Ejercicio 1.– Sea $f\colon \mathbf{A}^3(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ la afinidad cuya matriz respecto del sistema de referencia canónico es,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 12 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Calculad los puntos, planos y rectas fijas de f.
2. ¿Existe algún plano fijo $H \subset \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ tal que $f_{|_H} : H \longrightarrow H$ sea una homotecia? Si es el caso, calculadlos y determinad el centro y la razón de cada homotecia.

El punto $(x, y, z) \in \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ es fijo si y sólo si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 12 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Esto se traduce en el sistema de ecuaciones siguiente,

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +2y & +z & = & 0, \\ & y & & = & -1, \\ 12x & +8y & +5z & = & 2, \end{array} \right.$$

cuya única solución es $(0, -1, 2)$, por tanto el subespacio afín de puntos fijos es $D_f = \{(0, -1, 2)\} \subset \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$.

Sabemos que $H : a_0 + a_1x + a_2y + a_3z = 0$ es un plano fijo si y sólo si (a_0, a_1, a_2, a_3) es un autovector de A^t **que no es múltiplo del autovector trivial** $(1, 0, 0, 0)$, asociado al autovalor 1. Para hallar los planos fijos calculamos primeros sus autovalores usando el polinomio característico,

$$p(x) = |xI_4 - A^t| = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & x+1 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & x-2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & x-6 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -12 \\ 2 & x-2 & -8 \\ 1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$$
$$= (x-1)(x-2) \begin{vmatrix} x+1 & -12 \\ 1 & x-6 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)^2(x-3).$$

Hay tres autovalores, 1 con multiplicidad 1, 2 con multiplicidad 2 y 3 con multiplicidad 1. Pasamos ahora a hallar los subespacios invariantes.

Como 1 tiene multiplicidad 1, $V_1 = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$, así que no existe ningún plano fijo asociado a este autovalor.

Para el autovalor 2,

$$V_2 : (2I_4 - A^t)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = & 0, \\ & 3x_2 & & -12x_4 & = & 0, \\ & 2x_2 & & -8x_4 & = & 0, \\ & x_2 & & -4x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

De aquí deducimos que

$$V_2 = \{(a-2b, -4b, a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\} \supset \{(1,0,1,0); (-2,-4,0,1)\} \text{ base.}$$

Para el autovalor 3,

$$V_3 : (3I_4 - A^t)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = & 0, \\ & 4x_2 & & -12x_4 & = & 0, \\ & 2x_2 & +x_3 & -8x_4 & = & 0, \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

De aquí deducimos que

$$V_3 = \{(0, 3a, 2a, a) \mid a \in \mathbf{R}\} \supset \{(0,3,2,1)\} \text{ base.}$$

Por tanto los planos fijos son los definidos por las siguientes ecuaciones,

$$(a-2b) - 4bx + ay + bz = 0, \quad a, b \in \mathbf{R}, (a,b) \neq (0,0); \qquad 3x + 2y + z = 0.$$

Nótese que en la familia de planos que depende de dos parámetros $a, b \in \mathbf{R}$, valores diferentes de los parámetros pueden dar el mismo plano. Por ejemplo, si por un lado tomamos $a = b = 1$ y por otro $a = b = 2$, las ecuaciones resultantes definen el mismo plano porque son proporcionales,

$$-1 - 4x + y + z = 0, \qquad -2 - 8x + 2y + 2z = 0.$$

Para distinguir debemos considerar dos casos. Si $b = 0$ entonces podemos tomar $a = 1$, ya que para cualquier otro valor de $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ obtendríamos una ecuación proporcional,

$$\bar{H} : 1 + y = 0.$$

Si $b \neq 0$, por la misma razón podemos tomar $b = 1$, y los planos

$$H'_a : (a-2) - 4x + ay + z = 0, \quad a \in \mathbf{R},$$

son todos diferentes.

Recapitulando, la familia de todos los **diferentes** planos fijos es,

$$\bar{H} : 1 + y = 0; \qquad H'_a : (a-2) - 4x + ay + z = 0, \quad a \in \mathbf{R}; \qquad H'' : 3x + 2y + z = 0. \qquad (*)$$

Sabemos que si $r = P + \langle \mathbf{v} \rangle$ es una recta fija entonces $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ es un autovector del endomorfismo $\overrightarrow{f} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, cuya matriz respecto de la base canónica es,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 12 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Los cálculos del polinomio característico de A^t nos permiten deducir de manera inmediata que el polinomio característico de $\overrightarrow{f}$ es $(x-2)^2(x-3)$, así que $\overrightarrow{f}$ tiene dos autovalores, 2 con multiplicidad 2 y 3 con multiplicidad 1. Sin embargo el cálculo de los subespacios invariantes de $\overrightarrow{f}$ no tiene tanto que ver con los de A^t. Hallémoslos.

$$V_2 : (2I_3 - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -12 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrcl} 3x & +2y & +z & = & 0, \\ -12x & -8y & -4z & = & 0. \end{array} \right.$$

Por tanto,
$$V_2 = \{(a, b, -3a - 2b) \mid a, b \in \mathbf{R}\} \supset \{(1, 0, -3); (0, 1, -2)\} \text{ base.}$$

Para el autovalor 3,
$$V_3 : (3I_3 - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrcl} 4x & +2y & +z & = & 0, \\ & y & & = & 0 \\ -12x & -8y & -3z & = & 0. \end{array} \right.$$

Por tanto,
$$V_3 = \{(a, 0, -4a) \mid a \in \mathbf{R}\} \supset \{(1, 0, -4)\} \text{ base.}$$

Si $P = (0, 1, -2)$ es el punto fijo de f y $\mathbf{v}$ es un autovector de $\overrightarrow{f}$ sabemos entonces que la recta $r = P + \langle \mathbf{v} \rangle$ es fija. Estas rectas son,
$$(0, 1, -2) + \langle (a, b, -3a - 2b) \rangle, \quad a, b \in \mathbf{R}, (a, b) \neq (0, 0); \qquad (0, 1, -2) + \langle (1, 0, -4) \rangle$$

Como en el caso de los planos fijos, para valores diferentes de los parámetros a y b se obtiene en ocasiones la misma recta, ya que los vectores de dirección resultantes pueden ser proporcionales. Para distinguir las diferentes rectas bastaría con tomar por un lado $b = 0$ y $a = 1$, y por otro $b = 1$ y $a \in \mathbf{R}$ cualquiera. Así que las **diferentes** rectas fijas que pasan por el punto fijo son,
$$(0, 1, -2) + \langle (1, 0, -3) \rangle, \qquad (0, 1, -2) + \langle (a, 1, -3a - 2) \rangle, \quad a \in \mathbf{R}; \qquad (0, 1, -2) + \langle (1, 0, -4) \rangle.$$

¿Podría haber alguna recta fija que no pasara por el punto fijo $(0, 1, -2)$**?** En este caso **no**. Si $r = P + \langle \mathbf{v} \rangle$ es una recta fija podemos considerar la restricción $f_{|r} : r \longrightarrow r$. La matriz de $f_{|r}$ respecto del sistema de referencia $R = \{P; \mathbf{v}\}$ en r es de la forma
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$
según sea 2 o 3 el autovalor asociado al autovector $\mathbf{v}$. En el primer caso es fácil ver que el punto $Q \in r$ de coordenadas $Q_R = (-\alpha)$ es fijo para $f_{|r}$, por tanto también tiene que ser fijo para f luego $Q = P$ y r es alguna de las rectas anteriores. En el segundo caso el punto de la recta de coordenadas $Q_R = (-\frac{\alpha}{2})$ es fijo para $f_{|r}$ y llegamos a la misma conclusión. La **clave** de este razonamiento es que 1 no es un autovalor de $\overrightarrow{f}$.

Pasemos ahora al segundo apartado. Si $H \subset \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ es un plano fijo tal que $f_{|H} : H \longrightarrow H$ es una homotecia, el único punto fijo de f ha de pertenecer al plano, $(0, 1, -2) \in H$ y ha de ser el centro de la homotecia. Descartando de (*) los planos que no contiene a este punto nos quedamos con,
$$H_2' : -4x + 2y + z = 0, \qquad\qquad H'' : 3x + 2y + z = 0.$$

Como las direcciones de H_2' son autovectores de $\overrightarrow{f}$ asociados al autovalor 2, entonces $f_{|H_2'} : H_2' \longrightarrow H_2'$ es una homotecia de centro $(0, 1, -2)$ y razón 2.

Análogamente, Como las direcciones de H'' son autovectores de $\overrightarrow{f}$ asociados al autovalor 3, entonces $f_{|H''} : H'' \longrightarrow H''$ es una homotecia de centro $(0, 1, -2)$ y razón 3.

Ejercicio 2.– Una afinidad $f\colon \mathbf{A}^2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ es una **cizalladura** si existe un sistema de referencia R respecto del cual su matriz es de la forma

$$M_R(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \lambda & 0 \\ b & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}; \lambda, \mu \in \mathbf{R} - \{0\}, \lambda \neq \mu.$$

Esta matriz se denomina **forma canónica** de la cizalladura.

1. Calculad las direcciones fijas y los puntos fijos de una cizarradura.
2. Si R' es el sistema de referencia canónico, demostrad que la afinidad $f\colon \mathbf{A}^2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ de matriz
$$M_{R'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$
es una cizalladura y hallad el sistema de referencia R respecto del cual la matriz de f está en forma canónica.

Para el primer apartado usaremos coordenadas respecto de un sistema de referencia R tal que la matriz de f esté en forma canónica. Las direcciones fijas son claramente $\langle(1,0)\rangle$ asociadas al autovalor λ y $\langle(0,1)\rangle$ asociadas al autovalor μ.

Un punto $(x, y) \in \mathbf{A}^2(\mathbf{R})$ es fijo respecto de f si y sólo si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \lambda & 0 \\ b & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \qquad D_f = \begin{cases} (1-\lambda)x = a, \\ (1-\mu)y = b. \end{cases}$$

Entonces $D_f = \{(\frac{a}{1-\lambda}, -\frac{b}{1-\mu})\}$ es un único punto fijo siempre que $\lambda \neq 1 \neq \mu$. Si $\lambda = 1$ y $a = 0$ entonces $D_f : (1-\mu)y = b$ es una recta. Si $\mu = 1$ y $b = 0$ entonces $D_f : (1-\lambda)y = a$ también es una recta. Finalmente, si $\lambda = 1$ y $a \neq 0$ o $\mu = 1$ y $b \neq 0$ entonces no hay puntos fijos $D_f = \emptyset$.

Pasemos ahora al segundo apartado. Por definición y por la caracterización conocida de matrices diagonalizables, f es una cizalladura si y sólo si $\overrightarrow{f}$ tiene dos autovalores distintos λ y μ, y en ese caso podemos tomar R como cualquier sistema de referencia que contenga a una base de autovectores.

La matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto de la base canónica B' es,

$$M_{B'}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculemos los autovalores de $\overrightarrow{f}$ mediante el polinomio característico,

$$p(x) = |xI_2 - M_{B'}(\overrightarrow{f})| = \begin{vmatrix} x+7 & 9 \\ -6 & x-8 \end{vmatrix} = x^2 - x - 20 = (x+1)(x-2).$$

Al haber dos autovalores diferentes, f es una cizalladura.

Para hallar R calculamos una base de autovectores,

$$V_{-1} : (-I_2 - M_{B'}(\overrightarrow{f}))\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que $V_{-1} = \langle (3, -2) \rangle$,

$$V_2 : (2I_2 - M_{B'}(\overrightarrow{f}))\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que $V_3 = \langle (1, -1) \rangle$.

Podemos tomar por tanto $R = \{\mathbf{0}; (3, -2), (1, -1)\}$. La matriz de f respecto de R será de la forma,

$$M_R(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $(a, b) = f(\mathbf{0})_R$ y en este caso $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ es también el origen de R, tenemos que $(a, b) = (0, 0)$ y,

$$M_R(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para ilustrar que este es el modo más corto de calcular $M_R(f)$, veamos cómo se haría usando las matrices de los cambios de referencia entre R y R'. La matriz de paso del sistema de referencia R al canónico R' es,

$$M(R, R') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

y el cambio inverso,

$$M(R', R) = M(R, R')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

luego,

$$\begin{aligned} M_R(f) = M(R', R) M_{R'}(f) M(R, R') &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -9 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.– Sea G el conjunto de las afinidades del plano que dejan invariantes las rectas $x = 1$ e $y = 1$. Calculad los centros de las homotecias contenidas en G. ¿Contiene G traslaciones?

Consideraremos el sistema de referencia canónico, respecto del cual la matriz de $g \in M$ es de la forma,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a & b \\ \beta & c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbf{R}; ad - bc \neq 0.$$

Como $(-1, 1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $(-1, 0, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ son rectas invariantes, $(-1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$ son autovalores de A^t,

$$(-1, 1, 0)A = \lambda(-1, 1, 0), \quad \lambda \in \mathbf{R} - \{0\}; \qquad \begin{cases} -1 + \alpha = -\lambda, \\ a = \lambda, \\ b = 0; \end{cases}$$

$$(-1, 0, 1)A = \mu(-1, 0, 1), \quad \mu \in \mathbf{R} - \{0\}; \qquad \begin{cases} -1 + \beta = -\mu, \\ c = 0, \\ d = \mu; \end{cases}$$

así que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \lambda & \lambda & 0 \\ 1 - \mu & 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R} - \{0\}.$$

Esta afinidad es una homotecia de razón λ si $\lambda = \mu \neq 1$. La única dilatación que no es una homotecia se obtiene para $\lambda = \mu = 1$ y es la identidad, luego G no contiene traslaciones. Si $\lambda = \mu \neq 1$, el centro de la homotecia es, $(1, 1)$ independientemente de qué número sea λ.

Ejercicio 5.– Sea M el conjunto de movimientos del plano que deja invariante la recta $r : x = 0$.

1. Determinad los movimientos de M calculando sus matrices respecto de un sistema de referencia.
2. Sea $s : y = 0$ y $O = (0, 0)$. Si f es un movimiento que satisface $f(s) = r$, ¿es cierto que $f(O) = O$? ¿Por qué?
3. Calculad todos los movimientos tales que $f(s) = r$ y además $f(O) = O$ (hay 4).
4. Calculad todos los movimientos tales que $f(s) = r$.

---

1) Consideraremos el sistema de referencia canónico, respecto del cual la matriz de $g \in M$ es de la forma,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a & b \\ \beta & -b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a & b \\ \beta & b & -a \end{pmatrix}, \qquad a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}; a^2 + b^2 = 1;$$

Como $(0,1,0) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una recta invariante, $(0, 1, 0)$ es un autovalor de A^t,

$$(0, 1, 0)A = \lambda(0, 1, 0), \quad \lambda = \pm 1,$$

luego, $b = 0 = \alpha$ y $a = \pm 1$. Así, los movimientos de M son los que tienen matriz de la forma,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \beta & 0 & e \end{pmatrix}, \quad a, e = \pm 1; \beta \in \mathbf{R}.$$

2) y 4) El movimiento σ_H de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una simetría de eje $H : x - y = 0$, que lleva r en s y viceversa. Por tanto la composición $\sigma_H f$ deja a r fija, así que su matriz es B para ciertos valores de los parámetros. Como $\sigma_H^2 = \mathrm{Id}$, $\sigma_H(\sigma_H f) = f$, luego la matriz de f es de la forma,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \beta & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & e \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a, e = \pm 1; \beta \in \mathbf{R}.$$

Cualquier movimiento f con matriz de esta forma lleva s en r, y viceversa. Basta tomar $\beta \neq 0$ para que $f(O) = (\beta, 0) \neq O$.

3) Imponer además $f(O) = (\beta, 0) = O$ es lo mismo que decir $\beta = 0$, así que los cuatro movimientos posibles son los de matrices,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7 apartado 2).– Sea $f\colon \mathbf{A}^3(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ el movimiento cuya matriz respecto del sistema de referencia canónico R' es,

$$M_{R'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Descomponed f como composición de dos simetrías planas.

Veamos primero qué tipo de movimiento es f. Para ello comenzamos hallando los autovalores del homomorfismo $\overrightarrow{f}$, cuya matriz es,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es,

$$p(x) = |xI_3 - B| = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x-i)(x+i),$$

luego $\overrightarrow{f}$ tiene un único autovalor real, que es 1. Ello implica que f se puede tratar de un giro o de un movimiento helicoidal. En ambos casos el álgulo de giro α satisface $\cos\alpha + i\sin\alpha = \pm i$, luego $\alpha = \frac{\pi}{2}$ o $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Para averiguar si f es un giro o un movimiento helicoidal calculamos los puntos fijos de f. Un punto $(x, y, z) \in \mathbf{A}^3(\mathbf{R})$ es fijo si y sólo si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad D_f : \left\{ \begin{array}{rcr} x+z & = & 2, \\ x-z & = & -2. \end{array} \right.$$

Luego, $r = D_f$ es una recta de puntos fijos, así que f es un giro de eje r y ángulo α.

Para descomponerlo como producto de dos simetrías planas cambiamos por comodidad a un nuevo sistema de referencia métrico $R = \{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Tomamos como origen un punto de r, por ejemplo $O = (0, 0, 2) \in r$, y $\mathbf{v}_1$ como un vector de norma 1 en la dirección de r, $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$. Finalmente completamos $\mathbf{v}_1$ a una base ortonormal tomando por ejemplo $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$.

La recta $r = O + \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ está contenida en el hiperplano H de ecuación $H : z = 0$ respecto de R. La simetría plana σ_H de eje H tiene las siguientes ecuaciones respecto de R,

$$M_R(\sigma_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular la composición de movimientos $f\sigma_H$. Para ello calcularemos primero la matriz de f respecto del sistema de referencia R. La matriz de cambio de sistema de referencia de R a R' es,

$$M(R, R') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego,

$$M(R', R) = M(R, R')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} M_R(f) &= M(R', R) M_{R'}(f) M(R, R') = M(R, R')^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$M_R(f\sigma_H) = M_R(f) M_R(\sigma_H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que el subespacio de puntos fijos de $f\sigma_H$ es el plano $H' : y = 0$, por tanto $f\sigma_H = \sigma_{H'}$ es la simetría plana de eje H'. Como realizar dos veces seguidas una simetría es la identidad, $\sigma_H \sigma_H = \mathrm{Id}$, entonces,

$$f = f\,\mathrm{Id} = f(\sigma_H \sigma_H) = (f\sigma_H)\sigma_H = \sigma_{H'}\sigma_H.$$

Con esto queda descompuesto el movimiento H como composición de dos simetrías planas.