i);(0,1,-2i,1-i)\},$$

de todos modos de cara al apartado siguiente nos convendrá más tomar los vectores en el siguiente orden,

$$\mathcal{B}=\{(1,0,1-i,-i);(1,0,1+i,i);(0,1,-2i,1-i);(0,1,2i,1+i)\}.$$

Ahora nos centraremos en el caso $a\neq -1$.

El subespacio V_{ai} es el conjunto de soluciones de

$$\begin{pmatrix} ai+1 & -2 & a & -2a \\ 1 & ai-1 & a & -1-2a \\ 0 & 0 & ai+a & -2a \\ 0 & 0 & a & ai-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a\neq 0$ la cuarta ecuación es dependiente de las demás, pues el menor obtenido al eliminar la última fila y la última columna es $(1-a^2)(ai+a)\neq 0$, así que podemos despejar x_1, x_2 y x_3 en función de $x_4=\lambda\in\mathbf{C}$,

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} (ai+1)x_1 & -2x_2 & +ax_3 & = & 2a\lambda, \\ x_1 & +(ai-1)x_2 & +ax_3 & = & (1+2a)\lambda, \\ & & a(1+i)x_3 & = & 2a\lambda. \end{array}\right.$$

Por un lado $x_3=(1-i)\lambda$. Por otro lado si restamos la segunda ecuación a la primera y despejamos $ax_3=a(1-i)\lambda$ en la segunda obtenemos el sistema,

$$\left\{\begin{array}{rrcl} aix_1 & -(1+ai)x_2 & = & -\lambda, \\ x_1 & +(ai-1)x_2 & = & (1+a+ai)\lambda. \end{array}\right.$$

Para resolverlo despejamos $x_1=(1+a+ai)\lambda+(1-ai)x_2$ y sustituimos,

$$\begin{aligned} (ai+a^2i-a^2)\lambda+(ai+a^2)x_2-(1+ai)x_2&=-\lambda, \\ (a^2-1)x_2&=(a^2-1-ai-a^2i)\lambda, \\ x_2&=\frac{a^2-1-ai-a^2i}{a^2-1}\lambda, \end{aligned}$$

y finalmente

$$x_1 = \frac{(a^2-1)(1+a+ai)+(1-ai)(a^2-1-ai-a^2i)}{a^2-1}\lambda = \frac{a^2-a-2-ai-a^2i}{a^2-1}\lambda$$

Tomando $\lambda = a^2-1$ deducimos que $V_{ai} = \langle (a^2-a-2-ai-a^2i, a^2-1-ai-a^2i, (1-i)(a^2-1), a^2-1)\rangle$ y conjugando $V_{-ai} = \langle (a^2-a-2+ai+a^2i, a^2-1+ai+a^2i, (1+i)(a^2-1), a^2-1)\rangle$. Así que si $a \neq -1$ podemos tomar

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{&(2,1+i,0,0);(2,1-i,0,0);\\ &(a^2-a-2-ai-a^2i, a^2-1-ai-a^2i, (1-i)(a^2-1), a^2-1);\\ &(a^2-a-2+ai+a^2i, a^2-1+ai+a^2i, (1+i)(a^2-1), a^2-1)\}\end{aligned}$$

Finalmente si $a=0$ el subespacio V_0 es el conjunto de soluciones de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2 y podemos despejar x_1 y x_2 en función de $x_3 = \lambda$ y $x_4 = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$,

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} x_1 & -2x_2 & = & 0, \\ x_1 & -x_2 & = & \mu. \end{array} \right.$$

De aquí se deduce fácilmente que $x_1 = x_2 + \mu$ y por tanto $x_2 + \mu - 2x_2 = 0$, luego $x_2 = \mu$ y $x_1 = 2\mu$. Una base de V_0 viene dada por los vectores que se obtienen al hacer $\lambda = 1$ y $\mu = 0$, y $\lambda = 0$ y $\mu = 1$,

$$\{(0,0,1,0);(2,1,0,1)\} \subset V_0.$$

Así que para $a=0$ la solución a este apartado es,

$$\mathcal{B} = \{(2,1+i,0,0);(2,1-i,0,0);(0,0,1,0);(2,1,0,1)\}.$$

c) Para todo $a \neq 1$, la matriz de f_a respecto de la base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ calculada en el apartado anterior para los diferentes valores de a es $M_{\mathcal{B}}(f_a) = D$,

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ai & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ai \end{pmatrix},$$

luego $A = PDP^{-1}$ para $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = (\underline{v}_1|\underline{v}_2|\underline{v}_3|\underline{v}_4)$, y

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n i^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^n i^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n a^n i^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Nótese que

$$(-1)^n = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & n \text{ par}; \\ -1, & n \text{ impar}; \end{array} \right. \qquad i^n = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & n = 4m; \\ i, & n = 4m+1; \\ -1, & n = 4m+2; \\ -i, & n = 4m+3. \end{array} \right.$$