Ejercicio 10.– Sea k un cuerpo y $f\colon k^4 \longrightarrow k^4$ el endomorfismo cuya matriz respecto de la base canónica es,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Demostrad que para $k = \mathbf{C}$ que el endomorfismo f es diagonalizable.
2. Para $k = \mathbf{C}$ hallad una matriz diagonal D y otra invertible P tal que $D = P^{-1}AP$.
3. Demostrad que f no es diagonalizable sobre $\mathbf{R}$.

Para abordar el problema el primer paso es calcular los autovalores de f. El polinomio característico de f es,

$$\begin{aligned}
p(x) &= \begin{vmatrix} x-6 & -6 & -4 & -4 \\ 4 & x+2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & x+2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & x+2 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 4 \\ 2 & x+2 & -2 \\ 4 & 4 & x+2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -6 & -4 & -4 \\ 2 & x+2 & -2 \\ 4 & 4 & x+2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -6 & -4 & -4 \\ x+2 & 0 & 4 \\ 2 & x+2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (x-6)(x^3+6x^2+12x+8+32-16x-32+8x+16) \\
&\quad - 4(-6x^2-24x-24-32+32+16x+32-48+8x+16) \\
&\quad - 4(-4x^2-16x-16-32+24x+48-8x-16) \\
&= (x-6)(x^3+6x^2+4x+24) - 4(-6x^2-24) - 4(-4x^2-16) \\
&= x^4+6x^3+4x^2+24x-6x^3-36x^2-24x-144+24x^2+96+16x^2+64 \\
&= x^4+8x^2+16 \\
&= (x^2+4)^2.
\end{aligned}$$

Este polinomio no tiene raíces reales, por tanto si $k = \mathbb{R}$ entonces f no tiene autovalores ni autovectores, así que no es diagonalizable. En cambio si $k = \mathbf{C}$,

$$p(x) = (x^2+4)^2 = (x+2i)^2(x-2i)^2 \in \mathbf{C}[x],$$

luego f tiene 2 autovalores, complejos conjugados $\pm 2i$, ambos con multiplicidad 2.

Para ver si f es diagonalizable tenemos que calcular la dimensión de los subespacios invariantes de los dos autovalores,

$$V_{2i}: \begin{pmatrix} 2i-6 & -6 & -4 & -4 \\ 4 & 2i+2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2i+2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 2i+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dim V_{2i} = 4 - \text{rango} \begin{pmatrix} 2i-6 & -6 & -4 & -4 \\ 4 & 2i+2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2i+2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & 2i+2 \end{pmatrix}.$$

Claculasemos este rango por el método del orlado,

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2i+2 \end{vmatrix} = 8i + 8 \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2i+2 & 0 \\ 0 & 2 & 2i+2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 32i - 32i - 32 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2i+2 & -2 \\ 4 & 4 & 2i+2 \end{vmatrix} = 32i - 32i - 32 + 32 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2i-6 & -6 & -4 \\ 4 & 2i+2 & 0 \\ 0 & 2 & 2i+2 \end{vmatrix} = -16 - 48i - 32 + 48i + 48 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2i-6 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2i+2 & -2 \end{vmatrix} = -32i - 32 + 64 + 32i - 32 = 0,$$

por tanto el rango es 2 y $\dim V_{2i} = 4 - 2 = 2$. Es más, podemos prescindir de la primera y de la última ecuación, de modo que

$$V_{2i}\colon \begin{cases} 4x_1 + (2i+2)x_2 + 4x_4 = 0, \\ 2x_2 + (2i+2)x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Podemos despejar x_1 y x_3 en función de x_2 y x_4,

$$x_1 = -\frac{1}{2}(1+i)x_2 - x_4, \qquad\qquad x_3 = -\frac{1}{2}(1-i)x_2 + \frac{1}{2}(1-i)x_4.$$

Haciendo $x_2 = 2$, $x_4 = 0$, y $x_2 = 0$, $x_4 = 2$, obtenemos una base de V_{2i},

$$\{(-1-i, 2, -1+i, 0); (-2, 0, 1-i, 2)\} \subset V_{2i}.$$

Como A es una matriz de números reales, si $\mathbf{v}$ es un autovector asociado al autovalor α, es decir $A\mathbf{v} = f(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$, entonces tomando conjugados a ambos lados vemos que $A\bar{\mathbf{v}} = f(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\alpha}\bar{\mathbf{v}}$, por tanto $\bar{\mathbf{v}}$ es un autovector asociado al autovalor $\bar{\alpha}$. En particular los siguientes son autovectores asociados a $-2i$,

$$\{(-1+i, 2, -1-i, 0); (-2, 0, 1+i, 2)\} \subset V_{-2i}.$$

Es inmediato ver que estos dos vectores son linealmente independientes, así que como $1 \leq \dim V_{-2i} \leq 2$, tenemos que en efecto $\dim V_{-2i} = 2$ y que estos dos vectores forman una base.

Como las dimensiones de los subespacios invariantes coinciden con la multiplicidad de los respectivos autovalores f es diagonalizable. Es más, $\mathbf{C}^4 = V_{2i} \oplus V_{-2i}$ y la siguiente es una base de autovectores,

$$\mathcal{B} = \{(-1-i, 2, -1+i, 0); (-2, 0, 1-i, 2); (-1+i, 2, -1-i, 0); (-2, 0, 1+i, 2)\} \subset \mathbf{C}^4,$$

tal que,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{B}_c \subset \mathbf{C}^4$ es la base canónica y $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c)$, que es invertible, entonces

$$P^{-1}AP = M(\mathcal{B}_c, \mathcal{B}) M_{\mathcal{B}_c}(f) M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) = M_{\mathcal{B}}(f) = D.$$

La matriz P es aquella cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$,

$$P = \begin{pmatrix} -1-i & -2 & -1+i & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1+i & 1-i & -1-i & 1+i \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$