Ejercicio 2.– Sea $a \in \mathbf{R}$ y $g\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ el endomorfismo cuya matriz respecto de la base canónica $\mathcal{C}$ es A,

$$M_{\mathcal{C}}(g) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ a+1 & 2 & -2 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Determinad para qué valores de $a \in \mathbf{R}$ es g diagonalizable. Para dichos valores, hallad una base $\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^4$ de autovectores y una matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$ sea diagonal. Calculad D.
- ¿Es g una proyección para algún valor de $a \in \mathbf{R}$?

El polinomio característico de g es fácil de calcular desarrollando el siguiente determinante por filas y columnas,

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 & 0 \\ a+1 & 2-x & -2 & a \\ 0 & 0 & -1-x & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = (x-1)(x+1)(x-2)^2.$$

Obsérvese que los autovalores son 1 y -1, ambos con multiplicidad 1, y 2 con multiplicidad 2, independientemente de $a \in \mathbf{R}$. En particular g no puede ser nunca una proyección, ya que los únicos posibles autovalores de una proyección son 0 y 1.

Para calcular los valores de $a \in \mathbf{R}$ que hacen que g sea diagonalizable bastará calcular la dimensión del subespacio invariante $V(2)$ asociado al autovalor 2,

$$\dim V(2) = 4 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$ este rango es 3 ya que el menor formado por las tres primeras filas y las columnas 1, 3 y 4 es

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a+1 & -2 & a \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3a.$$

Por tanto, en este caso $\dim V(2) = 1$ y g no es diagonalizable. Sin embargo, si $a = 0$ entonces el rango es 2 ya que hay dos columnas triviales, luego $\dim V(2) = 2$ y g es diagonalizable.

Calculemos una base de autovectores para $a = 0$.

$$V(1)\colon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Despejando en función de x_1 deducimos que

$$x_3 = 0, \qquad x_2 = -x_1, \qquad x_4 = -x_1,$$

así que obtenemos una base de $V(1)$ haciendo $x_1 = 1$, $\{(1, -1, 0, -1)\}$.

$$V(-1)\colon \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Despejando en función de x_1 deducimos que

$$x_3 = -x_1, \qquad x_2 = -x_1, \qquad x_4 = -x_1,$$

así que obtenemos una base de $V(-1)$ haciendo $x_1 = 1$, $\{(1, -1, -1, -1)\}$.

$$V(2)\colon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_3 = 0, \\ -3x_3 = 0. \end{array} \right.$$

Despejando en función de x_2 y x_4 deducimos que

$$x_3 = 0, \qquad x_1 = 0,$$

así obtenemos una base de $V(2)$, $\{(0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\}$.

La siguiente es por tanto una base de autovectores,

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, -1); (1, -1, -1, -1); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\}.$$

La matriz de g respecto de esta base es

$$M_{\mathcal{B}}(g) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos

$$P = M(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$P^{-1}AP = M(\mathcal{C}, \mathcal{B}) M_{\mathcal{C}}(g) M(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = M_{\mathcal{B}}(g) = D.$$

Ejercicio 3.– Tres cuentas bancarias M, N, P, Q poseen el saldo inicial siguiente (en euros),

$$M_0 = 1000, \qquad N_0 = -100, \qquad P_0 = 2000, \qquad Q_0 = 50000.$$

Las cifras negativas indican cantidades adeudadas (números rojos). El saldo de estas cuentas evoluciona de año en año de la siguiente manera:

- La cuenta M **incrementa** su saldo por valor del doble del saldo de la cuenta P en el año anterior.
- Al saldo de la cuenta N **se la añade** la cantidad correspondiente a la suma de los saldos de las cuentas M y N en el año anterior, pero se le resta el doble del saldo de la cuenta P en el año anterior.
- El saldo de la cuenta P **pasa a ser** el opuesto del que tenía (el opuesto de x es $-x$).
- Al saldo de la cuenta Q **se la añade** la cantidad correspondiente a la suma de los saldos de las cuentas M y Q en el año anterior, pero se le resta el doble del saldo de la cuenta P en el año anterior.

Calculad el saldo de estas cuatro cuentas al cabo de un siglo.

Sean

$$\begin{aligned} M_n &= \text{ saldo de la cuenta } M \text{ al cabo de } n \text{ años}, \\ N_n &= \text{ saldo de la cuenta } N \text{ al cabo de } n \text{ años}, \\ P_n &= \text{ saldo de la cuenta } P \text{ al cabo de } n \text{ años}, \\ Q_n &= \text{ saldo de la cuenta } Q \text{ al cabo de } n \text{ años}, \\ \mathbf{v}_n &= (M_n, N_n, P_n, Q_n)^t. \end{aligned}$$

El enunciado nos dice que $\mathbf{v}_0 = (1000, -100, 2000, 50000)^t$ y $\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}$ para todo $n > 0$, donde A es la matriz del ejercicio anterior para $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particular $\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0$, por tanto, con la notación del ejercicio anterior,

$$\mathbf{v}_{100} = A^n\mathbf{v}_0 = P^{-1}D^{100}P\mathbf{v}_0.$$

Para hallar este vector, que es lo que pide el ejercicio, sólo nos queda calcular P^{-1}. El cálculo arroja la siguiente matriz,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{100} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ -100 \\ 2000 \\ 50000 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 1100 \\ 100 \\ 49100 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 900 \\ 1100 \\ 100 \cdot 2^{100} \\ 49100 \cdot 2^{100} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 100 \cdot 2^{100} + 900 \\ -100 \cdot 2^{100} \\ 2000 \\ 49100 \cdot 2^{100} + 900 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.–

1. Demostrad que existe una única aplicación afín $f\colon \mathbf{A}^4(\mathbf{R}) \to \mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ que satisface las siguientes ecuaciones:

$$f(1,1,0,0) = (1,3,0,1); \qquad f(1,0,1,0) = (3,-1,-1,-1); \qquad f(1,0,0,1) = (1,1,0,3);$$
$$f(0,1,0,1) = (0,2,0,2); \qquad f(0,0,1,0) = (2,-2,-1,-2).$$

2. Calculad la matriz de f respecto del sistema de referencia canónico. ¿Es f una afinidad?

3. Calculad los puntos fijos de f.

4. Sea $\pi \subset \mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ el subespacio afín definido por las ecuaciones

$$\pi\colon \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_3 = 4. \end{array} \right.$$

   Calculad la dimensión de π, sus ecuaciones paramétricas y una base de $D(\pi)$.

5. Escoged un punto $P \in \pi$ y calculad la posición relativa de π y $\pi' = f(P) + \overrightarrow{f}(D(\pi))$. ¿Son perpendiculares?

6. ¿Existen perpendiculares comunes a π y π'? Si existen calculad alguna, decid qué dimensión tiene y discutid su unicidad.

La aplicación f existirá y será única siempre que

$$\{(1,1,0,0); (1,0,1,0); (1,0,0,1); (0,1,0,1); (0,0,1,0)\} \subset \mathbf{A}^4(\mathbf{R})$$

sea un sistema de referencia. Ello equivale a decir que el determinante de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es no trivial, de hecho $|B| = 1 \neq 0$.

Una vez garantizada la existencia y unicidad de f obervamos que las ecuaciones del apartado 1 equivalen a decir que si A' es la matriz de f respecto del sistema de referencia canónico y

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces $AB = C$, luego

$$A' = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right),$$

donde A es la matriz del primer ejercicio de estas notas para $a = 0$. En particular $\overrightarrow{f} = g\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ es el endomorfismo del primer ejercicio. Este endomorfimo no tenía autovalores nulos, así que es invertible, por tanto f es una afinidad.

Un punto $P \in \mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ es fijo si y sólo si $f(P) = P$, es decir,

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline P \end{array}\right) = A' \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline P \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & AP \end{array}\right),$$

lo cual equivale a $P = AP$, i.e. a que P sea un autovector de A asociado al autovalor 1. El conjunto de estos autovectores se calculó en el primer ejercicio,

$$V(1) = \{(\lambda, -\lambda, 0, -\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{A}^4(\mathbf{R}).$$

Estos son pues los puntos fijos de f.

Las ecuaciones de π equivalen a

$$\pi\colon \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_3 = 1, \end{array} \right.$$

por tanto

$$\dim \pi = 4 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

es decir, π es un plano.

Para calcular las ecuaciones paramétricas basta calcular un punto de π, por ejemplo $P = (1, 0, 1, 0) \in \pi$, y una base de su espacio de direcciones, que está definido por las ecuaciones

$$\pi\colon \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_3 = 0, \end{array} \right.$$

así que podemos tomar la base $\{(0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\} \subset D(\pi)$. Obsérvese que según el ejercicio 1 $D(\pi) = V(2) \subset \mathbf{R}^4$ es el subespacio invariante asociado al autovalor 2 de $\overrightarrow{f} = g$, luego $\overrightarrow{f}(D(\pi)) = D(\pi)$, en particular,

$$\pi' = f(P) + \overrightarrow{f}(D(\pi)) = (3, -1, -1, -1) + D(\pi),$$

así que π y π' son planos paralelos. Ello implica que no son perpendiculares.

Para que exista una perpendicular común es necesario y suficiente que π y π' no se corten. Si se cortasen serían el mismo plano ya que son paralelos, pero se observa claramente a partir de las ecuaciones de π que $f(P) \notin \pi$ pero $f(P) \in \pi'$, por tanto $\pi \cap \pi' = \emptyset$, es decir, los dos planos no se cortan, así que existen perpendiculares comunes, pero no hay una única ya que $D(\pi) \cap D(\pi') = D(\pi) \neq \{\mathbf{0}\}$.

El espacio de direcciones de una perpendicular común cualquiera $L \subset \mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ es

$$D(L) = D(\pi)^\perp \cap D(\pi')^\perp = D(\pi)^\perp\colon \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Una base de este espacio es por tanto $\{(1,0,0,0); (0,0,1,0)\} \subset D(L)$, por tanto L tiene dimensión 2, es un plano.

Tomamos los puntos $P \in \pi$ y $Q = f(P) \in \pi'$. Descomponemos el vector $\overrightarrow{PQ} = (2,-1,-2,-1)$ según la descomposición en suma directa $\mathbf{R}^4 = D(\pi) \oplus D(L)$,

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = (0,-1,0,-1) \in D(\pi), \quad \mathbf{v} = (2,0,-2,0) \in D(L).$$

Una perpendicular común será el plano siguiente,

$$L = (P + \mathbf{u}) + D(L) = (1,-1,1,-1) + \langle (1,0,0,0); (0,0,1,0) \rangle.$$

El punto de corte con π es $P+\mathbf{u} = (1,-1,1,-1)$ y el punto de corte con π' es $Q = (3,-1,-1,-1) \in \pi'$.