

Ejercicio 8.— En el espacio euclídeo $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ se consideran los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned} L_1 &: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \\ L_2 &= (1, -1, 3, 3) + \langle (2, 0, 2, -1); (1, 3, 1, 4) \rangle, \\ L_3 &= (1, -2, 5, 0) + \langle (1, 1, 1, 2) \rangle. \end{aligned}$$

1. Averiguad si $L_1 \perp L_2$.
2. Hallad los hiperplanos que contienen a L_3 y son paralelos a L_1 . ¿Cuántos hay?
3. Dad una condición para que tenga más de una solución el problema de hallar un hiperplano que contenga a una recta y sea paralelo a un plano, en $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$.
4. Hallad una perpendicular común a L_2 y a L_3 . ¿Cuántas hay?

Para hallar una base de $D(L_1)$ resolvemos el sistema que lo define,

$$D(L_1): \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 = -x_3 + \frac{1}{2}x_4, \quad x_2 = -\frac{3}{2}x_4.$$

Así, haciendo $x_3 = 1, x_4 = 0$, y $x_3 = 0, x_4 = 2$, obtenemos una base,

$$\{(-1, 0, 1, 0); (1, -3, 0, 2)\} \subset D(L_1).$$

De aquí deducimos fácilmente que $L_1 \perp L_2$ ya que los vectores de la base de $D(L_1)$ son perpendiculares a los generadores de $D(L_2) = \langle (2, 0, 2, -1); (1, 3, 1, 4) \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle (-1, 0, 1, 0), (2, 0, 2, -1) \rangle &= 0, \\ \langle (-1, 0, 1, 0), (1, 3, 1, 4) \rangle &= 0, \\ \langle (1, -3, 0, 2), (2, 0, 2, -1) \rangle &= 0, \\ \langle (1, -3, 0, 2), (1, 3, 1, 4) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Si $H \subset \mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ es un hiperplano ta que $L_3 \subset H$ entonces,

$$\begin{aligned} (1, -2, 5, 0) &\in H, \\ (1, 1, 1, 2) &\in D(H). \end{aligned}$$

Es más, si H es paralelo a L_1 ,

$$\{(-1, 0, 1, 0); (1, -3, 0, 2)\} \subset D(H).$$

Como,

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

tenemos que

$$\{(1, 1, 1, 2); (-1, 0, 1, 0); (1, -3, 0, 2)\} \subset D(H)$$

es linealmente independiente, y ha de ser una base ya que $\dim H = 3$, por tanto H ha de ser forzosamente

$$H = (1, -2, 5, 0) + \langle (1, 1, 1, 2); (-1, 0, 1, 0); (1, -3, 0, 2) \rangle.$$

Para que exista más de un hiperplano $H \subset \mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ que contenga a una recta r y sea paralelo a un plano π ha de suceder que r sea paralela a π , es decir, $D(r) \subset D(\pi)$. En caso contrario $D(r) \cap D(\pi) = \{\mathbf{0}\}$, luego $D(H) = D(r) \oplus D(\pi)$, y H será necesariamente

$$H = P + D(r) \oplus D(\pi),$$

donde $P \in r$ es un punto cualquiera. En cambio si $D(r) \subset D(\pi)$ para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$, $\mathbf{v} \notin D(\pi)$, el hiperplano

$$H = P + D(\pi) \oplus \langle \mathbf{v} \rangle$$

contiene a r y es paralelo a π .

Para que exista alguna perpendicular común a L_2 y a L_3 ha de suceder que $L_2 \cap L_3 = \emptyset$. Veamos por reducción al absurdo que esta intersección es vacía. Si no lo fuera,

$$\dim(L_2 + L_3) = \dim L_2 + \dim L_3 - \dim(L_2 \cap L_3) \leq 3.$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} \dim(L_2 + L_3) &= \dim D(L_2 + L_3) \\ &= \dim(D(L_2) + D(L_3) + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle), \quad P = (1, -1, 3, 3), \quad Q = (1, -2, 5, 0), \\ &= \dim\langle (2, 0, 2, -1); (1, 3, 1, 4); (1, 1, 1, 2); (0, -1, 2, -3) \rangle \\ &= \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 4, \end{aligned}$$

ya que,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

De paso deducimos que,

$$\{(2, 0, 2, -1); (1, 3, 1, 4); (1, 1, 1, 2)\} \subset D(L_2) + D(L_3),$$

es una base, pues es un sistema de generadores y además es linealmente independiente porque está contenido en un conjunto linealmente independiente, luego,

$$\dim(D(L_2) \cap D(L_3)) = \dim D(L_2) + \dim D(L_3) - \dim(D(L_2) + D(L_3)) = 2 + 1 - 3 = 0,$$

así que la perpendicular común Z a L_2 y L_3 es única.

Para determinarla hallamos una base de,

$$D(Z) = (D(L_2) \oplus D(L_3))^\perp : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es,

$$x_1 = -x_3, \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

luego $D(Z) = \langle (1, 0, -1, 0) \rangle$. Así, tenemos una base adaptada a la descomposición en suma directa,

$$\mathcal{B} = \{(2, 0, 2, -1); (1, 3, 1, 4); (1, 1, 1, 2); (1, 0, -1, 0)\} \subset \mathbf{R}^4 = D(L_2) \oplus D(L_3) \oplus D(Z),$$

$$\mathbf{v}_1 = (2, 0, 2, -1) \in D(L_2),$$

$$\mathbf{v}_2 = (1, 3, 1, 4) \in D(L_2),$$

$$\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 2) \in D(L_3),$$

$$\mathbf{v}_4 = (1, 0, -1, 0) \in D(Z).$$

Tomamos puntos $R \in L_2$ y $S \in L_3$, por ejemplo $R = (1, -1, 3, 3)$ y $S = (1, -2, 5, 0)$. Para hallar los pies de Z hemos de expresar

$$\overrightarrow{RS} = (0, -1, 2, -3)$$

como combinación lineal de los vectores de \mathcal{B} . Si \mathcal{B}_c es la base canónica,

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

por tanto las coordenadas $\overrightarrow{RS}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ son las soluciones del sistema,

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3, \end{cases}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -1.$$

De aquí obtenemos,

$$\overrightarrow{RS} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4,$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \in D(L_2),$$

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_3 \in D(L_3),$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{v}_4 \in D(Z),$$

así que los pies de la perpendicular común Z son,

$$P = R + \mathbf{u}_1 = (3, -1, 5, 2) \in L_2,$$

$$Q = S - \mathbf{u}_2 = (2, -1, 6, 2) \in L_3,$$

luego,

$$Z = P + D(Z) = (3, -1, 5, 2) + \langle (1, 0, -1, 0) \rangle$$

$$= Q + D(Z) = (2, -1, 6, 2) + \langle (1, 0, -1, 0) \rangle.$$

Aunque no lo pide el enunciado del problema, estamos en disposición de calcular la distancia entre L_2 y L_3 ,

$$d(L_2, L_3) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(-1, 0, 1, 0)\| = \sqrt{2}.$$

Ejercicio 9.– Supongamos que el universo U es un espacio euclídeo de dimensión $n > 3$, que la tierra es un subespacio afín $T \subset U$ de dimensión 3 y que existe otra tierra $T' \subset U$ de dimensión 3 que no es paralela a T .

1. Discutid en los casos $n = 3$ y $n = 4$ la posibilidad de que $T \cap T' = \emptyset$ y de que $T \cap T' = \{P\}$ sea un punto común.
2. Sea $n = 5$ y, respecto de un sistema de referencia de U fijado,

$$T: \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_5 = 1, \end{cases} \quad T': \begin{cases} x_1 + x_4 = 1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

- (a) ¿Desde qué puntos del universo, que no estén en T ni en T' , se puede emitir un rayo que toque a las dos tierras T y T' ?
- (b) Hallad un punto de T desde donde sería lo más económico posible emitir un rayo que llegara a T' .

Como T y T' no son paralelas $D(T) \neq D(T')$, por lo que

$$\dim D(T) \cap D(T') \leq 2.$$

Si $T \cap T' = \emptyset$, entonces,

$$n \geq \dim(T + T') = \dim T + \dim T' + 1 - \dim(D(T) \cap D(T')) \geq 3 + 3 + 1 - 2 = 5.$$

Por tanto si $n = 4$ las dos tierras se tienen que cortar, pero si $n = 5$ no necesariamente, como veremos que ocurre en el caso concreto planteado en el segundo apartado del enunciado.

Si $T \cap T' = \{P\}$ es un punto, entonces,

$$n \geq \dim(T + T') = \dim T + \dim T' - \dim(T \cap T') = 3 + 3 - 0 = 6,$$

por tanto esta situación no puede ocurrir para $n = 4, 5$.

Pasemos al segundo apartado. En este caso está claro que $T \cap T' = \emptyset$ ya que no puede ocurrir que $0 = x_4 = 1$. Además estas dos tierras no son paralelas puesto que sus espacios de direcciones,

$$D(T): \begin{cases} x_4 = 0, \\ x_5 = 0, \end{cases} \quad D(T'): \begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

tienen dimensión $5 - 2 = 3$, mientras que su intersección,

$$D(T) \cap D(T'): \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0, \end{cases}$$

tiene dimensión $5 - 3 = 2$.

Tomemos bases,

$$\begin{aligned} \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0)\} &\subset D(T), \\ \{(0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} &\subset D(T'), \\ \{(1, 0, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0, 0); (0, 0, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1)\} &\subset D(T) + D(T'). \end{aligned}$$

Las dos primeras bases se han calculado usando el método conocido que nos permite hallar una base de un subespacio vectorial definido por un sistema de ecuaciones homogéneas. Para hallar una base de la suma hemos unido las bases de los factores, como el resultado es siempre un sistema generador, que en este caso tiene 4 elementos, y sabemos que la suma tiene dimensión,

$$\dim(D(T) + D(T')) = \dim D(T) + \dim D(T') - \dim(D(T) \cap D(T')) = 3 + 3 - 2 = 4,$$

entonces la unión es una base. Se observa de manera inmediata a partir de esta base que la suma está definida por la siguiente ecuación,

$$D(T) + D(T') : x_4 = 0.$$

Centrémonos en el apartado 2 (a). Lo resolveremos por exclusión, es decir, hallaremos los puntos desde los que no se puede emitir un rayo que pase por las dos tierras. Dados $R \in T$ y $S \in T'$ cualesquiera,

$$\dim(D(T) + D(T') + \langle \overrightarrow{RS} \rangle) = \dim(T + T') = \dim T + \dim T' + 1 - \dim(D(T) \cap D(T')) = 5,$$

por tanto, $D(U) = D(T) + D(T') + \langle \overrightarrow{RS} \rangle$.

Una recta de U pasa por T y no por T' si está definida por un punto $R \in T$ y por una dirección $\mathbf{v} \in D(T) + D(T')$, $r = T + \langle \mathbf{v} \rangle$. Las ecuaciones que definen T muestran que R es de la forma $R = (a, b, c, 0, 1)$ por tanto r es cualquier recta contenida en el hiperplano $\{x_4 = 0\} \subset U$.

Análogamente una recta de U pasa por T' y no por T si está definida por un punto $S \in T'$ y por una dirección $\mathbf{v} \in D(T) + D(T')$, $r' = Q + \langle \mathbf{v} \rangle$. Las ecuaciones que definen T' muestran que S es de la forma $S = (0, a, b, 1, c)$ por tanto r' es cualquier recta contenida en el hiperplano $\{x_4 = 1\} \subset U$.

Concluimos que el conjunto de puntos del universo U desde los que se puede lanzar un rayo que pase por T y por T' es $U - (\{x_4 = 0\} \cup \{x_4 = 1\})$.

Con respecto a 2 (b), entendemos por 'económico' que la distancia que recorra el rayo para llegar de T a T' sea mínima, es decir, que el punto de partida de T sea un pie de una perpendicular común. Como $T \cap T' = \emptyset$ existen perpendiculares comunes, y al ser $D(T) \cap D(T') \neq \{\mathbf{0}\}$ hay infinitas. Para hallar un pie calculamos,

$$D(Z) = (D(T) + D(T'))^\perp : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Una base es $\{(0, 0, 0, 1, 0)\} \subset D(Z)$.

Escogemos puntos $R \in T$ y $S \in T'$, por ejemplo $R = (0, 0, 0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, 0, 1, 0)$, y descomponemos,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} &= (0, 0, 0, 1, -1) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0) \in D(T) \\ &\quad + (0, 0, 0, 0, -1) \in D(T') \\ &\quad + (0, 0, 0, 1, 0) \in D(Z).\end{aligned}$$

Podemos tomar como pies de Z los siguientes puntos,

$$\begin{aligned}P &= R + (0, 0, 0, 0, 0) = R = (0, 0, 0, 0, 1) \in T, \\ Q &= S - (0, 0, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 1, 1) \in T' .\end{aligned}$$

Desde $P \in T$ se puede trazar un rayo que recorrería una distancia mínima hasta llegar a T' . El punto de llegada sería $Q \in T'$. Aunque no se nos pregunta por ello, esa distancia mínima sería,

$$d(T, T') = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(0, 0, 0, 1, 0)\| = 1.$$

Ejercicio 10.– En el espacio euclídeo $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ consideramos los planos siguientes:

$$\pi_1: \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = -1, \end{cases} \quad \pi_2 = (0, 0, 0, 0) + \langle (1, 2, 1, 1); (1, 0, 0, 0) \rangle.$$

1. Estudiad su posición relativa.
2. Determinad una perpendicular común a ambos planos y sus respectivos pies. ¿Es única? Hallad la distancia entre ambos planos.

En efecto, π_1 y π_2 son planos porque tienen dimensión,

$$\dim \pi_1 = \dim \mathbf{R}^4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2,$$

$$\dim \pi_2 = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Unas ecuaciones paramétricas de π_2 son las siguientes,

$$(0, 0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 1, 1) + \mu(1, 0, 0, 0) = (\lambda + \mu, 2\lambda, \lambda, \lambda), \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R},$$

es decir,

$$\pi_2 = \{(\lambda + \mu, 2\lambda, \lambda, \lambda) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

Para calcular $\pi_1 \cap \pi_2$ sustituimos un punto genérico de π_2 en las ecuaciones que definen π_1 ,

$$\begin{cases} -4 = (\lambda + \mu) + 2\lambda - 3\mu, \\ -1 = (\lambda + \mu) + 2\lambda - 3\mu. \end{cases}$$

Estas ecuaciones son incompatibles ya que $-4 \neq -1$, por tanto $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. En particular existe alguna perpendicular común.

Las ecuaciones de $D(\pi_1)$ son,

$$D(\pi_1): \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Es inmediato ver que $(1, 2, 1, 1) \in D(\pi_1)$, pero $(1, 0, 0, 0) \notin D(\pi_1)$, por tanto $D(\pi_1) \neq D(\pi_2)$ y $D(\pi_1) \cap D(\pi_2) \neq \{\mathbf{0}\}$, luego

$$0 < \dim D(\pi_1) \cap D(\pi_2) < 2,$$

es decir,

$$\dim D(\pi_1) \cap D(\pi_2) = 1,$$

por tanto $D(\pi_1) \cap D(\pi_2) = \langle (1, 2, 1, 1) \rangle$. Como $D(\pi_1) \cap D(\pi_2) \neq \{\mathbf{0}\}$ la perpendicular común no será única.

Para hallar una perpendicular común Z hallemos primero una base de $D(\pi_1)$. Para ello resolvemos el sistema que lo define,

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{x_1 + x_2}{3}, \\x_4 &= \frac{x_1 + x_2}{3}.\end{aligned}$$

Dando primero los valores $x_1 = 1, x_2 = 0$, y luego $x_1 = 0, x_2 = 1$, obtenemos la base

$$\left\{ \left(1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); \left(0, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\} \subset D(\pi_1),$$

que por simplicidad cambiamos por,

$$\{(3, 0, 1, 1); (0, 3, 1, 1)\} \subset D(\pi_1).$$

Hallemos ahora una base de $D(\pi_1) + D(\pi_2) = \langle (3, 0, 1, 1); (0, 3, 1, 1); (1, 2, 1, 1); (1, 0, 0, 0) \rangle$,

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

ya que esta matriz tiene dos filas iguales pero,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Una base de la suma de los espacios de direcciones de los dos planos es por tanto,

$$\{(0, 3, 1, 1); (1, 0, 0, 0); (1, 2, 1, 1)\} \subset D(\pi_1) + D(\pi_2),$$

$$(0, 3, 1, 1) \in D(\pi_1),$$

$$(1, 0, 0, 0) \in D(\pi_2),$$

$$(1, 2, 1, 1) \in D(\pi_1) \cap D(\pi_2).$$

Ahora podemos hallar $D(Z) = (D(\pi_1) + D(\pi_2))^\perp$, ya que sus ecuaciones son,

$$D(Z) : \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo obtenemos,

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

$$x_3 = -x_4,$$

de donde deducimos que $D(Z) = \langle (0, 0, 1, -1) \rangle$. Consideramos pues la siguiente base de \mathbb{R}^4 adaptada a la descomposición en suma directa indicada,

$$\mathcal{B} = \{(0, 3, 1, 1); (1, 0, 0, 0); (1, 2, 1, 1); (0, 0, 1, -1)\} \subset (D(\pi_1) + D(\pi_2)) \oplus D(Z).$$

Tomamos dos puntos $R \in \pi_1$ y $S \in \pi_2$. Podemos tomar $S = (0, 0, 0, 0)$, que por definición pertenece a π_1 , y $R = (-4, 0, 0, -1)$, que satisface las ecuaciones que definen π_2 .

Hemos de descomponer $\overrightarrow{RS} = (4, 0, 0, 1)$ como combinación lineal de los vectores de la base \mathcal{B} , es decir, hallar las coordenadas de este vector respecto de \mathcal{B} . Si \mathcal{B}_c es la base canónica sabemos que,

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

por tanto las coordenadas $\overrightarrow{RS}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ son las soluciones del sistema,

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = \frac{5}{2} \qquad x_3 = \frac{3}{2}, \qquad x_4 = -\frac{1}{2},$$

en definitiva,

$$\overrightarrow{RS} = -(0, 3, 1, 1) + \frac{5}{2}(1, 0, 0, 0) + \frac{3}{2}(1, 2, 1, 1) - \frac{1}{2}(0, 0, 1, -1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{v},$$

$$\mathbf{u}_1 = -(0, 3, 1, 1) = (0, -3, -1, -1) \in D(\pi_1),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{5}{2}(1, 0, 0, 0) + \frac{3}{2}(1, 2, 1, 1) = (4, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \in D(\pi_2),$$

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{2}(0, 0, 1, -1) = (0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in D(Z).$$

Los pies $P \in \pi_1$ y $Q \in \pi_2$ de la perpendicular común Z los podemos tomar como,

$$P = R + \mathbf{u}_1 = (-4, 0, 0, -1) + (0, -3, -1, -1) = (-4, -3, -1, -2),$$

$$Q = S - \mathbf{u}_2 = (0, 0, 0, 0) - (4, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = (-4, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}).$$

Esto nos resuelve por un lado la cuestión de hallar la perpendicular común,

$$\begin{aligned} Z &= P + D(Z) = (-4, -3, -1, -2) + \langle (0, 0, 1, -1) \rangle \\ &= Q + D(Z) = (-4, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) + \langle (0, 0, 1, -1) \rangle, \end{aligned}$$

y por otro lado nos permite calcular la distancia entre ambos planos,

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Los pies de la perpendicular no son únicos. Podríamos haber obtenido otros tomando,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= -(0, 3, 1, 1) + \frac{3}{2}(1, 2, 1, 1) = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in D(\pi_1), \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{5}{2}(1, 0, 0, 0) = (\frac{5}{2}, 0, 0, 0) \in D(\pi_2), \\ \mathbf{v} &= -\frac{1}{2}(0, 0, 1, -1) = (0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in D(Z).\end{aligned}$$

Los pies $P \in \pi_1$ y $Q \in \pi_2$ de la perpendicular común Z los podemos tomar como,

$$\begin{aligned}P &= R + \mathbf{u}_1 = (-4, 0, 0, -1) + (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \\ Q &= S - \mathbf{u}_2 = (0, 0, 0, 0) - \frac{5}{2}(1, 0, 0, 0) = (-\frac{5}{2}, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Estos otros pies dan lugar a otra perpendicular común,

$$\begin{aligned}Z &= P + D(Z) = (-\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) + \langle(0, 0, 1, -1)\rangle \\ &= Q + D(Z) = (-\frac{5}{2}, 0, 0, 0) + \langle(0, 0, 1, -1)\rangle.\end{aligned}$$

La distancia sin embargo no depende de los pies escogidos,

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 11.– En el espacio euclídeo $\mathbf{A}^4(\mathbf{R})$ consideramos la recta r y el plano π :

$$r = (1, 0, 0, 0) + \langle (a, 0, 0, 1) \rangle, \quad \pi_2 = (1, 4, 0, 5) + \langle (1, 2, 0, 3); (2, 3, 0, 4) \rangle.$$

Aquí $a \in \mathbf{R}$ es un parámetro.

1. Determinad la posición relativa de r y π según los valores de a .
2. Discutid la existencia y unicidad de una perpendicular común a r y a π según los valores de a .
3. Para $a = -1$, hallad la distancia entre r y π .

Por un lado,

$$r = \{(1 + \lambda a, 0, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Por otro, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in D(\pi)$ si y sólo si,

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

lo cual, por el método del orlado, al ser

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0,$$

es equivalente a decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = -x_3, \\ 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = -x_1 + 2x_2 - x_4, \end{array} \right.$$

luego,

$$D(\pi) : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

en particular $(a, 0, 0, 1) \in D(\pi)$ si y sólo si $a = -1$, es decir,

$$D(r) \cap D(\pi) = \begin{cases} \langle (a, 0, 0, 1) \rangle = D(r), & \text{si } a = -1, \text{ en cuyo caso } r \text{ y } \pi \text{ son paralelos,} \\ \{\mathbf{0}\}, & \text{si } a \neq -1. \end{cases}$$

Sabemos que las ecuaciones de π son de la forma,

$$\pi : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = \alpha, \\ x_3 = \beta, \end{cases}$$

así que como $(1, 4, 0, 5) \in \pi$,

$$\pi : \begin{cases} \alpha = -2, \\ \beta = 0, \end{cases}$$

luego,

$$\pi : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -2, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

Para hallar $r \cap \pi$ sustituimos en estas ecuaciones un punto genérico de r ,

$$\begin{cases} 1 + \lambda a + \lambda = -2 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Si $a = -1$ estas ecuaciones son incompatibles pues $1 \neq -2$ así que $r \cap \pi = \emptyset$, en caso contrario, hay un punto común para $\lambda = -\frac{3}{a+1}$, es decir $r \cap \pi = \{(\frac{a-2}{a+1}, 0, 0, \frac{3}{a+1})\}$. Por tanto sólo existe una perpendicular común a r y a π si $a = -1$ y no es única ya que en este caso $D(r) \cap D(\pi) \neq \{\mathbf{0}\}$.

En adelante sea $a = -1$. Para calcular $d(r, \pi)$ hallamos los pies de una perpendicular común Z . El conjunto de generadores,

$$\{(-1, 0, 0, 1); (1, 2, 0, 3); (2, 3, 0, 4)\} \subset D(r) + D(\pi),$$

no es una base. En efecto,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

pero

$$\text{rango} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2,$$

por el método del orlado, ya que

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(8 - 9) + (3 - 4) = 1 = 0.$$

De aquí deducimos que

$$\{(-1, 0, 0, 1); (1, 2, 0, 3)\} \subset D(r) + D(\pi)$$

sí es una base. Es más,

$$D(Z) = (D(r) + D(\pi))^\perp : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -x_1 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Resolvemos este sistema,

$$x_1 = x_4, \quad x_2 = -2x_4.$$

Haciendo $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, y luego $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, obtenemos una base,

$$\{(0, 0, 1, 0); (1, -2, 0, 1)\} \subset D(Z).$$

Una base de \mathbf{R}^4 adaptada a la descomposición en suma directa es la siguiente,

$$\mathcal{B} = \{(-1, 0, 0, 1); (1, 2, 0, 3); (0, 0, 1, 0); (1, -2, 0, 1)\} \subset \mathbf{R}^4 = (D(r) + D(\pi)) \oplus D(Z),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (-1, 0, 0, 1) \in D(r) \subset D(\pi), \\ \mathbf{v}_2 &= (1, 2, 0, 3) \in D(\pi), \\ \mathbf{v}_3 &= (0, 0, 1, 0) \in D(Z), \\ \mathbf{v}_4 &= (1, -2, 0, 1) \in D(Z). \end{aligned}$$

Tomemos $R \in r$ y $S \in \pi$, por ejemplo $R = (1, 0, 0, 0)$ y $S = (1, 4, 0, 5)$, y hallemos las coordenadas de

$$\overrightarrow{RS} = (0, 4, 0, 5),$$

respecto de \mathcal{B} . Si $\mathcal{B}_c \subset \mathbf{R}^4$ es la base canónica, como

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si denotamos $\overrightarrow{RS}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_2 - 2x_4 = 4, \\ x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = -\frac{1}{2},$$

así que,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RS} &= \mathbf{v}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}, \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0) \in D(r), \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, 3, 0, \frac{11}{2}\right) \in D(\pi), \\ \mathbf{v} &= -\frac{1}{2}\mathbf{v}_4 \in D(Z), \end{aligned}$$

luego podemos tomar como pies de Z los puntos siguientes,

$$\begin{aligned} P &= R + \mathbf{v}_1 = R = (1, 0, 0, 0) \in r, \\ Q &= S - \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}\right) \in \pi, \end{aligned}$$

y a partir de aquí calculamos la distancia entre la recta r y el plano π ,

$$d(r, \pi) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2} \right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

También podríamos haber tomado,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 = (-1, 0, 0, 1) \in D(r), \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{3}{2}\mathbf{v}_2 = \left(\frac{3}{2}, 3, 0, \frac{9}{2} \right) \in D(\pi), \\ \mathbf{v} &= -\frac{1}{2}\mathbf{v}_4 \in D(Z), \end{aligned}$$

de donde hubieran salido otros pies de una perpendicular común Z ,

$$\begin{aligned} P &= R + \mathbf{v}_1 = R = (0, 0, 0, 1) \in r, \\ Q &= S - \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2} \right) \in \pi. \end{aligned}$$

Observamos que a partir se obtiene, como debe de ser, el mismo cálculo de la distancia entre la recta r y el plano π ,

$$d(r, \pi) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2} \right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$