RADIACION Y DISPERSION ELECTROMAGNETICAS

Ricardo Marqués
Catedrático de Electromagnetismo

e-mail: marques@us.es

Nota: Estos esquemas NO son los apuntes de la asignatura, ni pretenden sustituirlos, sino que constituyen solo una guia para su estudio

TEMARIO

1. **Tema I: Sistemas radiantes sencillos.**
2. **Tema II: Teoremas y conceptos básicos.**
3. **Tema III: Dispersión por obstáculos y difracción**
4. **Tema IV: Dispersión en medios materiales. Metamateriales.**
5. **Bibliografía recomendada**

Tema I: Sistemas radiantes sencillos

1. **Campos que varían armónicamente con el tiempo** En esta asignatura consideraremos campos que varían armónicamente con el tiempo de la forma

$$X(t) = \mathrm{Re}\{X_\omega \exp(j\omega t)\} \tag{1}$$

donde $X(\omega)$ es el *fasor* de $X(t)$, que en general será un nómero complejo $X_\omega = |X_\omega| \exp(j\phi)$, de modo que de (1) obtendríamos para la cantidad real la expresión:

$$X(t) = |X_\omega| \cos(\omega t + \phi)\,. \tag{2}$$

Existen variadas razones para elegir este tipo especial de campos:

- Se presentan comunmente en la Naturaleza y en la tecnología: procesos de decaimiento atómico, emisiones de radio y TV...
- Todo campo $A(t)$, sea cual fuere su variación temporal, puede expresarse en forma de una integral (o serie si varía periodicamente con el tiempo) de Fourier

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2\mathrm{Re}\left\{\int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right\} \tag{3}$$

  que puede interpretarse como suma de los fasores $X_\omega = 2X(\omega)d\omega$.
- Los parámetros carcaterísticos de la materia, tales como permitividad ε o permeabilidad μ solo pueden definirse de un modo adecuado en el dominio de la frecuencia (ver Tema IV).

Es fácil demostrar que los fasores X_ω e Y_ω presentan las siguientes propiedades:

- Linealidad:

$$(aX + bY)_\omega = aX_\omega + bY_\omega \tag{4}$$

- El fasor de la derivadas temporal de una cantidad real viene dado por

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_\omega = j\omega X_\omega \tag{5}$$

- El valor medio temporal del producto dos fasores viene dado por

$$\langle X(t)Y(t)\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T X(t)Y(t)dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{X\,Y^*\} \tag{6}$$

  donde $T = 2\pi/\omega$ es el periodo y $(\cdot)^*$ indica complejo conjugado.

En lo sucesivo y a menos que se especifique lo contrario, daremos por sobreentendida esta dependencia temporal de los campos y nos referiremos a los fasores complejos como X (omitiendo el subíndice). Las cantidades reales se deducen de los fasores a través de (1) y se escribirán de modo que la dependencia temporal quede explícita; por ejemplo $X(t)$.

Nota1: *En muchos libros (p. ej. [Jackson]) se usa $X(t) = Re\{X_\omega \exp(-i\omega t)\}$ en lugar de (1). La conversión de las expresiones en esos libros a las de estos apuntes es simple, basta hacer la sustitución $i \to -j$*

Nota2: *En algunos libros (p.ej. [Harrington]) se utiliza la definición $X(t) = \sqrt{2}Re\{X_\omega \exp(j\omega t)\}$, lo que introduce algunas diferencias entre las expresiones de esos libros y las de estos apuntes.*

Ejercicio: *Suponga el fasor $X = a+jb$, calcule en función de sus partes real e imaginaria, a y b, la cantidad real $X(t)$*

Ejercicio: *Demuestre la relación (6).*

2. **Carga total en campos que varían armónicamente con el tiempo** Una propiedad interesante de los campos que varían armónicamente con el tiempo es que, excepto a frecuencia cero, su carga total se anula. En efecto, la ecuación de conservación de carga se escribe en el dominio de la frecuencia como:

$$j\omega\rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{7}$$

de donde la carga total del sistema será

$$Q = \frac{1}{j\omega}\int \nabla \cdot \mathbf{J}\, dv = \frac{1}{j\omega}\oint \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, ds \tag{8}$$

integral que para una corriente confinada en un volumen finito debe anularse. La única excepción a esta regla es cuando $\omega \to 0$, en cuyo caso resulta una indeterminación. De modo que en sistemas con una variación temporal arbitraria, la carga total está contenida totalmente en el fasor de frecuencia cero, o parte estática del campo. Dicho de otro modo, cualquier sistema electromagnético se divide en un campo estático, que incluye el efecto de la carga total del sistema, más una suma de fasores cuyas fuentes tienen carga total nula.

3. **Ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia.** De (5) se deduce inmediatamente que, en el dominio de la frecuencia, las ecuaciones de Maxwell en el vacío se reducen a

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + j\omega\frac{1}{c^2}\mathbf{E} \tag{10}$$

Ejercicio: *Demostrar que las otras dos ecuaciones de Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ están contenidas implícitamente en (9) - (10).*

4. **Potenciales:**

   De (9) se deduce que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y, por tanto, es posible definir un potencial vector $\mathbf{A}$ dado por
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{11}$$
   Sustituyendo en (9) se obtiene que el campo eléctrico viene dado por
$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \tag{12}$$
   donde ϕ es un potencial escalar. De (10) se deduce la ecuación para los potenciales
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{A} - j\frac{\omega}{c^2}\nabla\phi \tag{13}$$
   Por otra parte, (11) no define $\mathbf{A}$ de un modo unívoco pues debe definirse aún la divergencia de $\mathbf{A}$. Lo usual es definir ésta según el *Gauge de Lorentz*, es decir
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\frac{\omega}{c^2}\phi \tag{14}$$
   Con esta definición las ecuaciones para los potenciales se transforman en la ecuación de onda:
$$\{\nabla^2 + k_0^2\}\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \tag{15}$$
$$\{\nabla^2 + k_0^2\}\phi = -\rho/\varepsilon_0 \tag{16}$$
   donde k_0 es la constante de propagación en el vacío $k_0 = \omega/c = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. En realidad, el potencial escalar ϕ no es necesario para obtener los campos, ya que puede obtenerse de $\mathbf{A}$ a través de (14), de modo que, una vez obtenido $\mathbf{A}$, el campo eléctrico se obtendrá de
$$\mathbf{E} = -j\omega\left(\mathbf{A} + \frac{1}{k_0^2}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})\right) \tag{17}$$
   y el magnético de (11). De nuevo vemos que la carga (la densidad de carga en este caso) es un parámetro irrelevante en el dominio de la frecuencia, donde todo puede deducirse de la densidad de corriente $\mathbf{J}$.

   Ejercicio: *Demostrar que en ausencia de corriente eléctrica, el campo eléctrico (17) se puede escribir como*
$$\mathbf{E} = -j\,\frac{\omega}{k_0^2}\,\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{18}$$

5. **Potencial de un dipolo en el espacio libre** El dipolo $\mathbf{p}$ es la fuente elemental de corriente, que equivale a una corriente oscilante
$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\ ;\ \ \mathbf{J}_0 = j\omega\mathbf{p} \tag{19}$$
   donde $\mathbf{r}'$ indica la posición el dipolo. Para ver esto basta con imaginar al dipolo oscilante como una carga $-q$ estática en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ (que no contribuye al fasor de corriente) mas una

carga $+q$ que se mueve armónicamente entre $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}'+\mathbf{l}$ con periodicidad $T = 2\pi/\omega$. En el límite $\mathbf{l} \to 0$ la densidad de corriente asociada con esta carga en movimiento es $\mathbf{J}(t) = \rho\mathbf{v}(t) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, donde $\mathbf{v}(t)$ es la velocidad instantánea de la carga. Como $\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt$, donde $\mathbf{l}(t)$ es la posición instantónea de la carga respecto de $\mathbf{r}'$, su fasor es $\mathbf{v} = j\omega\mathbf{l}$ y el fasor de la corriente asociada es $\mathbf{J} = j\omega q\mathbf{l}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Sustituyendo $q\mathbf{l} = \mathbf{p}$ se obtiene (19).

La ecuación para el potencial de un dipolo en el origen ($\mathbf{r}' = 0$) es

$$(\nabla^2 + k_0^2)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}_0\delta(\mathbf{r}) \tag{20}$$

Si suponemos que el dipolo está orientado según el eje z, $\mathbf{J}_0 = J_0\hat{\mathbf{z}}$, de modo que $A_x = A_y = 0$ y

$$(\nabla^2 + k_0^2)A_z = -\mu_0 J_0\delta(\mathbf{r}) \tag{21}$$

Esta ecuación es la ecuación homogénea para todo $r \neq 0$. Por otra parte, por simetría, A_z solo puede depender de r, de modo que

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + k_0^2 A_z = 0 \;; \quad r \neq 0 \tag{22}$$

La solución a esta ecuación es

$$A_z = \frac{C}{r}e^{-jk_0 r} \tag{23}$$

La constante C se determina integrando (21) en una pequeña esfera en torno a $\mathbf{r} = 0$ y el resultado es $C = \mu_0 J_0/4\pi$, de modo que

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J_0 e^{-jk_0 r}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{j\omega p e^{-jk_0 r}}{r} \tag{24}$$

Ejercicio: *Determinar la constante C mencionada y deducir (24).*

En general, para un dipolo de orientación y localización arbitraria será

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{J}_0 e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{j\omega\mathbf{p}e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{25}$$

6. **Campos de un dipolo puntual:** Los campos eléctrico y magnético de un dipolo puntual se deducen de (17) y (11) respectivamente. Es conveniente calcular primero los campos de un dipolo puntual en el origen orientado según el eje z a partir de (24) y luego generalizar. El resultado es (ver **Apéndice 1** al final de este capítulo)

$$E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk_0}{r^2}\right)\cos(\theta)\, e^{-jk_0 r} \tag{26}$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk_0}{r^2} - \frac{k_0^2}{r}\right)\sin(\theta)\, e^{-jk_0 r} \tag{27}$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0\omega p}{4\pi}\left(\frac{j}{r^2} - \frac{k_0}{r}\right)\sin(\theta)\, e^{-jk_0 r} \tag{28}$$

Estas expresiones pueden generalizarse para dar los campos de un dipolo puntual de localización y orientación arbitaria:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{r^3}+\frac{jk_0}{r^2}\right)[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{p}] - \frac{k_0^2}{r}(\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}\right\} e^{-jk_0 r} \tag{29}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\omega}{4\pi}\left(\frac{j}{r^2}-\frac{k_0}{r}\right)\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{r}}\, e^{-jk_0 r} \tag{30}$$

En estos campos podemos distinguir:

- El campo estático $\sim 1/r^3$

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{p}]\; e^{-jk_0 r} \tag{31}$$

- Los campos de indución o campos intermedios $\sim 1/r^2$

$$\mathbf{E}_i = \frac{jk_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{p}]\; e^{-jk_0 r} \tag{32}$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{j\mu_0\omega}{4\pi r^2}\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{r}}\, e^{-jk_0 r} \tag{33}$$

- Y finalmente los campos de radiación $\sim 1/r$

$$\mathbf{E}_r = -\frac{k_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}(\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}\, e^{-jk_0 r} \tag{34}$$

$$\mathbf{B}_r = -\frac{\mu_0\omega k_0}{4\pi r}\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{r}}\, e^{-jk_0 r} \tag{35}$$

  que dominan a larga distancia. Puede comprobarse que dichos campos satisfacen

$$\mathbf{B}_r = -jk_0\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{A} \tag{36}$$

$$\mathbf{E}_r = c\mathbf{B}_r\times\hat{\mathbf{r}} \tag{37}$$

  La primera ecuación nos dice que los campos de radiación se deducen de $\mathbf{A}$ tomando el límite $\nabla \to -jk_0\hat{\mathbf{r}} \equiv -j\mathbf{k}_0$ y despreciando las demás derivadas (aproximación de radiación). La segunda que son ondas planas propagándose en la dirección radial.

Ejercicio: *Demostrar (37) a partir de (18) y de* $\nabla \to -jk_0\hat{\mathbf{r}} \equiv -j\mathbf{k}_0$

7. **Radiación de un dipolo puntual:** La radiación de un dipolo puntual viene determinada por la parte real del vector de Poynting $\mathbf{S} = (1/2\mu_0)\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*$ asociado a los campos de radiación (34)-(35). Para un diplo en el origen orientado según el eje z, el resultado es

$$\mathbf{S} = \frac{\eta_0 p^2 c^2 k_0^4}{32\pi^2 r^2}\sin^2\theta\,\hat{\mathbf{r}} \tag{38}$$

donde $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377\,\Omega$ es conocida como la “impedancia del vacío”. La ecuación (38) da la ditribución angular de la radiación, que es máxima en la dirección perpendicular y cero en la dirección paralela al eje del dipolo

Cuestión: *La luz solar es dispersada por las moléculas del aire, que adquieren un momento diplolar paralelo al campo electrico incidente. Deducir el estado de polarización de la luz solar dispersada procedente del cénit (en relación al plano definido por el Sol, el cenit y el observador).*

Cuestión: *Considere la refracción por un medio dieléctrico de una onda plana de polarización “p” (el campo eléctrico está contenido en el plano de incidencia). El “ángulo de Brewster” se define como el ángulo para el que no se produce onda reflejada. Demostrar a partir de (38) que el ángulo de Brewster corresponde a un ángulo de 90^0 entre el haz incidente y el refractado. ¿Existe “ángulo de Brewster” para una onda incidente de polarización “s” (campo eléctrico normal al plano de incidencia)?*

La potencia total radiada por un dipolo puntual se obtiene integrando (38) y usando

$$\int_0^\pi \sin\theta^3\, d\theta = \frac{4}{3} \tag{39}$$

El resultado es

$$P = \frac{\eta_0 c^2 p^2 k_0^4}{12\pi} \tag{40}$$

que, para una amplitud fija del momento dipolar p, crece con la cuarta potencia de la frecuencia (o del vector de ondas k_0).

8. **Potencial de una distribución de corrientes arbitraria:** La expresión (25) da también el potencial vector de un elemento de corriente $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. De modo que, por superposición, el potencial vector de una distribución arbitraria de corriente vendrá dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' \tag{41}$$

En la zona de radiación podemos hacer la aproximación

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r\left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}\right)^{1/2} \simeq r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' \tag{42}$$

en el exponente y $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \simeq \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'r$ en el resto (aproximación de Fraunhofer). Esto da para la expresión del potencial vector

$$\mathbf{A}_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int \mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\, dv' \tag{43}$$

Los campos electromagnéticos se pueden decir de (41) a partir de (11) y (17). No obstante si sólo estamos interesados en los campos a gran disancia de la fuente (campos de radiación), podemos usar directamente las expresiones (36)-(37) que son de validez general en la zona de radiación.

Ejercicio: *Demostrar que los campos de radiación de una distribución de corriente de simetría esférica* $\mathbf{J} = J(r)\hat{\mathbf{r}}$ *se anulan.* **Solución:** *Por simetría el potencial vector debe ser también de la forma* $\mathbf{A} = A(r)\hat{\mathbf{r}}$*, lo que de acuedo con (36) implica que los cmpos de radiación se anulan. Este hecho está relacionado con el hecho de que el estado fundamental de un átomo - que tiene simetría esférica - no radíe. Puede demostrarse también que las densidades de corriente pulsantes, asociadas a los estados estacionarios solución de la Ec. de Schrodinger para un electrón en un campo central, tampoco radian.*

9. **Antena lineal alimentada en su centro:** Considere una antena formada por dos hilos conductores rectos idénticos y dirigidos en direcciones opuestas, conectados a una fuente de alimentación que impone una corriente de amplitud conocida en el centro de la antena. La corriente debe variar a lo largo de la antena, haciándose nula en sus extremos. Si la antena está orientada segíun el eje z una buena aproximación es

$$I(z) = I_0 \sin[k_0(l/2 - |z|)] \tag{44}$$

donde l es la longitud total de la antena. Usando (43) el potencial vector en la zona de radiación se escribe

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r} I_0 \int_{-l/2}^{l/2} \sin[k_0(l/2 - |z'|)]\, e^{jk_0 z' \cos\theta}\, dz' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r} I_0 \,\mathrm{Re}\left\{\int_0^{l/2} \sin[k_0(l/2 - z')]\, e^{jk_0 z' \cos\theta}\, dz'\right\} \end{aligned} \tag{45}$$

Tras el cambio de variable $x = l/2 - z'$ y usando

$$\int \sin(ax)\, e^{bx}\, dx = e^{bx}\,\frac{b\sin(ax) - a\cos(ax)}{b^2 + a^2} \tag{46}$$

se obtiene

$$A_z = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \,\frac{\cos[(k_0 l\cos\theta)/2] - \cos(k_0 l/2)}{k_0 \sin^2\theta}\,\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \tag{47}$$

En el límite de $k_0 l$ pequeño, esta expresión se reduce a

$$A_z[k_0 l \to 0] = \frac{\mu_0}{16\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r} I_0 k_0 l^2 \tag{48}$$

que se conoce como el potencial vector de un "dipolo corto", que de acuerdo con (24) se corresponde con un dipolo de magnitud $p = I_0 k_0 l^2/(4j\omega)$.

Los campos de radiación pueden obtenerse a partir de (36)-(37):

$$\mathbf{B}_r = jk_0 A_z \sin\theta\, \hat{\phi} \tag{49}$$

$$\mathbf{E}_r = j\omega A_z \sin\theta\, \hat{\theta} \tag{50}$$

El vector de Poynting viene dado por

$$\mathbf{S} = \frac{\eta_0}{8\pi^2 r^2} |I_0|^2 \left[\frac{\cos[(k_0 l \cos\theta)/2] - \cos(k_0 l/2)}{\sin\theta} \right]^2 \hat{\mathbf{r}} \tag{51}$$

que como en el caso del dipolo da un máximo de radiación en el plano ecuatorial y un cero en la dirección z. La potencia total radiada puede obtenerse mediante integración directa de (51).

Ejercicio: *La ecuación (51) puede integrarse analíticamente para el caso particular de un "dipolo corto" ($k_0 l \ll 1$). Demostrar que en ese caso la potencia total radiada es*

$$P = I_0^2 \frac{\eta_0 k_0^4 l^4}{192\pi} \tag{52}$$

Este mismo resultado puede demostrarse a partir de (40) y del dipolo equivalente a la antena considerada (ver mas arriba)

10. **Parámetros de antenas:**

    a) **Diagrama de radiación:** El diagrama de radiación de una antena es una representación de sus propiedades de radiación en el espacio. Generalmente se representa la potencia radiada, aunque tambien se pueden representar los campos de radiación $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{B}_r$. Como los campos son magnitudes vectoriales se suele representar el módulo y la fase.

    En cuanto al tipo de gráfica, lo mas común es una representación en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), de modo que resulte una superficie tridimensional. Por ejemplo, si se representa la potencia radiada, el radiovector de un punto sobre esa superficie $r(\theta, \phi)$ es proporcional a la radiación en esa dirección $S(\theta, \phi)$

    Ejercicio: *Representar en coordenadas esféricas la potencia radiada por un dipolo puntual, un dipolo corto y una antena lineal de longitud $\lambda/4$.*

    Tambien se pueden hacer representaciones de la potencia radiada en función de θ, para un valor dado de ϕ; o cualquier otro tipo de representación. En cuanto a la escala puede ser lineal, logarítmica o en decibelios ($X(dB) = 10 \log_{10} X$).

    b) **Polarización:** La polarización de una antena es la polarización de la radiación emitida por dicha antena en una determinada dirección. Puede ser lineal, circular o elíptica

    Cuestión: *¿Qué polarización tiene la radiación de una antena lineal?*

    c) **Directividad:** La directividad de una antena se define como la razón entre la potencia radiada en una dirección dada y la potencia que radiaría una hipotética "antena isótropa" que radiase la misma potencia

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi r^2 S(\theta, \phi)}{P} \tag{53}$$

Si no se especifica la dirección, se entiende que la directividad se refiere a dirección del máximo de radiación.

Ejercicio: *Demostrar que*

$$\int D(\theta, \phi)\, d\Omega = 4\pi \tag{54}$$

Ejercicio: *Calcular la directividad $D(\theta, \phi)$ de un dipolo puntual y de un dipolo corto.*

d) **Impedancia, reactancia y resistencia de entrada. Adaptación:** La impedancia de entrada se define como la relación entre tensión e intensidad a la entrada de la antena. La impedancia de la antena será compleja $Z = R + jX$, donde R es la "resistencia de entrada" y X la "reactancia de entrada". La impedancia de entrada de la antena es un parámetro de gran importancia práctica, porque determina el porcentaje de la potencia suminstrada por el generador que va efectivamente a la antena. El circuito equivalente de una antena operando en transmisión (equivalente Thevenin) está formado por la impedancia de la antena conectada en a un generador (que se modela como un generador ideal de tensión V_g conectado en serie a una impedancia del generador $Z_g = R_g + jX_g$). La potencia transmitida a la antena viene dada por

$$P_a = \frac{1}{2} R |I_i|^2 = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2} \tag{55}$$

Para un valor dado de la impedancia del generador, esta cantidad alcanza un máximo cuando $Z = Z_g^*$ (ó $R = R_g$ y $X = -X_g$). En ese caso se dice que la antena está "adaptada", y la potencia suminstrada por el generedor se divide a partes iguales entre la resistencia interna del generador y la antena.

$$P_a = \frac{|V_g|^2}{8R} = \frac{|V_g|^2}{8R_g} = P_g \tag{56}$$

Cuando la antena se conecta al generador por medio de una línea de transmisión, la mejor adaptación se consigue cuando la impedancia de la línea de transmisión es igual a la de la antena $Z_{l.t.} = Z = Z_g^*$, de ese modo no se producen reflexiones a la entrada de la antena y es como si ésta estuviere directamente conectada al generador.

Ejercicio: *Demostrar (55), así como que el máximo de la potencia suministrada a la antena se produce cuando $R = R_g$ y $X = -X_g$*

La resistencia de entrada se puede descompoiner en "resistencia de radiación" R_r y resistencia óhmica R_o, $R = R_r + R_o$. La resitencia R_o da cuenta de la suma de todas las pérdidas óhmicas en la antena. La resistencia de radiación da cuenta de la potencia "perdida" por radiación y se calcula a partir de la potencia total radiada P y la corriente a la entrada de la antena I_i mediante la expresión ordinaria de la teoría de circuitos[1]

$$P = \frac{1}{2} R_r |I_i|^2 \tag{57}$$

Nota: *De (44) se deduce que la resistencia de radiación de una antena lineal se hace infinita si $l = \lambda/2$, ya que entonces $I_i = I(0) \to 0$. Esto carece de sentido físico y solo significa que la aproximación (42) no es apropiada. La resolución exácta de un problema de antenas implica la resolución de un problema de condiciones de contorno, que casi siempre ha de hacerse numéricamente. Ver la bibliogarfía (p. ej. [Jackson]) para una discusión mas completa sobre este punto.*

Ejercicio: *Demostrar a partir de (44) y (52) que la resistencia de radiación R_r de un dipolo corto viene dada por*

$$R_r = \eta_0 \frac{k_0^2 l^2}{24\pi} \tag{58}$$

La reactancia de la antena está directamente relacionada con el flujo de la parte imaginaria del vector de Poynting. En efecto, consideremos para simplificar una antena sin pérdidas ($R_o = 0$). De acuerdo con el teorema de Poynting complejo

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{ \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{n}\, ds \right\} = 2\omega(< U_e > - < U_m >) - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{ \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*\, dv \right\} \tag{59}$$

donde $< U_e >$ y $< U_m >$ son las energía eléctrica y magnética promedio almacenadas. Por otro lado, la parte imaginaria de la integral del vector de Poynting lejos de la antena (campos de radiación) se anula. Asimismo

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{ \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*\, dv \right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{ V I_i^* \right\} = -\frac{1}{2} X |I_i|^2 \tag{60}$$

donde hemos tenido en cuenta que a la entrada de la antena la corriente circula en sentido contrario al voltaje cuasi-estático (impulsada por el generador). Así pues

$$\frac{1}{2} X |I_i|^2 = 2\omega(< U_m > - < U_e >) \tag{61}$$

Vemos pues que si $X > 0$ (reactancia inductiva) hay predominio de energía magnética en el campo cercano y si $X < 0$ (reactancia capacitiva) hay predominio de energía eléctrica. Este resultado también es válido cuando la antena tiene pérdidas (ver Tema II). La reactancia de antena depende básicamente del campo cercano (en la zona de radiación las energías eléctrica y magnética son iguales) por lo que su cálculo teórico suele ser bastante complicado.

Cuestión: *Discutir si la reactancia de un dipolo corto es capacitiva o inductiva.*

[1] En algunos textos se define la resistencia de radiación usando otra intensidad diferente de I_i (por ejemplo, I_0 para la antena lineal [Harrington]), resultando entonces un valor que es proporcional a la definición (57). No obstante esas definiciones no son unívocas y pueden inducir a confusión, por lo que no las utilizaremos.

e) **Ganancia y efectividad:** La ganacia $G(\theta,\phi)$ de una antena es su directividad multiplicada por la fracción de la potencia entregada a la antena que es efectivamente radiada. La ganancia es proporcional a la directividad $G(\theta,\phi) = \eta D(\theta,\phi)$ con $\eta \leq 1$. El factor η es la eficiencia de la antena. Sólo es $\eta = 1$ para una antena ideal sin pérdidas óhmicas, perfectamente adaptada.

f) **Antena en recepción: área efectiva:** El circuito equivalente de una antena en recepción es el mismo que para una antena en transmisión, pero sustituyendo la impedancia del generador por la "impedancia de carga" $Z_L = R_L + X_L$ y el voltaje del generador por el voltaje generado en la antena por la onda incidente V_i. El área efectiva se define como la relación entre la potencia recibida en la antena y la densidad de potencia incidente. La antena debe estar adaptada a la carga, de forma que la potencia transferida sea la máxima. Además la onda recibida debe estar adaptada en polarización a la antena. La adaptación se producirá cuando $R_L = R$ y $X_L = -X$ (en estas condiciones la mitad de la potencia captada por la antena será enviada a la carga y la otra mitad re-radiada por la antena). Entonces el área efectiva vendrá dada por (ver (56))

$$A_e = \frac{1}{2W_i} R_L |I_i 1^2 = \frac{|V_i|^2}{8RW_i} \tag{62}$$

donde W_i es la densidad de potencia incidente. El área efectiva de una antena depende de la dirección de incidencia y no tiene por qué coincidir con las dimensiones físicas de la antena. El teorema de reciprocidad implica que el área efectiva de una antena es proporcional a su directividad (ver Tema II)

Ejercicio: *Demostrar que el área efectiva de un dipolo corto ideal ($R_o = 0$) es*

$$A_e = \frac{6\pi}{k_0^2} \operatorname{sen}^2\theta \tag{63}$$

Sugerencia: aproximar el voltage inducido en la antena por la onda incidente como $V_i = E_l\, l$, donde E_l es la componente a lo largo del dipolo del campo de la onda incidente y l la longitud del dipolo. Calcular el factor de proporcionalidad con la directividad

11. **Arrays de antenas:** Un array de antenas es una colección de antenas idénticas colocadas en posiciones $\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_i$ que soportan corrientes $\mathbf{J}_i = \mathbf{J}(\mathbf{r}')\exp(j\psi)$ donde $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ es la corriente de la antena en $\mathbf{r} = \mathbf{a}_1$ y $\mathbf{r}'$ se define como la distancia a $\mathbf{r} = \mathbf{a}_i$. En la zona de radiación el potencial vector viene dado por (43). De donde

$$\mathbf{A}_r = \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{jk_0 \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_0}\, dv' \right\} F(\theta,\phi) \tag{64}$$

donde $F(\theta,\phi)$ es el "factor de array"

$$F(\theta,\phi) = \sum_{i=1}^{N} e^{j\psi_i} e^{jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a}_i} \tag{65}$$

siendo ψ_i la fase de la i-ésima antena. En general tanto el potencial como los campos de radicación del array pueden escribirse como

$$X = X_0 F(\theta, \phi) \ ; \quad X \ : \ \mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, ... \tag{66}$$

siendo X_0 la magnitud correspondiente a una hipotética anytena situada en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ y fase $\psi_0 = 0$. El vector de Poynting del array vebdrá entonces dado por

$$\mathbf{S}(\theta, \phi) = |F|^2 \mathbf{S}_0(\theta, \phi) \tag{67}$$

Obviamente $|F| \leq N$, de modo que

$$|\mathbf{S}(\theta, \phi)| \leq N^2 \mathbf{S}_0(\theta, \phi) \tag{68}$$

lo que impone un límite superior a la potencia radiada por el array. Los arrays de antenas se utilizan para aumentar la directividad de las antenas. La potencia total radiada por el array será del orden de N veces la potencia radiada por una sola antena. Por tanto, de acuerdo con (68) la máxima directividad alcanzable con un array de N antenas será del orden de N veces la directividad de cada una de las antenas[2]. Los arrays se emplean también para variar electrónicamente la dirección del máximo de radiación (*beam scanning*). Para ello se varía electrónicamente el desfase ψ_i entre las antenas del array.

Ejercicio: *Calcular al factor de array, la directividad y la dirección de los máximos y mínimos de radiación de un array de dos dipolos puntuales colineales que radian en fase y están separados una distancia $a = \lambda$ en la dirección de su eje.*

Ejercicio: *Indicar que desfase hay que imponer a los dipolos del ejercicio anterior para que haya un máximo de radiación formando un ángulo de 45^o con el eje de los mismos.*

Ejercicio: *Calcular el factor de array, la directividad y la posición de los ceros de radiación en los 3 planos coordenados, para dos dipolos paralelos orientados según el eje z que emiten en fase, separados una distancia $a = \lambda$ an la dirección del eje x.*

Ejercicio: *Calcular el factor de array, la directividad y la posición de los ceros de radiación en los 3 planos coordenados, para dos dipolos paralelos orientados según el eje z que emiten con un desfase $\pi/2$, separados una distancia $a = \lambda/4$ an la dirección del eje x.*

12. **Radiación de un dipolo magnético oscilante:** Consideraremos que el dipolo magnético está formado por una espira de corriente oscilante I, perpendicular al eje z y localizada en el origen de coordenadas. Dado que la corriente no tiene componente z, de (41) se deduce que $A_z = 0$. Por otra parte, en el plano $y = 0$ debe ser $A_x|_{y=0} = 0$,

[2]Esta es sólo una regla aproximada, porque no siempre es cierto que la potencia radiada por el array sea N veces la potencia radiada por cada antena individual. Un contrajemplo es el de un array formado por dos antenas situadas en el mismo lugar ($\mathbf{a} = 0$) y desfasadas $\psi = \pi$. Es claro que en este caso la potencia total radiada se anula. En la bibliografía [Balanis] es posible encontrar arrays con una directividad mayor que N veces la de una antena individual, aunque siempre del mismo orden.

ya que las contribuciones a A_x de los elementos de corriente a ambos lados del plano $y = 0$ se cancelan mutuamente. Por tanto, en dicho plano, solo A_y es distinto de cero. Pasando a coordenadas esféricas, todas estas propiedades se resumen en $A_r = A_\theta = 0$ y $A_\phi = A_y|_{y=0}$. Tras algunas operaciones encontramos

$$A_\phi = A_y|_{y=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} Ia \oint \frac{\exp[-jk_0(r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos\phi')^{1/2}]}{(r^2 + a^2 - 2ar\sin\theta\cos\phi')^{1/2}} \cos\phi' \, d\phi' \tag{69}$$

Haciendo un desarrollo en serie y tomando el límite $k_0 a \to 0$, se obtiene

$$A_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} m \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{jk_0}{r} \right\} \sin\theta \, e^{-jk_0 r} \tag{70}$$

donde $m = \pi a^2 I$ es la magnitud del momento dipolar magnético. La expresión (70) presenta la misma dependencia en (r, θ, ϕ) que el campo magnético de un dipolo eléctrico (28). De modo que, en general, podemos afirmar que

$$\mathbf{A}_m = \frac{m}{j\omega p} \mathbf{B}_p \tag{71}$$

donde $\mathbf{A}_m$ es el potencial vector de un dipolo magnético de magnitud m y B_p es el campo magnético de un dipolo eléctrico de magnitud p, ambos paralelos. De (71) se deduce inmediatamente que

$$\mathbf{B}_m = \nabla \times \mathbf{A}_m = \frac{m}{j\omega p} \nabla \times \mathbf{B}_p = \frac{m}{c^2 p} \mathbf{E}_p \tag{72}$$

$$\mathbf{E}_m = \frac{c^2}{j\omega} \nabla \times \mathbf{B}_m = \frac{m}{j\omega p} \nabla \times \mathbf{E}_p = -\frac{m}{p} \mathbf{B}_p \tag{73}$$

de donde finalmente, usando (29)-(30) se deducen los campos de un dipolo magnético oscilante:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk_0}{r^2} \right) [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}] - \frac{k^2}{r} (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} \right\} e^{-jk_0 r} \tag{74}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \left(\frac{j}{r^2} - \frac{k_0}{r} \right) \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}} \, e^{-jk_0 r} \tag{75}$$

En la zona de radiación, el vector de Poynting asociado a un dipolo magnético oscilante vendrá dado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E}_m \times \mathbf{B}_m^* = \frac{m^2}{c^2 p^2} \mathbf{S}_p^* = \frac{\eta_0 m^2 k_0^4}{32\pi^2 r^2} \sin^2\theta \, \hat{\mathbf{r}} \tag{76}$$

de donde la potencia total radiada vendrá dada por

$$P = \frac{\eta_0 m^2 k_0^4}{12\pi} \tag{77}$$

Ejercicio: *Demostrar que la resistencia de radiación de una pequeña espira ($k_0 a \ll 1$) es*

$$R_r = \eta_0 \frac{\pi a^4 k_0^4}{6} \tag{78}$$

Si comparamos con la expresión para un dipolo (58) vemos que una pequeña espira radia de un modo mucho menos eficiente que un pequeño dipolo.

Cuestión: *¿Cual será la impedancia de entrada de una pequeña espira circular de autoinducción L?*

Nota: *En la práctica, las resistencias de radiación de pequeñas espiras y dipolos no se ajustan del todo a las expresiones (58) y (78), debido a que las distribuciónes de corriente no coinciden con las teóricas [Balanis]. No obstante, la dependencia con $k_0 l$ y $k_0 a$, que es la que da el comportamiento cualitativo, sí que es correcta.*

Ejercicio: *Considere dos dipolos* $\mathbf{p}$ *y* $\mathbf{m}$ *paralelos localizados en el mismo punto. Demostrar que si $j\omega\mathbf{p} = k_0\mathbf{m}$, entonces los campos de radiación están polarizados circularmente en todos los puntos del espacio. En la práctica este efecto se consigue con una antena helicoidal, que es na combinación de antena lineal y espira circular [Balanis].*

13. **Apéndice I. Campos de un dipolo eléctrico:** El campo magnético viene dado por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla A_z \tag{79}$$

Por otro lado, usando coordenadas esféricas

$$\nabla A_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} J_0 \left(j\frac{k_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-jk_0 r}\, \hat{\mathbf{r}} \tag{80}$$

Teniendo ahora en centa que $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ obtenemos finalmente (28). Tenemos ahora que calcular $\mathbf{E}$ a partir de (17). Determinamos primero la divergencia de $\mathbf{A}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla A_z$, que usando (80) es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} J_0 \left(j\frac{k_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \cos\theta\, e^{-jk_0 r} \tag{81}$$

Finalmente, tras algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = & - \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \left(-j\frac{k_0}{r^2} - \frac{2}{r^3} + \frac{k_0^2}{r} - j\frac{k_0}{r^2} \right) \cos\theta\, e^{-jk_0 r}\, \hat{\mathbf{r}} \\ & + \frac{1}{r}\frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \left(j\frac{k_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta\, e^{-jk_0 r}\, \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \tag{82}$$

Mientras que $\mathbf{A}$ en coordenadas esféricas se escribe

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \left(\cos\theta\, \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) e^{-jk_0 r} \tag{83}$$

Sustituyendo ahora (82)-(83) en (17) se obtiene (26)-(27).

Tema II: Teoremas y conceptos básicos.

1. **Ecuaciones de Maxwell en medios contínuos** Consideremos las ecuaciones de Maxwell en un medio que por simplicidad supondremos lineal e isótropo, aunque pudiera ser homogéneo sólo a trozos. En dicho medio existen corrientes de conducción $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$, de polarización $\mathbf{J}_p = j\omega \mathbf{P} = j\omega\varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$. Definiremos una constante dieléctrica compleja que en englobe ambas corrientes como

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \; ; \quad \varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e) \tag{84}$$

Asimismo el medio puede incluir una cierta magnetización inducida por unidad de vulumen $\mathbf{M}_i = \chi_m \mathbf{H}$. Finalmente supondremos que en ese mdio hay además ciertas "fuentes" externas de corriente $\mathbf{J}$ y de magnetización $\mathbf{M}$ que no dependen ni de $\mathbf{E}$ ni de $\mathbf{H}$. Las ecuaciones de Maxwell toman entonces la forma

$$-\nabla \times \mathbf{E} = j\omega \mathbf{B} \tag{85}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_t + j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{86}$$

donde $\mathbf{J}_t$ es la corriente total, que incluye las de conducción, polarización y magnetización, además de la corriente externa:

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_c + j\omega\mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M}_t \tag{87}$$

tras sustituir $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t) = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}$ obtenemos

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{J}_M + j\omega\mu\mathbf{H} \tag{88}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} \tag{89}$$

donde $\mu = \mu_0(1+\chi_m)$ y

$$\mathbf{J}_M = j\omega\mu_0\mathbf{M} \tag{90}$$

puede interpretarse como una "corriente magnética" asociada a la magnetización externa $\mathbf{M}$. Los campos $\mathbf{D}$ y $\mathbf{B}$ asociados a (88)-(89) son

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E} \implies \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{1}{j\omega}\nabla \cdot \mathbf{J} = \rho \tag{91}$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M} \implies \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{92}$$

La ecuación (91) garantiza que la fuente del nuevo vector $\mathbf{D}$ es la densidad de carga externa $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}/j\omega$, mientras que la ecuación (92) garantiza que no hay carga magnética "real" en el sistema. Las ecuaciones y definiciones anteriores son algo mas generales que las habituales y son las usadas en electromagnetismo de alta frecuancia.

Nota: *Aunque una defnción mas lógica de la corriente magnética hubiera sido* $j\omega\mathbf{M}$ *en lugar de (90), la definición (90) es la usada en todos los libros de texto que usan esta terminología (p.ej. [Harrington] o [Collin]). A la hora de relacionar* $\mathbf{J}_M$ *con una magnetización real sólo hay que tener cuidado e introducir la constante* μ_0 *donde haga falta. Por ejemplo, la corriente magnética asociada a un diolo magnético* $\mathbf{m}$ *en* $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ *es*

$$\mathbf{J}_M = j\omega\mu_0\mathbf{m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{93}$$

Tambien es posible obviar totalmente este tipo de fuentes "magnéticas", que siempre se puede expresar como una corriente externa $\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{M}$ *[Jackson], no obstante incluirlas en el formalismo tiene ventajas que iremos viendo mas adelante.*

2. **Condiciones de contorno** En el caso de una discontinuidad abrupta entre dos regiones del espacio, los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ podrían tambien ser discontínuos. La discontiniuidad de las componentes tangenciales se determina a partir de la forma integral de (84)-(88)

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1) &= -\mathbf{K}_M \qquad (94)\\ \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1) &= \mathbf{K} \qquad (95)\end{aligned}$$

donde $\mathbf{K}$ y $\mathbf{K}_M$ son las corrientes superficiales externas sobre la discontinuidad y $\mathbf{n}$ es el vector unitario que apunta de la región 1 a la 2. Las condiciones de contorno para las componentes normales podrían tambien resolverse, pero no son necesarias para la resolución de problemas porque, como veremos (Teorema de Unicidad) las componentes tangenciales en la frontera bastan para determinar los campos.

Ejercicio: *Hallar las condiciones de contorno para las componentes normales de* $\mathbf{E}$ *y* $\mathbf{H}$*. Sugerencia: usar (91)-(92).*

3. **Potenciales y ecuaciones diferenciales** De las ecuaciones (88)-(84) se deduce que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en un medio homogéneo a trozos pueden deducirse de los potenciales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{F}$ mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{1}{\hat{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{F} - j\omega\left(\mathbf{A}+\frac{1}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})\right) \qquad (96)\\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} - j\omega\left(\mathbf{F}+\frac{1}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})\right) \qquad (97)\end{aligned}$$

donde $k=\omega\sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}$.

Las ecuaciones diferenciales para los potenciales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{F}$ se deducen sustituyendo en (88)-(84) y son

$$\begin{aligned}\{\nabla^2+k^2\}\mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J} \qquad (98)\\ \{\nabla^2+k^2\}\mathbf{F} &= -\hat{\varepsilon}\mathbf{J}_M \qquad (99)\end{aligned}$$

en cada medio

Ejercicio: *Deducir (98)-(99). Sugerencia: considere primero la excitación con sólo corrientes eléctricas* $\mathbf{J}_M = 0$*, luego la excitación con sólo corrientes magnéticas* $\mathbf{J} = 0$ *y superponga luego ambas soluciones.*

Ejercicio: *Demostrar que el potencial* $\mathbf{F}$ *creado por una distribución de corriente magnética* $\mathbf{J}_M$ *en el vacío viene dado por*

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' \tag{100}$$

Ejercicio: *Calcular el potencial* $\mathbf{F}$ *de un dipolo magnético* $\mathbf{m}$ *situado en* $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$*. Sugerencia: use (93).*

Ejercicio: *Demostrar que en la zona de radiación, el potencial* $\mathbf{F}$ *creado por una corriente magnética* $\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')$ *viene dado por*

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \int \mathbf{J}_M\, e^{jk_0 \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} ds' \tag{101}$$

Los campos de rediación se obtienen a partir de (96)-(97) en la aproximación $\nabla \to -jk\hat{\mathbf{r}} \equiv -j\mathbf{k}$ y de la ecuación análoga a (37)

$$\mathbf{E}_r = \eta \mathbf{H}_r \times \hat{\mathbf{r}} \tag{102}$$

donde $\eta = \sqrt{\hat{\varepsilon}/\mu}$ (que, en la zona de radiación será casi siempre igual a η_0).

4. **Teorema de Poynting. Energía** El vector de Poynting se define como

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\, \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \tag{103}$$

Usando la identidad $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \equiv \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^*$ y (88)-(89) se demuestra el Teorema de Poynting

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \left\{ -j\omega\mu|\mathbf{H}|^2 - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{J}_M + j\omega\hat{\varepsilon}^*|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* \right\} \tag{104}$$

Integrando la parte real de esta expresion encontramos la ecuación del balance energético es

$$\mathrm{Re}\left\{ \oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}\, ds \right\} - \frac{1}{2}\omega \int \left(\mathrm{Im}(\mu)|\mathbf{H}|^2 + \mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})|\mathbf{E}|^2 \right) dv$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \int (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{J}_M + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*)\, dv \right\} \tag{105}$$

donde P es la potencia radiada lejos de las fuentes

$$P = \text{Re}\left\{\oint \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,ds\right\} \tag{106}$$

el término de la derecha la potencia suministrada por las fuentes o generadores

$$P_g = -\frac{1}{2}\text{Re}\left\{\int (\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{J}_M + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^*)\,dv\right\} \tag{107}$$

y el segundo término de la izquierda la potencia disipada en el medio

$$P_d = -\frac{1}{2}\omega\int \left(\text{Im}(\mu)|\mathbf{H}|^2 + \text{Im}(\hat{\varepsilon})|\mathbf{E}|^2\right)\,dv \tag{108}$$

Dado que esta potencia disipada tiene que ser positiva, se ve que para todo medio realista debe ser

$$\text{Im}(\hat{\varepsilon})\,,\ \text{Im}(\mu)\ < 0 \tag{109}$$

(en algunos textos de física que usan $-i$ en lugar de j - p.ej. [Jackson] - esta desigualdad se convierte justo en la opuesta). Estos medios se denominan “pasivos” o “disipativos”. El caso - puramente formal - de un hipotético medio con las partes imaginarias de $\hat{\varepsilon}$ o μ positivas se denomina “medi activo” y correspondería a un tipo de generador.

Cuestión: *Mostrar que la potencia disipada por unidad de volumen en un medio de permitividad ε real, permeabilidad μ real y conductividad σ tambien real viene dada por la ecuación elemental $\sigma|\mathbf{E}|^2/2$.*

Consideremos ahora la integral de la parte imaginaria del vector de Poynting

$$\begin{aligned}\text{Im}\ &\left\{\frac{1}{2}\oint (\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathbf{n}\,ds\right\} = \\ &\frac{1}{2}\omega\int \left(\text{Re}(\hat{\varepsilon})|\mathbf{E}|^2 - \text{Re}(\mu)|\mathbf{H}|^2\right)\,dv - \frac{1}{2}\text{Im}\left\{\int (\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{J}_M + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^*)\ dv\right\}\end{aligned} \tag{110}$$

Si la integral de superficie la trasladamos a la zona de radiación, donde se satisface (102), es fácil ver que se anula. Por tanto

$$P_r \equiv -\frac{1}{2}\text{Im}\left\{\int (\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{J}_M + \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^*)\ dv\right\} = 2\omega\left(\langle U_m\rangle - \langle U_e\rangle\right) \tag{111}$$

donde el término de la izquierda es la “potencia reactiva” suministrada por la fuente y $\langle U_e\rangle$, $\langle U_m\rangle$ las energías eléctrica y magnética promedio almacenada en la región de integración. Como ejemplo de la aplicación de esta expresión consideremos una antena impulsada por una fuente púramente eléctrica ($\mathbf{J}_M = 0$). Si el tamaño de la fuente es pequeño podemos hacer (téngase en cuenta que dentro del generador la corriente fluye del polo negativo al positivo)

$$-\frac{1}{2}\text{Im}\left\{\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^*\,dv\right\} = \frac{1}{2}\text{Im}(VI^*) = \frac{1}{2}XII^* = 2\omega\left(\langle U_m\rangle - \langle U_e\rangle\right) \tag{112}$$

donde X es la reactancia de la antena. Como ya indicamos si $X > 0$ ($X < 0$) hay predominio de energía magnética (eléectrica) en el campo cercano de la antena (en la zona de radiación ambas energías son iguales a consecuencia de (102)).

Nota: *La validez de la expresión (111) está condicionada a que las energías eléctricas y magnéticas puedan expresarse como las integrales correspondientes en (110). Como veremos (Tema IV) esto solo es cierto en medios débilmente dispersivos.*

5. **Teorema de unicidad. Resonancias:** Consideremos una región del espacio caracterizada por las funcines $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ y $\mu(\mathbf{r})$ y limitada por una superficie S. El teorema de unicidad establece las condiciones para que, dadas unas fuentes $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}_M(\mathbf{r})$ en su interior, la solución de las ecuaciones de Maxwell (88)-(89) sea única dentro de dicha región del espacio.

Consideremos en primer lugar el caso en que hay disipación de energía dentro de dicha región del espacio ($\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon}) \neq 0$ y/o $\mathrm{Im}(\mu) \neq 0$). Supongamos que existan dos soluciones a (88)-(89) $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ y $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ correspondientes a las mismas fuentes. Definimos entonces los campos "diferencia" $\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ y $\delta\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$ y demostramos que

$$\mathrm{Re}\left\{\oint \delta\mathbf{E} \times \delta\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{n}\, ds\right\} = \omega \int \left(\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})|\delta\mathbf{E}|^2 + \mathrm{Im}(\mu)|\delta\mathbf{H}|^2\right)\, dv \leq 0 \tag{113}$$

donde la última integral es definida negativa en virtud de (109) y solo se anulará si $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ y $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$ en todo punto dentro de S. Por otro lado la primera integral se anlará si y solo sí:

a) $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2$ en toda la superficie S o

b) $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2$ en toda la superficie S o

c) $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2$ en parte de S y $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2$ en el resto de dicha superficie.

De modo que la solución para los campos en una región del espacio que contenga medios disipativos y limitada por una superficie S será única si

a) El campo $\mathbf{E}$ tangencial es conocido en toda la superficie S ó

b) El campo $\mathbf{H}$ tangencial es conocido en toda la superficie S ó

c) El campo $\mathbf{E}$ tangencial es conocido en parte de S y el campo $\mathbf{H}$ tangencial es conocido en el resto de S.

Consideremos ahora una región del espacio donde no haya medios disipativos ($\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon}) = 0$ e $\mathrm{Im}(\mu) = 0$). En ese caso la segunda integral de (113) es idénticamente nula, por lo que el argumento anterior carece de validez. Considerando la parte imaginaria de (113) demostramos que

$$\mathrm{Im}\left\{\oint \delta\mathbf{E} \times \delta\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{n}\, ds\right\} = \omega \int \left(\mathrm{Re}(\hat{\varepsilon})|\delta\mathbf{E}|^2 - \mathrm{Re}(\mu)|\delta\mathbf{H}|^2\right)\, dv = 4\omega\left(\langle\delta U_e\rangle - \langle\delta U_m\rangle\right) \tag{114}$$

Si suponemos que se cumplen las condiciones listadas arriba, entonces la primera integral se anulará y

$$\langle \delta U_e \rangle - \langle \delta U_m \rangle \tag{115}$$

de modo quela solución será única salvo por una solución tal que sus fuentes se anulen y su energía eléctrica sea igual a su energía magnética en la región del espacio considerada. Estas soluciones reciben el nombre de “resonancias” y corresponden a los modos resonantes de la cavidad definida por la superficie S y por las condiciones de contorno $\delta\mathbf{E} = 0$ ó $\delta\mathbf{H} = 0$ sobre S. Para regiones del espacio finitas y para unas condiciones de contorno dadas, estas resonancias sólo aparecerán para un conjunto numerable de frecuencias ω_n, que son los autovalores correspondientes a dichas resonancias. Cuanto mayor sea la región del espacio mas juntas estarán estas frecuencias de resonancia, hasta que finalmente cubran todo el espectro de frecuencias en el espacio infinito. Un ejemplo de tales “resonancias” del espacio libre infinto son las ondas planas.

En resumen, las condiciones de contorno indicadas determinan el campo de modo unívoco siempre que exista disipación de energía. En caso contrario lo determinan salvo por la presencia de posibles resonancias cuyos campos eléctricos (magnéticos) tangenciales se anularan sobre el contorno allí donde los campos eléctricos (magnéticos) tangenciales totales estén fijados.

Veremos (Tema IV) que todos los medios reales son disipativos, de modo que las condiciones enumeradas mas arriba son suficientes para garantizar la unicidad de la solución en todos los casos reales

Nota avanzada: *En esta asignatura consideramos solo frecuencias reales. No obstante es posible extender el concepto de resonancia a los casos en que el medio es disipativo a condición de considearar frecuencias de resonancia ω_n complejas. Si la disipación es pequeña, el significado físico de la parte imaginaria de tales frecuencias de resonancia complejas es el inverso del tiempo de relajación de la resonancia: el tiempo que tarda en caer a cero una excitación de frecuencia igual a la parte real de la frecuencia de resonancia una vez se hayan “apagado” todas las fuentes.*

6. **Conductores “perfectos” eléctrico y “magnético”:** Un “conductor perfecto” es un medio tal que cualquier excitación genera en su superficie corrientes superficiales de carga libre tales que los campos se anulan en su interior. Dado que en un conductor perfecto no hay corrientes magnéticas, de (94)-(95), las condiciones de contorno en la superficie de dicho conductor son

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \; ; \;\; \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{K}_c \tag{116}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal hacia afuera del conductor y $\mathbf{K}_c$ la corriente superficial de conducción sobre su superficie. Un conductor perfecto es una idealización de un buen conductor cuando $\sigma \to \infty$ y la distancia de penetración $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ es despreciable.

Ejercicio: *Demostrar que en la interfaz entre dos dieléctricos con $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ de ordinario se satisface que $|\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1| \ll \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1$, de modo que podemos tomar $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 \simeq 0$ como* *condición de contorno: visto "desde fuera" el dieléctrico de mayor constante dieléctrica es muy parecido a un "conductor perfecto".*

De la primera de las ecuaciones de Maxwell (88) se deduce que en la superficie del conductor perfecto

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \implies \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{117}$$

Aunque la implicación inversa no sempre es matemáticamente válida, en la mayoría de las circunstancias físicas sí que lo es, de modo que la condición $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ (que en medios isótropos equivale a $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$) suele tambien tomarse como definitoria de un "conductor perfecto".

Ejercicio: *Demostrar que en la interfaz entre dos medios magnetizables con $\mu_1 \ll \mu_2$ de ordinario se satisface que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2 \ll |\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2|$, de modo que podemos tomar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2 \simeq 0$ como condición de contorno: visto "desde fuera" el medio magnetizable con menor permeabilidad es muy parecido a un "conductor perfecto".*

Análogamente podemos definir un "conductor magnético perfecto" como un medio tal que cualquier excitación genera en su superficie corrientes superficiales magnéticas tales que los campos se anulan en su interior. Dado que en un conductor magnético perfecto no hay corrientes eléctricas, de (94)-(95), las condiciones de contorno en la superficie de dicho conductor son

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \; ; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mathbf{K}_M \tag{118}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal hacia afuera del conductor y $\mathbf{K}_M$ la corriente superficial magnética sobre su superficie. En la Naturaleza no existen conductores magnéticos, de modo que el "conductor magnético perfecto" es una idealización sin base física. No obstante es una herramienta útil para el análisis como veremos mas adelante.

Ejercicio: *Demostrar que en la interfaz entre dos medios con $\mu_1 \ll \mu_2$ de ordinario se satisface que $|\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1| \ll \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1$, de modo que podemos tomar $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 \simeq 0$ como condición de contorno: visto "desde fuera" el medio de mayor permeabilidad es muy parecido a un "conductor magnético perfecto".*

De la segunda de las ecuaciones de Maxwell (89) se deduce que en la superficie del conductor magnético perfecto

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0 \implies \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{119}$$

Aunque la implicación inversa no sempre es matemáticamente válida, en la mayoría de las circunstancias físicas sí que lo es, de modo que la condición $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$ (que en medios isótropos equivale a $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$) suele tambien tomarse como definitoria de un "conductor magnético perfecto".

Ejercicio: *Demostrar que en la interfaz entre dos dieléctricos con $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ de ordinario se satisface que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 \ll |\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2|$, de modo que podemos tomar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 \simeq 0$ como condición de contorno: visto "desde fuera" el dieléctrico con menor constante dieléctrica es muy parecido a un "conductor magnético perfecto".*

7. **Propiedades de simetría de los campos y las fuentes:** Vectores son aquellas magnitudes físicas que se comportan como el radio-vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ frente a las operaciones impropias de simetría: inversión y reflexión en un plano. Los pseudovectores se comportan de manera opuesta. Así:

   a) Un vector cambia de signo por inversión
   b) Un pseudovector permanece invariante por inversión
   c) Las componentes tangenciales (normales) a un plano de un vector (pseudovector) permanecen invariantes por reflexión en dicho plano.
   d) Las componentes normales (tangenciales) a un plano de un vector (pseudovector) cambian de signo por reflexión en dicho plano.

   Los pseudovectores se generan mediante productos vectoriales. Así:

   a) El producto vectorial de dos vectores es un pseudovector
   b) El producto vectorial de un vector y un pseudovector es un vector
   c) El producto vectorial de dos pseudovectores es un pesudovector

   Ejercicio: *Comprobar que los productos vectoriales generan magnitudes que complen las simetrías indicadas.*

   Ejercicio: *Mostrar gráficamente que la velocidad angular Ω (que se relaciona con la velocidad y con la posición mediante $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$) es un pseudovector que satisface las anteriores simetrías (a)-(d). Sugerencia: la inversión puede considerarse como el producto de tres rflexiones en tres planos ortogonales.*

   Si aplicamos los concepto anteriores a las magnitudes eléctromagnéticas, teniendo en cuenta que el operador $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ es un operador vectorial, deducimos que

   - Las magnitudes eléctricas $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{A}$ etc. son vectores
   - Las magnitudes magnéticas $\mathbf{J}_M$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{F}$ etc. son pseudovectores
   - La carga magnética, caso de existir, sería un pseudoescalar que cambia de signo por refelxión y por inversión.

   Cuestiones: *El vector de Poynting ¿Es un vector o un pseudovector?. Y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ ¿Es un escalar o un pseudoescalar?*

   Ejercicio: *Deducir las reglas de la teoría de imágenes del apartado anterior del carácter vectorial / pseudovectorial de las magnitudes eléctricas / magnéticas.*

   Ejercicio: *Demostrar que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ de una fuente de corriente eléctrica superficial $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\parallel(x, y)$ confinada en el plano $z = 0$ satisfacen*

$$\mathbf{E}_\parallel(x, y, z) = \mathbf{E}_\parallel(x, y, -z) \tag{120}$$
$$\mathbf{E}_\perp(x, y, z) = -\mathbf{E}_\perp(x, y, -z) \tag{121}$$
$$\mathbf{H}_\parallel(x, y, z) = -\mathbf{H}_\parallel(x, y, -z) \tag{122}$$
$$\mathbf{H}_\perp(x, y, z) = \mathbf{H}_\perp(x, y, -z) \tag{123}$$

donde $(\cdot)_\parallel$ *y* $(\cdot)_\perp$ *representan las componentes paralela y perpendicular de los campos respectivamente.*

Ejercicio: *Demostrar que los campos* $\mathbf{E}$ *y* $\mathbf{H}$ *de una fuente de corriente magnética* $\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_{M,\parallel}(x,y)$ *confinada en el plano* $z=0$ *satisfacen*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\parallel(x,y,z) &= -\mathbf{E}_\parallel(x,y,-z) && (124)\\ \mathbf{E}_\perp(x,y,z) &= \mathbf{E}_\perp(x,y,-z) && (125)\\ \mathbf{H}_\parallel(x,y,z) &= \mathbf{H}_\parallel(x,y,-z) && (126)\\ \mathbf{H}_\perp(x,y,z) &= -\mathbf{H}_\perp(x,y,-z) && (127) \end{aligned}$$

donde $(\cdot)_\parallel$ *y* $(\cdot)_\perp$ *representan las componentes paralela y perpendicular de los campos respectivamente.*

8. **Imágenes:** De las propiedades de simetría de los campos y las fuentes, así como del teorema de unicidad, se deducen las siguientes propiedades de los campos de dichas fuentes colocadas frente a un plano conductor pefecto:

   a) El campo creado por un elemento de corriente $\mathbf{J}$ paralelo a un plano conductor perfecto y a una distancia d del mismo es el mismo que el creado por la superposición de esa fuente y otra fuente $-\mathbf{J}$ a una distancia $2d$ (en dirección perpendicular al plano) de ésta.

   b) El campo creado por un elemento de corriente $\mathbf{J}$ perpendicular a un plano conductor perfecto y a una distancia d del mismo es el mismo que el creado por la superposición de esa fuente y otra fuente $\mathbf{J}$ a una distancia $2d$ (en dirección perpendicular al plano) de ésta.

   c) El campo creado por un elemento de corriente $\mathbf{J}_M$ paralelo a un plano conductor perfecto y a una distancia d del mismo es el mismo que el creado por la superposición de esa fuente y otra fuente $\mathbf{J}_M$ a una distancia $2d$ (en dirección perpendicular al plano) de ésta.

   d) El campo creado por un elemento de corriente $\mathbf{J}_M$ perpendicular a un plano conductor perfecto y a una distancia d del mismo es el mismo que el creado por la superposición de esa fuente y otra fuente $-\mathbf{J}_M$ a una distancia $2d$ (en dirección perpendicular al plano) de ésta.

Las fuentes auxiliares de denominan "imagenes" de la fuente original. Dado que la combinación de la fuente y su imágen es un problema en el espacio libre, la teoría de imágenes permite resolver problemas de fuentes arbitrarias frente a planos conductores perfectos.

Cuestión: *¿Por qué las antenas de RF son postes perpendiculares a tierra? ¿Por qué no son horizontales?*

Ejercicio: *Calcular el vector de Poynting en la zona de radiación y la directividad de un dipolo eléctrico perpendicular a un plano conductor perfecto colocado a una distancia d* *de éste. La respuesta es*

$$\mathbf{S}(\theta) = \frac{\eta c^2 k_0^4 p^2}{32\pi^2 r^2} \sin^2(\theta)\cos^2(k_0 d\cos\theta)\,\hat{\mathbf{r}} \tag{128}$$

Ejercicio: *Obtener soluciones por "imágenes" para los 4 problemas similares a los estudiados arriba, correspondientes a fuentes elementales frente a un plano conductor magnético perfecto.*

9. **Teorema de equivalencia** El teorema de equivalencia establece relaciones entre los campos creados por un conjunto de fuentes y los campos crados por corrientes superficiales equivalentes sobre superficies que engloban a las fuentes originales.

   Consideremos unas fuentes arbitrarias $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}_M(\mathbf{r})$ confinadas dentro de una superficie S. Fuera de dicha superficie las siguientes configuraciones poseen los mismos campos:

   a) Los campos creados por las fuentes originales $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}_M(\mathbf{r})$.

   b) Los campos creados por corrientes superficiales $\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ y $\mathbf{K}_M = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ sobre la superficie S, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a S dirigido hacia afuera y $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ son los campos eléctrico y magnético creados sobre S por las fuentes originales $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}_M(\mathbf{r})$. En ese caso se demuestra también que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en el interior de la superficie S se anulan.

   c) Los campos creados por la corriente superficial $\mathbf{K}_M = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ sobre un conductor perfecto cuya superficie coincide con S.

   d) Los campos creados por la corriente superficial $\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ sobre un conductor magnético perfecto cuya superficie coincide con S.

   La demostración de este teorema se basa en el teorema de unicidad: puede comprobarse que en cada caso la solución propuesta satisface las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de contorno apropiadas, luego es *la* solución.

   El teorema de equivalencia es útil cuando podemos conocer de forma aproximada los campos creados por las fuentes sobre S, como ocurre en el siguiente ejercicio:

10. **Dualidad:** Si en las Ecuaciones de Maxwell (88)-(89) hacemos la sustitución

$$\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}' \tag{129}$$
$$\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}' \tag{130}$$
$$\mathbf{J} \rightarrow -\mathbf{J}'_M \tag{131}$$
$$\mathbf{J}_M \rightarrow \mathbf{J}' \tag{132}$$
$$\epsilon \leftrightarrow \mu \tag{133}$$

   es fácil ver que las nuevas cantidades $\{\mathbf{E}', \mathbf{H}', \mathbf{J}', \mathbf{J}'_M\}$ también satisfacen las Ecuaciones de Maxwell.

La transformación (129)-(133) es formalmente correcta, pero las nuevas cantidades no tienen las unidades apropiadas. Para resolver este problema escribimos las ecuaciones de Maxwell (88)-(89) en la forma

$$\begin{aligned} -\nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{J}_M + j\omega\mu_r\mu_0\mathbf{H} && (134) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega\hat{\varepsilon}_r\varepsilon_0\mathbf{E} && (135) \end{aligned}$$

donde $\hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0$ y $\mu_r = \mu/\mu_0$ son las constante dielectricas y la permeabilidad magnéticas relativas del medio. Definamos ahora la transformación

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\eta_0\mathbf{H}' && (136) \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\eta_0}\mathbf{E}' && (137) \\ \mathbf{J} &= -\frac{1}{\eta_0}\mathbf{J}'_M && (138) \\ \mathbf{J}_M &= \eta_0\mathbf{J}' && (139) \end{aligned}$$

Los nuevos campos “duales” $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ y las nuevas fuentes “duales” $\mathbf{J}'$ y $\mathbf{J}'_M$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} -\nabla \times \mathbf{E}' &= \mathbf{J}'_M + j\omega\hat{\varepsilon}_r\mu_0\mathbf{H}' && (140) \\ \nabla \times \mathbf{H}' &= \mathbf{J}' + j\omega\mu_r\varepsilon_0\mathbf{E}' && (141) \end{aligned}$$

Es decir, son solución de las ecuaciones de Maxwell para el medio “dual” con $\hat{\varepsilon}'_r = \mu_r$, $\mu'_r = \hat{\varepsilon}_r$.

Nota: *Observe que la transformación (136)-(139) deja invariante al vector de Poynting, esto es, la potencia total radiada.*

Ejercicio: *Usando el resultado anterior y el teorema de equivalencia, demostrar que la potencia total radiada por una apertura circular de radio b en un plano conductor, alimentada por un cable coaxial de radio interior a y exterior b es aproximadamente*

$$P = \frac{\pi V_0^2 k_0^4}{6\eta_0 \ln^2(b/a)}[b^2 - a^2]^2 \quad (142)$$

donde V_0 es el potencial de la onda incidente. Sugerencias: considerar que los campos en la apertura corresponden aproximadamente a los de un “circuito abierto” (coeficiente de reflexión $= 1$) en el cable coaxial.

Ejercicio: *Demostrar que la capacidad por unidad de longitud C_{pul} de un par de tiras conductoras coplanares se relaciona con la autoinducción por unidad de longitud L'_{pul} de la guía coplanar complementaria (es decir, la que sustituye los conductores por vanos en una placa metálica infinita) mediante $\mu_0 C_{pul} = 4\varepsilon_0 L'_{pul}$.*

11. **Teorema de reciprocidad** El teorema de reciprocidad relaciona los campos y las fuentes de dos configuraciones $\{\mathbf{E}^a, \mathbf{H}^a, \mathbf{J}^a, \mathbf{J}_M^a\}$ y $\{\mathbf{E}^b, \mathbf{H}^b, \mathbf{J}^b, \mathbf{J}_M^b\}$ en un recinto cerrado. El teorema de reciprocidad establece que

$$\oint (\mathbf{E}^a \times \mathbf{H}^b - \mathbf{E}^b \times \mathbf{H}^a) \cdot \mathbf{n}\, ds + \int (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_M^b - \mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a + \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{J}_M^a)\, dv = 0 \quad (143)$$

Ejercicio: *Demostrar (143) a partir de las ecuaciones de Maxwell (88)-(89).*

Si trasformamos la integral de superficie en una esfera en la zona de radiación es fácil ver, a partir de (102), que dicha integral se anula. Por tanto el teorema de reciprocidad queda

$$\int (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_M^b)\, dv = \int (\mathbf{E}^b \cdot \mathbf{J}^a - \mathbf{H}^b \cdot \mathbf{J}_M^a)\, dv \quad (144)$$

donde las integrales se extienden a todas las fuentes. Esa expresión se escribe tambien de forma simplificada como

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \quad (145)$$

donde $\langle a, b \rangle \equiv \int (\mathbf{E}^a \cdot \mathbf{J}^b - \mathbf{H}^a \cdot \mathbf{J}_M^b)\, dv$.

Ejercicio: *Demostrar que una corriente eléctrica sobre la superficie de un conductor perfecto no crea campo (este resultado se podía intuir a partir de la teoría de imágenes, pero la demostración rigurosa se basa en el teorema de reciprocidad).*

Ejercicio: *Demostrar a partir del teorema de reciprocidad que la amplitud del modo TE_{10} generado por un dipolo en el interior de una guía rectangular viene dada por*

$$A^{\pm} = -j\frac{\omega Z}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^{\mp} \quad (146)$$

donde el índice $+/-$ indica modos que se propagan a la derecha / izquierda, $\mathbf{E}^{mp}$ son los campos del modo TM_{10} normalizado (generalmente se exige que la integral $|\mathbf{E}^{mp}|^2$ en la sección de la guía valga la unidad) y Z es la impedancia del modo TE_{10}.

Ejercicio: *Demostrar a partir del teorema de reciprocidad que la amplitud del modo TE_{10} generado por un dipolo magnético en el interior de una guía rectangular viene dada por*

$$A^{\pm} = j\frac{\omega Z}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^{\mp} \quad (147)$$

12. **Consecuencias del teorema de reciprocidad en la teoría de antenas.** Consideremos dos antenas en interacción. Si los materiales de ambas antenas son lineales y recíprocos, se satisfará en teorema de reciprocidad (145), de modo que los voltajes e intensidades a la entrada de cada antena satisfarán

$$V_1^a I_1^b + V_2^a I_2^b = V_1^b I_1^a + V_2^b I_2^a \quad (148)$$

para dos situaciones a y b diferentes. Por otro lado, si las antenas son lineales, en cada sitación a o b se satisface

$$V_1 = Z_{11}I_I + Z_{12}I_2 \tag{149}$$
$$V_2 = Z_{21}I_I + Z_{22}I_2 \tag{150}$$

donde Z_{ij} es la matriz de impedancia de ambas antenas. Del teorema de reciprocidad (148) aplicado a situaciones en las que I_1^a e I_2^b (ó I_1^b e I_2^a) se anulan se deduce fácilmente que

$$Z_{12} = Z_{21} \tag{151}$$

Por otro lado es fácil ver que las impedancias Z_{11} y Z_{22} no son sino las impedancias de cada una de las antenas 1 y 2 que vimos en el Tema anterior.

Supongamos ahora que queremos medir el diagrama de radiación de la antena 1. Para eso colocamos la antena 2 en circuito abierto ($I_2^a = 0$) a gran distancia R y medimos el voltaje generado en dicha antena por la antena 1 para distintos valores de los ángulos θ, ϕ que definen la posición de la antena 2 respecto de la 1 en el espacio y para una excitación constante de la antena 1, $I_1^a = I_0$. Medimos entonces la función $V_2^a(\theta,\phi) = Z_{21}(\theta,\phi)I_0$, que nos dá el diagrama de radiación de la antena 1.

Supongamos ahora que queremos medir el diagrama de recepción de la antena 1. Para ello medimos el voltaje a circuito abierto ($I_1^b = 0$) que se genera sobre ella cuando movemos la antena 2 a gran distancia y con una excitación fija $I_2^b = I_0$. El voltaje resultante $V_1^b(\theta,\phi) = Z_{12}(\theta,\phi)I_0$ nos dá el diagrama de recepción. *Es evidente de (151) que ambos diagramas son iguales.* Por esa razón siempre de representa sólo uno de ellos.

Nota: *En la discusión anterior no hemos considerado la polarización de la antena, es decir la polarización de la radiación producida por ella. Es fácil demostrar que cuando se introduce esta nueva variable, los diagramas de radiación y recepción para cada componente de polarización resultan también iguales.*

Tema III: Dispersión por obstáculos y difracción.

En este capítulo estudiaremos la dispersión (*scattering*) de ondas electromagnéticas por obstáculos y pantallas de difracción.

1. **Dispersión por objetos pequeños. Polarizabilidades:** La radiación de un objeto pequeño (comparado con la longitud de onda) se puede aproximar por un dipolo eléctrico y/o un dipolo magnetico. De acuerdo con este prencipio, las polarizabilidades del objeto se definen como

$$\mathbf{p} = \bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{ee}} \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{inc}} + \bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{em}} \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{inc}} \tag{152}$$

$$\mathbf{m} = \bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{me}} \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{inc}} + \bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{mm}} \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{inc}} \tag{153}$$

donde $\mathbf{E}_{\mathrm{inc}}$ y $\mathbf{B}_{\mathrm{inc}}$ son los campos incidentes sobre el objeto. Las polarizabilidades $\bar{\bar{\alpha}}$ están sujetas a ciertas simetrías que se deducen del Teorema de Onsager sobre los coeficientes cinéticos [Ver Landau, tomo V (Física Estadística)]. Este teorema establece que siempre que la energía de un sistema se pueda escribir como $U = \mathbf{x} \cdot \mathbf{F}$ las susceptibilidades que relacionan las componentes de $\mathbf{x}$ con las de $\mathbf{F}$ son tales que $\alpha_{ij} = \pm\alpha_{ji}$ donde el signo "+" vale ciando se relacionan magnitudes de la misma paridad (vector - vector, p. ej.) y el "$-$" cuando se relacionan magnitudes de distinta paridad (vector - pseudovector, p. ej.). Para nuestro caso la energía de interacción de escribe $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{inc}} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{inc}}$, de modo que

$$\bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{ee}} = (\bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{ee}})^t \tag{154}$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{mm}} = (\bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{mm}})^t \tag{155}$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{me}} = -(\bar{\bar{\alpha}}_{\mathrm{em}})^t \tag{156}$$

donde $(\cdot)^t$ indica traspuesta.

La potencia disipada en un objeto se puede escribir usando el teorema de Poynting (105) como

$$P_d = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{J}_M + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*)\, dv\right\} \tag{157}$$

donde las integrales se extiende sólo sobre el objeto. Si usamos ahora las expresiones para las corrientes asociadas a los dipolos (19) y (93) esta expresión se reduce a

$$P_d = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\,(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}^* - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^*) \tag{158}$$

Por otro lado los campos se pueden dividir en campos incidentes y dispersados $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{inc}} + \mathbf{E}_{disp}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathrm{inc}} + \mathbf{B}_{disp}$. Asimismo, si el objeto es peqieño comparado con la longitud de onda, los campos dispersados en el objeto son básicamente los campos cuasiestáticos creados por el objeto, que están en fase con el dipolo: $\mathrm{Im}\left(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{disp}}\right) = 0$, $\mathrm{Im}\left(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^*_{\mathrm{disp}}\right) = 0$. De modo que, finalmente,

$$P_d = \frac{\omega}{2}\mathrm{Im}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{inc}} \cdot \mathbf{p}^* + \mathbf{B}_{\mathrm{inc}} \cdot \mathbf{m}^*\right) \tag{159}$$

Es ilustrativo considerar el caso ideal en el que no hay disipación de potencia en el objeto. En este caso, sustituyendo (152)-(153) en (159) y haciendo $P_d = 0$ se demuestra que

$$\left(\overline{\overline{\alpha}}_{\mathrm{ee}}\right)^* = \left(\overline{\overline{\alpha}}_{\mathrm{ee}}\right)^t \tag{160}$$

$$\left(\overline{\overline{\alpha}}_{\mathrm{mm}}\right)^* = \left(\overline{\overline{\alpha}}_{\mathrm{mm}}\right)^t \tag{161}$$

$$\left(\overline{\overline{\alpha}}_{\mathrm{me}}\right)^* = \left(\overline{\overline{\alpha}}_{\mathrm{em}}\right)^t \tag{162}$$

de donde $\overline{\overline{\alpha}}_{\mathrm{ee}}$ y $\overline{\overline{\alpha}}_{\mathrm{mm}}$ son tensores hermíticos.

Ejercicio: *Demostrar (160)-(162). Sugerencia: tras sustituir (152)-(153) en (159) multiplicar por la derecha por $\mathbf{E}_{inc}$ y por $\mathbf{B}_{inc}$ respectivamente.*

De (154)-(156) y (160)-(162) se deduce que para objetos sin pérdidas

- Los tensores $\overline{\overline{\alpha}}_{ee}$ y $\overline{\overline{\alpha}}_{mm}$ son reales y simétricos
- Los tensores $\overline{\overline{\alpha}}_{em}$ y $\overline{\overline{\alpha}}_{me}$ son imaginarios puros y están relacionados a través de (162)

Ejercicio: *Demostrar que la polarizabilidad de una pequeña esfera dieléctrica de radio $a \ll \lambda_0$ viene dada por*

$$\alpha_e = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \, \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\hat{\varepsilon} + 2\varepsilon_0} \tag{163}$$

Sugerencia: utilizar el resultado de el campo eléctrico creado en su interior por una esfera de polarización uniforme $\mathbf{P}$ es $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$.

Ejercicio: *Demostrar que las polarizabilidades eléctrica y magnética de una pequeña esfera conductora perfecta de radio $a \ll \lambda_0$ vienen dadas por*

$$\alpha_e = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \;\; ; \;\; \alpha_m = -\frac{2\pi}{\mu_0}\, a^3 \tag{164}$$

Sugerencia: para la polarozabilidad magnética usar el resultado de que el campo magnético $\mathbf{B}$ creado en su interior por una esfera de magnetización uniforme $\mathbf{M}$ es $\mathbf{B} = \mu_0 2\mathbf{M}/3$.

Para el caso de un elipsoide en lugar de una esfera existen tambien soluciones analíticas para las polarizabilidades a lo largo de los ejes principales del elipsoide [Collin], que son los valores principales del tensor de polarizabilidad del mismo. Para el caso particular de un disco conductor de radio $a \ll \lambda_0$ las expresiones de las polarizabilidades son [Collin]

$$\alpha^e_\parallel = \frac{16}{3}\,\varepsilon_0 a^3 \;\; ; \;\; \alpha^m_\perp = -\frac{8}{3\mu_0}\, a^3 \tag{165}$$

Ejercicio: *Calcular las polarizabilidades eléctrica-eléctrica, magnética-magnética y magneto-eléctrica de un pequeño anillo metálico con un corte en su circunferencia que actúa como un condensador. Sugerencia: considerar el anillo como una autoinducción L y el corte como un condensador C.*

2. **Sección eficaz de dispersión** La potencia dipersada por un objeto para una determinada polarizacióne $\mathbf{e}$ en la dirección $\hat{\mathbf{r}}$ por unidad de ángulo sólido para una unidad de flujo incidente en la dirección $\hat{\mathbf{r}}_0$ y polarización $\mathbf{e}_0$ es la sección eficaz diferencial de dispersión. Como a gran distancia del objeto la potencia radiada es simplemente proporcional al campo eléctrico, la sección eficaz de dispersión es simplemente

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{e}; \hat{\mathbf{r}}_0, \mathbf{e}_0) = \frac{r^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{disp}}|}{\mathbf{e}_0^* \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}|} \tag{166}$$

donde r es la distancia al objeto y los complejos conjugados se han introducido para tener en cuenta polarizaciones circulares y elípticas. Nótese que como la potencia dispersada decrece como $1/r^2$, la sección eficaz de dispersión (166) es un número que no depende de r y tiene dimensiones de área.

A partir de (166) mediante sucesivas integraciones pueden definirse las secciones eficaces de dispersión para cualqier polarización y la sección eficaz de dispersión total, etc... (ver ejemplo mas adelante).

3. **Sección eficaz de dispersión de objetos pequeños.** En el caso de que el objeto pueda describirse mediante los momentos dipolares (152)-(153), el campo eléctrico dispersado vedrá dado por (29) y (75), de modo que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{e}; \hat{\mathbf{r}}_0, \mathbf{e}_0) = \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0^2} \frac{k_0^4}{|\mathbf{E}_{\text{inc}}|^2} \left| \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{p} + (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{e}^*) \cdot \frac{\mathbf{m}}{c} \right|^2 \tag{167}$$

donde la dependencia en $\hat{\mathbf{r}_0}$ y en $\mathbf{e}_0$ está implícita en $\mathbf{p}$ y en $\mathbf{m}$. La dependencia de la potencia dispersada en k_0^4 (o en λ_0^{-4}) es una ley universal de la dispersión y se denomina *Ley de Rayleigh.*

Cuestión: *¿Puede la Ley de Rayleigh explicar el color azul del cielo?*

4. **Ejemplo: sección eficaz de una esfera pequeña dieléctrica.** Para mejor entender las expresiones anteriores, estudiaremos el caso sencillo de una esfera dieléctrica de polarizabilidad (163). Sustituyendo en (167) obtenemos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{e}; \hat{\mathbf{r}}_0, \mathbf{e}_0) = k^4 a^6 \left| \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\hat{\varepsilon} + 2\varepsilon_0} \right|^2 |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2 \tag{168}$$

que no depende de la dirección de incidencia debido a la simetría esférica del objeto.

Generalmente se define el "plano de incidencia" como aquél plano (plano $y = 0$ en nuestra elección de ejes) que contiene a $\hat{\mathbf{r}}$ y a $\hat{\mathbf{r}}_0 = \hat{\mathbf{z}}$, se supone una polarización arbitraria de la onda incidente: $\mathbf{e}_0 = \cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\hat{\mathbf{y}}$ y se estudian los dos casos de polarización de la onda dispersada: paralela y perpendicular al plano de incidencia, $\mathbf{e}_\perp = \hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{e}_\parallel = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\hat{\mathbf{z}}$ repectivamente. Se tiene entonces

$$\mathbf{e}_\perp^* \cdot \mathbf{e}_0 = \cos\phi \tag{169}$$

y

$$\mathbf{e}_\parallel^* \cdot \mathbf{e}_0 = \cos\phi\, \cos\theta \tag{170}$$

de modo que

$$\frac{\partial\sigma_\perp}{\partial\Omega} = k^4 a^6 \left|\frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\hat{\varepsilon} + 2\varepsilon_0}\right|^2 \cos^2\phi \tag{171}$$

$$\frac{\partial\sigma_\parallel}{\partial\Omega} = k^4 a^6 \left|\frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\hat{\varepsilon} + 2\varepsilon_0}\right|^2 \cos^2\theta\, \cos^2\phi \tag{172}$$

Como ambas direcciones de polarización son ortogonales, la potencia dispersada sumada para todas las polarizaciones de la onda dispersada será simplemente la suma de ambas. Y lo mismo para la sección eficaz de dispersión total.

En la práctica solemos tener radiación incidente de polarización aleatoria, de modo que las secciones eficaces que se obtienen son los promedios para todos los valores de ϕ de las expresiones anteriores, que se obtienen sustituyendo $\cos\phi \to 1/2$. La sección eficaz promediada será entonces:

$$\left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} k^4 a^6 \left|\frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\hat{\varepsilon} + 2\varepsilon_0}\right|^2 (1 + \cos^2\theta) \tag{173}$$

La sección eficaz de dispersión total promediada será

$$\langle\sigma\rangle = \int \left\langle \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} \right\rangle d\Omega = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6 \left|\frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\hat{\varepsilon} + 2\varepsilon_0}\right|^2 \tag{174}$$

Ejercicio: *Calcular las secciones eficaces de dispersión de una pequeña esfera conductora perfecta.*

5. **Dispersión por colecciones de objetos.**

La dispersión por una colección de objetos pequeños es un problema complicado porque no sólo hay que considerar la interferencia entre las señales procedentes de los diversos objetos, sino que el campo incidente sobre un objeto incluye en principio al campo proviniente de los demás. Podemos considerar varios casos particulares, de menor a mayor dificultad:

a) **Dispersión incoherente o de Rayleigh:** En ese caso se considera que el campo incidente es el de la onda incidente sobre el conjunto de objetos (se desprecia la interacción entre objetos). Si los centros dispersores son idénticos y su distribución es aleatoria, la sección de dispersión del conjunto de objetos puede suponerse que es simplemente N veces la de un objeto aislado (dispersión incoherente), donde N es el número de objetos.

Como aplicación consideraremos la *extinción* de la radiación de determinada longitud de onda cuando atraviesa un medio que satisface las condiciones de la dispersión incoherente. Si la onda incide en la dirección x, la potencia dispersada por unidad de área entre x y $x - \Delta x$ será $P(x) - P(x + \Delta x) = N\sigma P(x)\Delta x$, donde $P(x)$ es el flujo de potencia que atraviesa el plano x. Por tanto la ecuación diferencial para $P(x)$ será $dP/dx = -N\sigma P$ con lo que

$$P(x) = P(0)\, e^{-x/\delta} \quad ; \quad \delta = 1/(N\sigma) \tag{175}$$

Esta expresión nos dice que $(N\sigma)^{-1}$ es la distancia típica de extinción de la radiación en un medio que presenta dispersión incoherente.

Ciuestión: *¿Puede (175), junto con la Ley de Rayleigh, explicar el color rojo de los atardeceres?*

b) **Dispersión coherente o de Bragg:** Cuando aún puede despreciarse la interacción entre los centros dispersores, pero no la interferencia entre los campos dispersados por cada uno de ellos, aparecen máximos definidos en la sección eficaz de dispersión para aquellas direcciones en las que se produce interferencia constructiva en la radiación procedente de los diferentes centros dispersores.

Puede aplicarse entonces la teoría de *arrays* de antenas para el cálculo del campo dispersado. Así cada centro dispersor puede considerarse como una antena y el conjunto como un array cuyo factor de array viene dado por (65). En dicha expresión las fases de cada antena vendrán dadas por su posición relativa respecto del frente de onda de la onda incidente $\psi_i = -k_0\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{a}_i$ donde $\mathbf{r}_0$ es el vector unitario en la dirección de la inda incidente, de modo que

$$F(\theta, \phi) = \sum_{i=1}^{N} e^{jk_0(\hat{\mathbf{r}}-\hat{\mathbf{r}}_0)\cdot\mathbf{a}_i} \tag{176}$$

Como la sección eficaz de dispersión es una medida de la potencia, la sección eficaz del conjunto será la de un elemento modulada por $|F(\theta, \phi)|^2$, a lo que se denomina "factor de estructura"

$$|F(\theta, \phi)|^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} e^{jk_0(\hat{\mathbf{r}}-\hat{\mathbf{r}}_0)\cdot(\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j)} = N + 2\sum_{i<j} \cos\left[k_0(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0)\cdot(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)\right] \tag{177}$$

Ejercicio: *Hallar los factores de array y estructura, y discutir la posición de los ceros de radiaciónen el plano de incidencia para un conjunto de dos esferas dieléctricas separadas una distancia $d = 2\lambda_0/3$ entre sí. La radiación incide formando un ángulo θ_0 con el alineamiento de las esferas y está polarizada en el plano de* *incidencia, que es el plano formado por las dos esferas, el radiovector de la onda incidente y el radiovector de la onda dispersada. Particularizar para $\theta_0 = 0, \pi/2$.*

Cuando hay un gran número de objetos dispuestos periódicamente, la dispersión coherente es la *dispersión de Bragg*, que se estudia en la física del estado sólido.

c) **Teorema de extinción de Ewald-Oseen:** En sistemas ópticos densos (cuando la distancia entre los centros dispersores es pequeña comparada con la longitud de onda) no se puede despreciar ni la interacción entre los centros dispersores ni la interferencia entre los campos dispersados. Admás en ese caso, al ser la distancia entre centros dispersores mucho menor que la longitud de onda, no se producen máximos secundarios de radiación. Se satisface entonces el *Teorema de extinción de Ewald-Oseen* que viene a demostrar que en esos casos la onda incidente se extingue completamente a distancia muy corta de la interfaz, reflejándose en parte y dando lugar a una onda refractada en el interior del "medio efectivo" formado por los centros dispersores.

6. **Dispersión por objetos grandes. Aproximación de longitud de onda larga.** Cuando el objeto dispersante tiene dimensiones mayores que varias longitudes de onda y además es conductor (por tanto opaco a la radiación incidente) se puede dividir en una zona de "iluminada" y otra de "sombra". En la zona de "sombra" no hay campos ni corrientes sobre el conductor. En la zona "iluminada" las corrientes sobre el conductor deben ser tales que anulen el campo en su interior: $\mu_0 \mathbf{K}_c = \mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_{\text{inc}} + \mathbf{B}_{\text{disp}})$ donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a la superficie del conductor. Si no hay mucha curvatura podemos suponer que sobre la superficie del conductor los campos se reflejan conforme a las leyes de la reflexión en un plano conductor:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{inc}} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{disp}} \Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{B}_{\text{inc}} \approx \mathbf{n} \times \mathbf{B}_{\text{disp}} \tag{178}$$

de modo que

$$\mathbf{K}_c \approx \frac{2}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}_{\text{inc}} \tag{179}$$

Dado que el campo incidente se supone conocido, la expresión (179) permite calcular los campos dispersados (la corriente (179) es la "fuente" de los campos dispersados)

Ejercicio: *Calcular las corrientes superficiales generadas en un disco metálico de radio $a \gg \lambda_0$ sobre el que incide normalmente una onda plana. Calcular el momento dipolar total asociado a dichas corrientes y comparar con el resultado (37) para un disco de radio $a \ll \lambda_0$.*

Ejercicio: *Calcular la densidad de potencia reflejada en dirección normal por el disco del ejercicio anterior.*

Ejercicio: *Plantear el problema (hallar la fuente del campo dispersado y expresar éste como una integral de dicha fuente) para el caso de una onda plana en incidencia oblicua sobre el disco de los ejercicios anteriores.*

7. **Teoría electromagnética (vectorial) de la difracción.** La teoría de la difracción estudia un caso particular de la dispersión de indas electromagnéticas: la dispersión por pantallas planas opacas con aperturas.

   Los primeros intentos para resolver el problema se deben a Kirchoff (1882) y son anteriores a la teoría de Maxwell del electromagnetismo. La teoría de la difracción de Kirchoff supone una función de onda escalar y se basa en los siguientes postulados

   - La función de onda escalar ψ y su derivada normal $\partial\psi/\partial n$ se anulan sobre la pantalla de difracción.
   - Se acepta la aproximación de que la función de onda y su derivada normal sobre la pantalla toman los mismos valores que tendrían para la onda incidente en ausencia de la pantalla (aproximación de Kirchoff).

   Aparte del hecho de que el segundo postulado es ya de por sí una aproximación que no siempre es válida, el primero contiene una inconsistencia matemática, pues se puede demostrar que una función que satisfaga la ecuación de onda y tal que ella misma y su derivada se anulan sobre una superficie finita, se anula idénticamente[3]

   Estas inconsistencias se resuelven mediante la teoría electromagnética (o vectorial) de la difracción que desarrollaremos a continuación. Para desarrollar esta teoría supondremos que la pantalla opaca es una pantalla conductora, aunque igualmente sería posible suponer que es un "conductor magnético" o cualquier otra condición de contorno que implique reflexión total.

   a) **Difracción por un obstáculo plano conductor.** Cuando tenemos un obstáculo plano podemos dividir el campo total en campo incidente y campo dipersado, cuyas fuentes son las corrientes generadas en el obstáculo. Dichas corrientes, de acuedo con la condición de contorno (95) vienen dadas por $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-)$ donde $\mathbf{H}^+$ ($\mathbf{H}^-$) es el campo a la derecha (izquierda) del objeto (se supone que la fuente está a la izquierda del objeto y que el vector unitario $\hat{\mathbf{z}}$ es perpendicular a éste y apunta hacia la derecha). Dado que los campos incidentes son obviamente contínuos sobre el objeto, esta condición se reduce a $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{H}^+_{\text{disp}} - \mathbf{H}^-_{\text{disp}})$. Por otro lado, los campos dispersados deben satisfacer las condiciones de simetría (120)-(123), de modo que

   $$\mathbf{K} = \frac{2}{\mu_0}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}^+_{\text{disp}} = -\frac{2}{\mu_0}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}^-_{\text{disp}} \tag{180}$$

   De (180) se deduce que el potencial vector de los campos dispersados en la zona de radiación será

   $$\mathbf{A}_{\text{disp}} = -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}^-_{\text{disp}}\, e^{jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\, ds' \tag{181}$$

[3]Este teorema puede entenderse como la generalización del conocido caso de la ecuación de onda en una dimensión: si en algún punto se anula la función y su derivada, podemos tomar los valores en este punto como valores "iniciales" y demostrar que la función se anula idénticamente.

donde la integral se extiende sobre toda la superficie del objeto.

Ejercicio: *Demostrar que el campo magnético tangencial en el plano del obstáculo pero fuera de él es igual al campo incidente.*

La integral (181) es exácta (para la zona de radiación), pero no nos permite calcular los campos dispersados, a menos que conozcamos su valor sobre el objeto. Si el objeto es grande comparado con la longitud de onda, podemos recurrir a la aproximación (178) en la zona iluminada: $\mathbf{B}_{\text{disp}}^{-} = \mathbf{B}_{\text{inc}}$. Bajo esta aproximación (que no es sino la generalización de la aproximación de Kirchoff) la ecuación (180) se transforma en

$$\mathbf{K} \approx -\frac{2}{\mu_0}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_{\text{inc}} \tag{182}$$

que en realidad no es sino un caso particular de (179), y la ecuación (181) en

$$\mathbf{A}_{\text{disp}} \approx -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_{\text{inc}}\, e^{jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}\, ds' \tag{183}$$

que sí nos determina el campo dispersado.

No obstante hay que tener cuidado a la hora de usar (183) y recordar que sólo sirve para el caso de objetos grandes. Si las dimensiones del objeto son menores o comparables a la longitud de onda el uso de (183) lleva a errores. Un ejemplo es el de la difracción por un disco conductor pequeño, que debe calcularse a partir de sus polarizabilidades (165).

b) **Difracción por una apertura en un plano conductor.** Aunque la difracción por una apertura en un plano conductor podría también obtenerse mediante el procedimiento del apartado anterior, es evidente que resulta mas apropiado obtener los campos dispersados a partir de alguna integral sobre la apertura. Para ello podemos recurrir al teorema de equivalencia (ver Tema II). La zona a la derecha de la pantalla ($z > 0$) es una zona sin fuentes, así que los campos en esa zona se pueden calcular a partir de una corriente superficial magnética $\mathbf{K}_M = \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}$ sobre la superficie de un plano conductor en $z = 0$. Como $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$ en todas partes excepto en la apertura, esta corriente sólo será diferente de cero sobre la apertura. Por otro lado, de acuerdo con la teoría de imágenes, los campos crados por esta corriente $\mathbf{K}_M$ a la derecha del conductor serán los mismos que los creados en todo el espacio por la corriente

$$\mathbf{K}'_M = 2\mathbf{K}_M = 2\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}} \tag{184}$$

Finalmente, de (101) el potencial vector $\mathbf{F}$ en la zona de radiación será

$$\mathbf{F}_{z>0} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int \mathbf{K}'_M\, e^{jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} ds' = \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}\, e^{jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} ds' \tag{185}$$

y los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ se deducen de (134)-(135) en la aproximación de radiación

$$\mathbf{E}_{z>0} = \frac{jk_0}{2\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\hat{\mathbf{r}} \times \int \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}} e^{jk_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} ds' \tag{186}$$

$$\mathbf{B}_{z>0} = \frac{1}{c}\,\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{z>0} \tag{187}$$

Es importante tener en cuenta que estos campos son los campos totales, no los campos dispersados.

Para calcular los campos en $z < 0$ hay primero que calcular los campos dispersados. En $z > 0$ éstos campos son los campos totales (186)-(187) menos los campos incidentes $\mathbf{E}_{\mathrm{disp}}^{\mathrm{z}>0} = \mathbf{E}[\mathbf{K}'_M] - \mathbf{E}_{\mathrm{inc}}$ y $\mathbf{B}_{\mathrm{disp}}^{\mathrm{z}>0} = \mathbf{B}[\mathbf{K}'_M] - \mathbf{B}_{\mathrm{inc}}$, donde $\mathbf{E}[\mathbf{K}'_M]$, $\mathbf{B}[\mathbf{K}'_M]$ son los campos creados por la corriente $\mathbf{K}'_M$ (186)-(187). Ahora, los campos dispersados en $z < 0$ pueden deducirse de los campos dispersados en $z > 0$ usando la simetría (120)-(123). Es decir, son los campos resultado de una reflexión en el plano $z = 0$. Consideremos primero los campos $\mathbf{E}[\mathbf{K}'_M]$, $\mathbf{B}[\mathbf{K}'_M]$, teniendo en cuenta las propiedades de las corrientes magnéticas frente a la reflexión, vemos que los nuevos campos corresponden a los campos creados en $z < 0$ por la corriente reflejada $-\mathbf{K}'_M$. En cuanto a los campos $\mathbf{E}_{\mathrm{inc}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{inc}}$, de las propiedades de los campos reflejados por un plano conductor, deducimos que se transforman en los campos incidentes reflejados por un plano conductor en $z = 0$ cambiados de signo. El resultado final para los campos totales en $z < 0$ es, por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathrm{z}<0} &= \mathbf{E}_{\mathrm{inc}} + \mathbf{E}_{\mathrm{r}} + \mathbf{E}[-\mathbf{K}'_M] &\quad (188)\\ \mathbf{B}_{\mathrm{z}<0} &= \mathbf{B}_{\mathrm{inc}} + \mathbf{B}_{\mathrm{r}} + \mathbf{B}[-\mathbf{K}'_M] &\quad (189) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{E}_{\mathrm{r}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{r}}$ son los campos incidentes reflejados por un plano conductor en $z = 0$. La interpretación de (188)-(189) es clara: los campos creados por la corriente $-\mathbf{K}'_M$ son los que hay que sumar a los qu habría en ausencia de la apertura para obtener los campos totales en $z < 0$.

Ejercicio: *Demostrar a partir de (188)-(189) que el campo magnético tangencial en la apertura es igual al campo incidente.*

Las expresiones anteriores son exáctas, pero no nos permiten calcular directamente los campos difractados, ya que desconocemos su valor en la apertura. Podemos sin embargo utilizar la aproximación de Kirchoff y suponer que el campo tengencial en la apertura es igual al campo incidente. De ese modo usamos

$$\mathbf{K}'_M \approx 2\mathbf{E}_{\mathrm{inc}} \times \hat{\mathbf{z}} \quad (190)$$

en las expresiones anteriores para obtener los campos. No obstante hay que tener en cuenta que esta aproximación no es válida cuando el tamaño de las aperturas es pequeño comparado con la longitud de onda.

8. **Teorema de Babinet.** Consideremos una onda incidente $\{\mathbf{E}_{\mathrm{inc}}, \mathbf{B}_{\mathrm{inc}}\}$ sobre un obstáculo plano conductor. Consideremos ahora la onda complementaria, definida por

$$\mathbf{E}_{\mathrm{inc}}^c = c\mathbf{B}_{\mathrm{inc}} \;\; ; \quad \mathbf{B}_{\mathrm{inc}}^c = -\frac{1}{c}\mathbf{E}_{\mathrm{inc}} \quad (191)$$

incidiendo sobre la "pantalla complementaria", donde *se han sustituido los conductores del problema anterior por aperturas.* El teorema de Babinet establece que, a la derecha de la pantalla ($z > 0$), entre los campos totales del problema complementario y los campos dispersados del problema original se da la relación

$$\mathbf{E}^c = -c\mathbf{B}_{\mathrm{disp}} \quad ; \quad \mathbf{B}^c = \frac{1}{c}\mathbf{E}_{\mathrm{disp}} \tag{192}$$

El teorema de Babinet es de gran importancia en la teoría de la difracción, porque establece que los diagramas de difracción del problema original y del problema complementario son iguales salvo en la dirección de incidencia. En efecto, de (192) se deduce para los vectores de Poynting del problema original y complementario que para $z > 0$

$$\mathbf{S}^c = \mathbf{S}_{\mathrm{disp}} \tag{193}$$

Como $\mathbf{S}_{inc}$ sólo es distinto de cero en la dirección de incidencia, vemos que para cualquier otra dirección es $\mathbf{S}^c = \mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}^c = \mathbf{S} \quad ; \quad \hat{\mathbf{r}} \neq \hat{\mathbf{r}_0} \tag{194}$$

La demostración rigurosa del Teorema de Babinet se da a continuación. No obstante la demostración aproximada en el marco de la aproximación de Kirchoff es bastante simple y se pone como ejercicio

Ejercicio: *Demostrar el Teorema de Babinet en el marco de la aproximación de Kirchoff, a partir de (182) y (190).*

La demostración rigurosa puede hacerse a partir del teorema de unicidad y de las relaciones de dualidad (136)-(139) sin escribir una sola fórmula. Para ello hay que considerar que

a) Los campos incidentes complementarios son los duales de los incidentes en el problema original.

b) Los campos magnéticos tangenciales en las zonas sin conductor del plano $z = 0$ son los campos magnéticos incidentes en ambos problemas

De ambas condiciones se deduce que las condiciones de contorno en $z = 0$ para los campos $\{\mathbf{E}_{\mathrm{disp}}, \mathbf{B}_{\mathrm{disp}}\}$ son las duales de las condiciones de contorno para $\{\mathbf{E}^c, \mathbf{B}^c\}$. De donde, del teorema de unicidad y de ser $z > 0$ una región sin fuentes, se deduce que éstos ultimos son tambien los duales de $\{\mathbf{E}_{\mathrm{disp}}, \mathbf{B}_{\mathrm{disp}}\}$ en $z > 0$, lo que demuestra (192).

Nota: *El Teorema de Babinet sólo es estrictamente válido para el caso de pantallas conductoras perfectas de espesor despreciable. En todos los demás casos el Teorema de Babinet debe verse sólo como una aproximación.*

9. **Difracción por aperturas pequeñas.** La aproximación de Kirchoff, que supone que el campo eléctrico en las aperturas coincide con el campo incidente, no es apropiada para aperturas de un tamaño similar o inferior a la longitud de onda. En ese caso es necesario hacer un análisis electromagnético detallado del problema. No obstante, si las aperturas son mucho mas pequeñas que la longitud de onda aún es posible llevar a cabo

otra aproximación debida a Bethe (1944). Para el caso particular de aperturas circulares esta aproximación puede obtenerse también a partir de las polarizabilidades (165) y del Teorema de Babinet.

Consideremos el problema de una onda incidente sobre un disco conductor pequeño y el problema complementario. De (192) se deduce que, vista desde la derecha ($z > 0$) la difracción por la apertura circular es el problema complementario de la difracción por el disco. En el primer caso el disco puede representarse mediante unos dipolos eléctrico y magnético dado por las polarizabilidades (165), de donde en el segundo caso, aplicando el Teorema de Babinet, debe poder representarse por unos dipolos magnético y eléctrico complementarios dados por $\mathbf{m}_c = c\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}_c = -\mathbf{m}/c$. Las polarizabilidades asociadas a la apertura serán entonces

$$\mathbf{m}_c = \beta^m_\parallel \, \mathbf{B}^{\rm inc}_\parallel \quad ; \quad \beta^m_\parallel = -c^2 \alpha^e_\parallel = -\frac{16}{3\mu_0}\, a^3 \tag{195}$$

$$\mathbf{p}_c = \beta^p_\perp \, \mathbf{E}^{\rm inc}_\perp \quad ; \quad \beta^e_\perp = -\alpha^e_\perp / c^2 = \frac{8}{3}\, \varepsilon_0 \, a^3 \tag{196}$$

Para el problema de los campos creados a la izquierda ($z < 0$) de la apertura, el signo de estas polarizabilidades debe invertirse, de acuerdo con (188)-(189).

Nota: *En algunos textos [Jackson] (y en el trabajo original de Bethe) estas polarizabilidades se refieren al campo que habría en ausencia de la apertura. Como el valor de estos campos es el doble del los campos incidentes, las expresiones en esos textos son la mitad de (195)-(196).*

Para el caso de aperturas peqeñas con otra geometría las polarizabilidades cambian pero el comportamiento cualitativo sigue siendo el mismo:

$$\mathbf{m}_c = \overline{\overline{\beta}}{}^m_\parallel \cdot \mathbf{B}^{\rm inc}_\parallel = -c^2 \overline{\overline{\alpha}}{}^m_\parallel \cdot \mathbf{B}^{\rm inc}_\parallel \tag{197}$$

$$\mathbf{p}_c = \overline{\overline{\beta}}{}^e_\perp \, \mathbf{E}^{\rm inc}_\perp = -\frac{1}{c^2} \overline{\overline{\alpha}}{}^m_\perp \, \mathbf{E}^{\rm inc}_\perp \tag{198}$$

donde $\overline{\overline{\alpha}}{}^m_\parallel$ y $\overline{\overline{\alpha}}{}^m_\perp$ son las polarizabilidades correspondientes al obstáculo.

Estas polarizabilidades nos dan los campos totales en la rgión $z > 0$. En la región $z < 0$ los campos vienen determinados por (187)-(188) con las corrientes $-\mathbf{K}'_M$ correspondientes a los dipolos $-\mathbf{p}_c$ y $-\mathbf{m}_c$. Esto demuestra como los momentos dipolares netos de la pantalla de difracción se anulan, como no podía ser de otro modo tratandose de una pantalla plana.

10. **Redes de difracción y superficies selectivas en frecuencia.** Las redes de difracción son conjuntos de aperuras (o de obstáculos planos) que poseen cierta periodicidad. Si la difracción por una apertura (u obstáculo) es conocida y la interacción entre las diferentes aperturas (u obstáculos) puede despreciarse, el problema de la red de difracción puede estudiarse aplicando la teoría de arrays de antenas, del mismo modo que se estudia la dispersión por una colección periódica de centros dispersores. En concreto la dirección

de los máximos y mínimos de radiación vendrá determinada por el factor de estructura de la red (177).

Ejercicio: *Estudiar los factores de array y de estructura para incidencia normal, así como la posición de los máximos y mínimos de difracción para una red de difracción formada por 2 rendijas paralelas separadas una distancia* $2\lambda_0$.

Para el caso particular de la difracción por una red periódica infinita de rendijas (o, en la práctica, para un gran número de rendijas), los máximos de difracción aparecerán en la posición de los máximos del factor de array de dos rendijas contíguas (que será en la dirección en la que $F \to \infty$, siendo aproximadamente cero para otras direcciones). Es decir, para superficies periódicas infinitas, sólo se producen máximos de difracción en direcciones ditintas de la normal si la distancia entre rendijas es superior a una longitud de onda. La posición de esos máximos, de acuerdo con el Teorema de Babinet, coincide para la red de difracción y para su complementaria.

Ejercicio: *Estudiar la posición y la magnitud de los máximos de difracción para una red de difracción formada por 2, 3, 4, 5 ... etc, rendijas paralelas separadas una distancia* $2\lambda_0$ *(este ejercicio ilustra la afirmación anterior).*

De acuerdo con la discusión anterior, si la distancia entre las aperturas de una red periódica bidimensional es menor que una longitud de onda, no se presentan máximos de difracción en direcciones distintas a la de incidencia. No obstante, si las aperturas presentan resonancias a ciertas frecuencias, se presentarán también máximos y mínimos de difracción en la dirección de incidencia para dichas frecuencias[4]. Estas configuraciones reciben el nombre de "superficies selectivas en frecuencia" (SSF). Consideremos una SSF formada por un conjunto de aperturas que resuenan a la frecuencia ν_0 practicadas en una pantalla conductora perfecta. A esta frecuencia los campos excitados en las aperturas se harán máximos, estando su valor solo limitado por la conservación de la energía (el módulo del coeficiente de transmisión de la SSF no puede ser mayor que la unidad). Por tanto obtenemos un pico de transmisión total a la frecuencia de resonancia de las aperturas, que coincidirá con un cero del coeficiente de reflexión ($r = 0$). De acuerdo con la conocida relación $t = r + 1$ el coeficiente de transmisión debe ser $t = 1$ y no sólo tener módulo unidad[5].

La SSF que hemos considerado (formada por aperturas) puede considerarse como la complementaria de otra en la que las aperturas se sustituyen por conductores y el resto de la pantalla por vacío. Si consideramos la excitación de esta nueva SSF – formada por obstáculos en lugar de aperturas – por los campos $\{\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{B}_{\text{inc}}\}$ y la de la primera SSF por los campos complementarios (204), de (192) se deduce que los campos a la derecha

[4]En realidad, debido a la interacción entre rendijas, que aquí hemos despreciado, las frecuencias de resonancia de la SSF serán ligeramente distintas de las de las aperturas individuales.

[5]Otra forma de ver esto: si no fuera unidad los campos a la derecha serían distintos de los incidentes, por tanto las corrientes en la pantalla deberían crear algún campo dispersado de radiación, lo que haría que el coeficiente de reflexión fuera distinto de cero.

($z > 0$) de la FSS formada por obstáculos son

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{disp}} = -c\mathbf{B}^c_{\text{inc}} + c\mathbf{B}^c \tag{199}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{inc}} + \mathbf{B}_{\text{disp}} = \frac{1}{c}\mathbf{E}^c_{\text{inc}} - \frac{1}{c}\mathbf{E}^c \tag{200}$$

Por tanto a la frecuencia que la SSF formada por aperturas tiene un máximo de transmisión ($t = 1$) los campos a la derecha de la SSF complementaria formada por obstáculos se anulan ($t = 0$) para la excitación complementaria[6]. Esta es una propiedad completamente general: Las SSF formadas por aperturas presentan picos de transmisión a la frecuencia de resonancia, mientras que las SSF formadas por obstáculos presentan ceros de transmisión en la resonancia.

11. **Método de la guía equivalente para incidencia normal. Anomalía de Wood.** En el caso de redes de difrcción y SSFs peródicas con múltiples planos de reflexión y en incidencia normal, es posible establecer una equivalencia entre éstos problemas y el de un obstáculo o apertura en una guía de ondas rectangular para cada una de las polarizaciones ortogonales de la onda incidente. La sección de la guía debe elegirse igual a la periodicidad del array y las paredes deben ser conductoras o "conductoras magnéticas" en función de la polarización del campo incidente. Entonces el problema de la difracción por la pantalla infinita se transforma en el problema más sencillo de una guía de onda rectangular con un obstáculo o un diafragma en su interior. Este problema se puede resolver en muchos casos mediante "mode matching", es decir expandiendo el campo a izquierda y derecha del obstáculo en los modos de la guía y exigiendo que en el plano del obstáculo se satisfagan las condiciones de contorno para los campos tangenciales: campo eléctrico tangencial igual a cero sobre los conductores y campo magnético tangencial igual al de la onda incidente sobre las aperturas. Si la periodicidad es mayor que la longitud de onda, en la guía se excitarán los modos superiores, cuya amplitud dará la amplitud de los máximos de difracción de orden superior.

   Como ejemplo consideremos el problema bidimensional de la difracción por rendijas pequeñas de anchura w dispuestas paralelamente sobre un plano conductor con periodicidad a. La polarización de la onda incidente es en la dirección perpendicular a las rendijas (dirección x). La guía de ondas equivalente es una guía de placas paralelas separadas una distancia $a \leq \lambda_0$ (no hay máximos de difracción en direcciones distintas de la de incidencia) en dirección y. Los únicos modos compatibles con la peridicidad y la simetría del problema son el modo TEM y los modos $\text{TM}_{n,0}$ ($n = 2, 4, ...$). El modo TEM que viaja hacia la rendija desde la izquierda es la onda incidente, que supondremos de amplitud unidad. Los otros modos TEM son la onda reflejada y la transmitida, de amplitudes r y t respectivamente. Los campos de los modos TM son de la forma (el origen de coordenadas

[6] Como ocurre con las aperturas de forma arbitaria, las propiedades de transmisión y reflexión de las SSF dependen, en general, de la polarización de la onda incidente.

se toma en el punto medio de las rendijas)

$$E_z \quad \propto \quad \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{201}$$

$$E_x = ZH_y \quad \propto \quad \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{202}$$

donde

$$Z_n = -j\eta_0\sqrt{\left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2 - 1} \tag{203}$$

A la derecha ($z > 0$) de la rendija el campo eléctrico tangencial se pueden expandir por tanto en la serie

$$E_x(x) = t + \sum_{n=2,4,...} t_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{204}$$

donde t es el coeficiente de transmisión. Dado que E_x se anula en todas partes excepto en la rendija, tenemos

$$\int_{\text{rendija}} E_x \, dx = ta \tag{205}$$

Ahora podemos determinar los coeficientes t_n de la serie de Fourier (204) multiplicando a la izquierda por $\cos(n\pi x/a)$ y usando las propiedades de ortogonalidad de la fucnion coseno. Si la rendija es suficientemente estrecha, de modo que podamos despreciar la variación de $\cos(n\pi x/a)$ sobre ella, obtenemos el resultado

$$t_n \approx 2t \tag{206}$$

resultado que nos dice que necesitamos muchos términos de la serie (204) para obtener el campo elécrico en la apertura (al menos hasta que la aproximación (206) deje de ser válida). El campo magnético en la rendija debe ser, como ya sabemos, igual al campo incidente, es decir $H_y(\text{rendija}) = 1/\eta_0$. Si de nuevo despreciamos la variación de $\cos(n\pi x/a)$, tenemos un campo H_y aproximadamente consante en la rendija dado por la serie

$$H_y(\text{rendija}) = \frac{1}{\eta_0} \approx t\left(\frac{1}{\eta_0} + \frac{2}{Z_2} + \frac{2}{Z_4} - ....\right) \tag{207}$$

que nos permitiría obtener el coeficiente de transmisión en la aproximación de rendijas pequeñas[7] De donde el coeficiente de trransmisión será

$$t \approx \frac{1}{\eta_0}\left(\frac{1}{\eta_0} + \frac{2}{Z_2} + \frac{2}{Z_4} + ...\right)^{-1} \tag{208}$$

Aunque la aproximación utilizada no es muy buena[8] la expresión (208) és útil porque permite un análisis cualitativo del problema. En primer lugar, cada vez que $Z_n \to 0$ ocurre

[7] En el caso de no cumplirse (206) habría que determinar cada coeficiente t_n, lo que no ofrece dificultad.

[8] Para valores altos de n (206) deja de cumplirse y el numerador de (207)-(208) debe hacerse menor que uno, lo que garantiza la convergencia de la serie.

que $t \to 0$. De acuerdo con (203) esto ocurre cada vez que la periodicidad del array de rendijas es un múltiplo entero de la longitud de onda. Este comportamiento es universal y ocurre siempre en sistemas de rendijas cuando la polarización de la onda incidente es perpendicular a las rendijas. Recibe el nombre de *Anomalía de Wood*. Para sistemas de bandas conductoras bajo polarización incidente paralela a las bandas, del Teorema de Babinet se deduce que cuando la periodicidad es igual a un múltiplo de la longitud de onda, entonces se produce transmisión total ($t = 1$). Para estructuras bidimensionales, puede demostrarse mediante un razonamiento análogo – pero matemáticamente mas complicado – que la anomalía de Wood con reflexión total se produce, para cualquier polarización, en pantallas periódicas de difracción formadas por pequeñas aperturas. En la pantalla complementaria, que sustituye las aperturas por obstáculos, se produce la anomalía de Wood con trasmisión total a las mismas frecuencias.

Tema IV: Dispersión en medios materiales. Metamateriales.

En este capítulo estudiaremos la dispersión de un grupo de ondas en un medio material transparente. Sponemos conocidos los fundamentos de la teoría de propagación de ondas (velocidad de fase y grupo, etc...). También suponemos concida la teoría elemental de la dependencia en frecuencia de la permitividad y la permeabilidad de los medios materiales (modelo de Drude-Lorentz). Estudiaremos finalmente las propiedades de los medios de refracción negativa (metamateriales).

1. **Medios locales:** Las relaciones constitutivas de medios lineales se expresan mejor en el dominio de la frecuencia. Ello es así porque las relaciones en el dominio del tiempo toman la forma de una integral de convolución. Para medios lineales y locales:

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(\tau) \mathbf{E}(t-\tau)\, d\tau \tag{209}$$

   donde el principio de causalidad impone que

$$\chi_e(\tau) = 0 \quad \text{para todo} \quad \tau < 0 \tag{210}$$

   de modo que la integral se extiende sólo a los instantes anteriores a t. Si consideramos un campo $\mathbf{E}$ que varíe armónicamente con el tiempo a frecuencia ω, la relación (209) supone la siguiente relación entre los fasores de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi_e(\omega)\right) \mathbf{E} = \epsilon(\omega) \mathbf{E} \tag{211}$$

   donde $\chi_e(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\chi_e(\tau)$:

$$\chi_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(\tau) e^{-\jmath\omega\tau} d\tau \tag{212}$$

   Análogamente entre los fasores de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en un medio lineal y local se da la relación:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left(1 + \chi_m(\omega)\right) \mathbf{H} = \mu(\omega) \mathbf{H} \tag{213}$$

   de ese modo las relaciones en el tiempo (209) (y su análoga para medios magnéticos), adquieren en el dominio de la frecuencia (o fasorial) la forma mucho mas simple dada por (211) y (213).

2. **Propiedades de la susceptibilidad compleja $\chi_e(\omega)$:** Consideremos la extensión al plano complejo de la susceptibilidad compleja χ_e, definida en (212), donde ω es ahora sustituida por una variable compleja $\hat{\omega}$. Para $\chi_e(\hat{\omega})$ pueden demostrarse las siguientes propiedades:

a)
$$\chi_e(-\hat{\omega}) = \chi_e^*(\hat{\omega}^*) \tag{214}$$
que se deduce del hecho de que la transformada inversa de χ_e, $\chi_e(\tau)$, debe ser real. De esta propiedad se deduce que la parte real de $\chi_e(\omega)$ debe ser una función par de ω, mientras que su parte imaginaria debe ser una función impar de ω.

b)
$$|\chi_e(\hat{\omega})| \text{ está acotada para } \mathrm{Im}(\omega) < 0 \tag{215}$$
que se deduce de la condición de causalidad (210). Es decir que $\chi_e(\omega)$ no tiene polos (es una función analítica) en el semiplano inferior del plano complejo.

c) Los valores de $\chi_e(\omega)$ para valores grandes de $|\hat{\omega}|$ vienen determinados por los valores de $\chi_e(\tau)$ para τ pequeño. Si hacemos un desarrollo en serie de $\chi_e(\tau)$ en torno a $\tau = 0$:
$$\chi_e(\tau) = \chi_0 + \chi_1\tau + \chi_2\tau^2 + ... \tag{216}$$
y sustituimos en (212), obtenemos que
$$\chi_e(\hat{\omega}) \rightarrow -\jmath\frac{\chi_0}{\omega} + \frac{\chi_1}{\omega^2} - ... \tag{217}$$

d) De (217) y del teorema de Cauchy se deduce entonces que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \Re\left\{\chi_e(\omega)\right\} d\omega = 0 \Rightarrow \langle\chi_e(\omega)\rangle = 0 \tag{218}$$
las propiedades (217)-(218) indican que el valor medio de $\Re\left\{\epsilon(\omega)\right\}$ debe ser igual a ϵ_0 y que para $\omega \rightarrow \infty$, debe ser $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$.

e)
$$\mathrm{Im}(\chi_e(\omega)) \leq 0 \tag{219}$$
para todo ω real y positiva. Lo que se deduce del hecho de que todos los medios lineales deben ser disipativos.

Las mismas propiedades pueden enunciarse para la susceptibilidad magnética $\chi_m(\omega)$.

3. **Relaciones de Kramers-Krönig:** Sea $\mathrm{Im}(\hat{\omega}) < 0$, de acuerdo con la propiedad (218) y con el teorema de Cauchy:
$$\chi(\hat{\omega}) = -\frac{1}{2\pi\jmath}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(\omega')}{\omega' - \hat{\omega}}d\omega' \tag{220}$$
Aproximemos ahora $\hat{\omega}$ al eje real: $\hat{\omega} = \omega - \jmath\delta$ con $0 < \delta \ll 1$. En el límite $\delta \rightarrow 0$ podemos escribir:
$$\chi(\omega) = -\frac{1}{2\pi\jmath}\mathcal{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}d\omega'\right\} - \frac{\chi(\omega)}{2\pi\jmath}\int_{\omega-\delta}^{\omega+\delta}\frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \tag{221}$$

donde $\mathcal{P}$ indica la "parte principal" de la integral y la segunda integral debe realizarse a lo largo de un semicirculo sobre el eje real de radio δ. Ésta integral puede calcularse usando $\omega' - \omega = \delta \exp{(j\phi)}$ y $d\omega' = d(\omega' - \omega) = j\, d\phi\, \delta \exp{(j\phi)}$. El resultado es:

$$\int_{\omega-\delta}^{\omega+\delta} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} = -\jmath\pi \tag{222}$$

lo que sustituido en (221) da finalmente:

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{\pi\jmath}\mathcal{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'\right\} \tag{223}$$

La ecuación (223) contiene ya a las denominadas "relaciones de Kramers-Krönig". No obstante, suele escribirse de otro modo. Para ello se hace uso de la propiedad (214) que, para ω real implica que la parte real de $\chi(\omega)$ es una función par y la parte imaginaria impar. Teniendo esto en cuenta, tras un poco de álgebra, se demuestra que:

$$\mathrm{Re}[\chi(\omega)] = -\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\left\{\int_{0}^{\infty} \frac{\omega'\mathrm{Im}[\chi(\omega')]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'\right\} \tag{224}$$

$$\mathrm{Im}[\chi(\omega)] = \frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\left\{\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}[\chi(\omega')]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'\right\} \tag{225}$$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como las "relaciones de Kramers-Krönig" (obsérvese que en (224)–(225) sólo aparecen frecuencias reales y positivas, que son las que poseen sentido físico). Éstas relaciones son de gran importancia y generalidad e implican que todo medio polarizable o magnetizable debe ser, a su vez, disipativo.

4. **Medios transparentes ideales**

Las relaciones de Kramers-Krönig implican que un medio sin pérdidas (es decir con $\Im\{\chi_e(\omega)\} = 0$ para todo ω debe tener $\varepsilon = \varepsilon_0$, es decir sólo puede ser el vacío. No obstante, es posible imaginar un medio tal que $\Im\{\chi_e(\omega)\} = 0$ en todo el eje real, salvo en un conjunto finito (o infinito pero numerable) de puntos. Este medio será causal y, por tanto, físico. Denominaremos a este medio "medio transpaente ideal". Como la integral (224) debe ser finita, la parte imaginaria de $\chi_e(\omega)$ debe venir dada por

$$\Im\{\chi_e(\omega)\} = -\sum_i K_i \delta(\omega - \omega_i) \tag{226}$$

donde las constantes K_i son todas positivas, de acuerdo con la propiedad (219)

Sustituyendo en la integral (224) obtenemos

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi_e) = \varepsilon_0\left(1 + \sum_i \frac{A_i}{\omega_i^2 - \omega^2}\right) \tag{227}$$

donde las constantes A_i son todas positivas. La expresión (227) indica que la constante dieléctrica de un medio transparente ideal presenta una serie de polos a las frecuencias de resonancia del medio ω_i siendo real y finita para cualquier otro valor de ω. Una particularidad de la expresión (227) es la presencia de regiones con $\varepsilon < 0$. Evidentemente en esas regiones el medio deja de ser transparente (excepto cuando μ se hace tanbién negativa).

La expresión (227) es el límite cuando la constante de pérdidas se anula ($\gamma \to 0$) de la conocida expresión de Drude-Lorentz (ver, por ejemplo, los apuntes de "Electromagnetismo en le Materia") para la constante dieléctrica de los medios reales

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{(\omega_i^2 - \omega^2 + \jmath \gamma_i \omega)} \tag{228}$$

donde $\omega_p = \sqrt{Ne^2/(\varepsilon_0 m)}$ es la "frecuencia de plasma" y f_i la "frecuencia de oscilador" correspondiente a cada resonancia. De modo que podemos identificar las constantes A_i en (227) como $A_i = \omega_p^2 f_i$.

Ejercicio: *Demostrar que la susceptibilidad asociada a la constante dieléctrica (228) satisface las relaciones de Kramers-Krönig (224)–(225).*

5. **Plasmas:** El caso particular mas sencillo de la relación (227) es cuando el sumatorio se reduce a un sólo término con frecuencia de resonancia $\omega_i = 0$. En ese caso, (227) se reduce a

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \tag{229}$$

Esta expresión nos dice que $\varepsilon > 0$ si y solo sí $\omega > \omega_p$, de modo que si suponemos que el medio carece de propiedades magnéticas ($\mu = \mu_0$) la constante de fase $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$ se hace imaginaria cuando $\omega < \omega_p$, es decir el medio se hace propagativo sólo para frecuencias superiores a la frecuencia de plasma. Si $\omega = \omega_p$, entonces $k = 0$ ó $\lambda \to \infty$, de modo que la frecuencia de plasma corresponde a la frecuencia de excitación de las oscilaciones colectivas del plasma.

Los plasmas reales corresponden también al caso límite de la relación de Drude-Lorentz (228) cuando $\omega_i = 0$, lo que nos lleva a la relación

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \jmath\gamma\omega)} \right) \tag{230}$$

Como ω_i en el modelo de Drude-Lorentz es la frecuencia de resonancia de los osciladores elementales (atómicos y moleculares) que forman el medio, el límite $\omega_i \to 0$ hay que interpretarlo como la ausencia de cualquier tipo de fuerza recuperadora para los electrones. Así pués, los plasmas reales corresponden a medios ionizados, donde conviven iones y electrones libres (de hecho, hay un término análogo al segundo sumando de (231) para los iones, que sin embargo se suele despreciar debido a que la gran masa de los iones hace que sus oscilaciones sean mucho mas pequeñas).

Ejercicio: *La densidad del plasma ionosférico es de* $N \sim 10^{10} - 10^{12}$ *electrones por metro cúbico. Calcular a que frecuencias el plasma ionosférico se hace transparente a la radiación electromagnética. Solución:* $f = \omega_p/(2\pi) \sim 10^6 - 10^7 Hz$*..*

También hay una estrecha relación entre los plasmas ideales y los metales a frecuencias ópticas. A esas frecuencias el periodo de oscilación de los electrones es mucho menor que su frecuencia de colisión, con lo que el gas de electrónes se comporta como un plasma. A la misma conclusión se llega a partir del modelo de Drude-Lorentz: como en el metal hay electrones libres, a (228) hay que añadirle un término con $\omega_i = 0$, de modo que la constante dieléctrica de los metales a frecuencias ópticas es de la forma

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \jmath\gamma\omega)} \right) \tag{231}$$

donde ε_i es la contribución a la permitividad de los iones de la red, que incorpora todos los términos de (228) con $\omega_i \neq 0$ y que, por ello, depende débilmente de la frecuencia (en el rango óptico).

A baja frecuencia, la expresión (231) incorpora el efecto de la conductividad, por lo que suele escribirse como

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \frac{\sigma}{j\omega} \tag{232}$$

donde σ es la conductividad a baja frecuencia

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\gamma + j\omega} = \frac{Ne^2}{m(\gamma + j\omega)} \tag{233}$$

Si comparamos con la expresión estática de la conductividad $\sigma = Ne^2\tau/m$, donde τ esl el tiempo medio entre colisiones, vemos que $\gamma = 1/\tau$ no es sino la frecuencia de colisión de los electrones, resultado que es válido para cualquier plasma.

Ejercicio: *Sustituyendo (231) en (174) hallar la sección eficaz de dispersión de una pequeña esfera metálica inmersa en el vacío y en un vidrio de constante dieléctrica* $\varepsilon = 2\varepsilon_0$*. Demuestre que aparecen picos muy intensos de dispersión para determinadas frecuencias y dé una expresión para estas frecuencias. Consulte los manuales disponibles y dé valores explícitos para tales frecuencias (en* s^{-1}*) para algunos metales típicos (Au, Ag, Cu, Al, Pb). ¿En que región del espectro electromagnético se encuentran esos picos de dispersión? ¿Qué aplicación conocida desde la antigüedad tiene este efecto?*

Ejercicio: *Considere la superficie de separación entre un medio con* $\epsilon = -\epsilon_0$ *y el vacío. Para fijar ideas supondremos que dicha superficie corresponde al plano* $z = 0$*. Demostrar que la ecuación de Laplace para el potencial admite soluciones físicas del tipo* $\phi(z,x) = K \exp(-jkx - k|z|)$*, donde* $k > 0$ *puede tomar cualquier valor.*

Las soluciones del ejemplo anterior corresponden a ondas quasi-electrostáticas que se propagan en la interfaz entre un plasma y el aire cuando $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$. Estas ondas se denominan "plasmones de superficie". Un análisis mas detallado, basado en las ecuaciones de Maxwell, demuestra que, en realidad, estas ondas existen para todas las fecuencias $\omega < \omega_p/\sqrt{2}$, y que sólo toman valores arbitrarios de k para $\omega \to \omega_p/\sqrt{2}$

6. **Energía en medios transparentes:**

El flujo de energía debe ser contínuo en la interfaz entre un medio transparente y el vacío. De esta propiedad se deduce que el vector de Poynting $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, cuya componente normal es contínua en la interfaz entre un medio transparente y el vacío, debe dar también en flujo de energía electromagnética en el interior de dicho medio[9].

Para una onda plana propagándose en un medio transparente de constantes ε y μ a lo largo del eje z, con vector de Poynting $\mathbf{S} = S\hat{\mathbf{z}}$ y vector de onda $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$, se debe de cumplir que

$$S = \frac{\partial \omega}{\partial k} \langle u \rangle \tag{234}$$

donde $\langle u \rangle$ es la densidad de energía electromagnética, ya que $\dfrac{\partial \omega}{\partial k}$ es la velocidad de grupo. Por otro lado es fácil comprobar que

$$S = \frac{\omega}{k} \left(\frac{1}{4}\varepsilon E^2 + \frac{1}{4}\mu H^2 \right) \tag{235}$$

donde ω/k es el inverso de la velocidad de fase. Es decir, que la expresión para la densidad de energía

$$\langle u \rangle_{\text{no disp.}} = \frac{1}{4}\varepsilon E^2 + \frac{1}{4}\mu H^2 \tag{236}$$

sólo es válida para medios no dispersivos, en los que $\omega/k = \partial\omega/\partial k$.

De (234)–(235) se deduce entonces que, en general

$$\langle u \rangle = \frac{\omega}{k} \left(\frac{1}{4}\varepsilon E^2 + \frac{1}{4}\mu H^2 \right) \frac{\partial k}{\partial \omega} \tag{237}$$

De esta expresión tras un poco de álgebra, usando que para una onda plana se cumple que $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ y que $E/H = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, se llega finalmente a la expresión

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial \omega} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial \omega} |\mathbf{H}|^2 \right\} , \tag{238}$$

que nos da la energía electromagnética en medios transparentes dispersivos. La relación (238) impone un límite a los valores de ε y μ que pueden obtenerse, ya que la energía electromagnética debe ser siempre positiva (de otro modo, la configuración mas favorable desde el punto de vista energético sería aquella en la que los campos $\mathbf{E}$ y/o $\mathbf{H}$ crecen hasta el infinito). Por tanto, en todo medio físico debe cumplirse que

$$\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial \omega} > 0 \;\; ; \quad \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial \omega} > 0 \tag{239}$$

[9] Despreciamos las pérdidas (medio "ideal") por tanto consideraremos que tanto los campos como ε y μ son esencialmente reales, lo que simplifica mucho las expresiones, sin que se pierda la física subyacente.

7. **Medios de refracción negativa:** Consideremos un medio transparente ideal con ε y μ dados por (227). Este medio presenta regiones de $\varepsilon < 0$ y de $\mu < 0$. Estas regiones serán en general no propagativas, excepto cuando ε y μ sean simultñaneamente negativos. En ese caso la constante de propagación $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ es real y las ondas electromagnéticas pueden propagarse por el medio. Tomando ahora la derivada

$$\frac{\partial k^2}{\partial\omega} = \omega\varepsilon\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} + \omega\mu\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} \tag{240}$$

que debe ser negativa si ε y μ son simultáneamente negativos, llegamos a la conclusión de que

$$\frac{\partial k^2}{\partial\omega} = 2k\frac{\partial k}{\partial\omega} = \frac{2}{v_f v_g} < 0 \tag{241}$$

donde v_f y v_g son las velocidades de fase y grupo respectivamente. Por tanto, los medios con ε y μ simultáneamente negativos satisfacen que

$$\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_g < 0 \tag{242}$$

A la misma conclusión se llega a partir de las ecuaciones para las ondas planas en un medio uniforme

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H} \;\; ; \quad \mathbf{k}\times\mathbf{H} = -\omega\varepsilon\mathbf{E} \tag{243}$$

De donde se deduce que en medios con ε y μ simultáneamente negativos se satisface que

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{k} < 0 \tag{244}$$

Hasta ahora hemos considerado medios transparentes sin pérdidas, pero todos los medios reales tienen algo de pérdidas. Supongamos ahora que tanto ε como μ tienen una pequeña parte imaginaria que, de acuerdo con (219), será negativa. Así pués

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu \simeq \omega^2\Re(\varepsilon)\Re(\mu) + j\Re(\varepsilon)\Im(\mu) + j\Im(\varepsilon)\Re(\mu) \tag{245}$$

de modo que $\Im(k^2) > 0$ si ε y μ son simultáneamente negativos. Si consideramos ahora la constante de propagación $k = \sqrt{k^2}$, tiene parte real y parte imaginaria simultáneamente positivas, es decir que corresponde a una onda que crece en al dirección de propagación. Esto está en consonancia con las relaciones (242) y (244).

Consideremos ahora la refracción de un rayo que incide desde el vacío en un medio con ε y μ simultáneamente negativos. Dado que la dirección de propagación del rayo refractado viene definida por $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} < 0$, donde $\mathbf{n}$ es la normal hacia afuera de la interfaz entre el medio y el vacío, deducimos que debe ser $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} > 0$, donde $\mathbf{k}$ es la constante de propagación en el medio. De la condición de contorno $\mathbf{k}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{k}\times\mathbf{n}$ en la interfaz, se deduce ahora la Ley de Snell que relaciona los ángulos de incidencia y refracción θ_i y θ_r

$$\frac{\sin\theta_i}{sin\theta_r} = -\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} = n \tag{246}$$

Es decir que los rayos incidente y refractado caen al mismo lado de la normal [ese es el significado del sigmo menos en (246)]. Los medios con ε y μ simultáneamente negativos tienen pues índice de refracción negativo, dado por $n = -\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$.

Ejercicio: *Considere una lámina infinita de índice de refracción n<0 y espesor d. Demostrar que los rayos paraxiales procedentes de una fuente puntual situada a una distancia $a < d$ de una de las intefaces, focalizan al otro lado de la lámina a una distancia $x = d + d/|n|$ de la fuente. Demostrar que, en el caso particular de $n = -1$, todos los rayos procedentes de la fuente (no sólo los paraxiales) focalizan a una distancia $x = 2d$ de la fuente.*

Este ejercicio demuestra que una lámina de medio con índice de refracción negativo puede actuar como una pseudo-lente que re-focaliza los rayos procedentes de un foco puntual.

Ejercicio: *Considere una lámina infinita de espesor d con $\varepsilon = -\varepsilon_0$ y $\mu = -\mu_0$. Demuestre que:*

a) *Una onda plana incidente normalmente sonbre la lámina la traviesa sin reflejarse*

b) *Una onda plana incidente sobre la lámina formando un ángulo arbitrario con la normal la atraviesa también sin reflejarse*

Este ejercicio demuestra que una lámina con $\varepsilon = -\varepsilon_0$ y $\mu = -\mu_0$ se comporta como una lente sin reflexiones. Hay que tener en cuenta, de todos modos, que de acuerdo con (227) ésto solo puede ocurrir a una frecuencia muy concreta.

Ejercicio: *Considere la interfaz en $z = 0$ entre el vacío y un medio con $\varepsilon = -\varepsilon_0$ y $\mu = -\mu_0$. Demuestre que dicha interfaz soporta ondas de superficie $\sim e^{-jkx-\alpha|z|+j\omega t}$, donde k puede tomar cualquier valor mayor que $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ y $\alpha = \sqrt{k^2 - k_0^2}$.*

Estas ondas de superficie son análogas a los plasmones de superficie ya estudiados. La diferencia, no obstante, es que estas soluciones son exáctas y existen para cualquier valor de $k > k_0$ a la frecuancia apropiada.

La solución anterior es la solución "física", que se atenúa a medida que nos alejamos de la interfaz. No obstante, existe también una solución "no-física", que es de la forma $\sim e^{-jkx+\alpha|z|+j\omega t}$. Si se combinan dos interfaces, en $z = 0, d$, para dar lugar a una lámina de espesor d, podemos también combinar la solución "física" en $z = d$ con la "no-física" en $z = 0$ para concluir que *Una lámina de espesor d y $\varepsilon = -\varepsilon_0$, $\mu = -\mu_0$ "amplifica" las ondas evanescentes que inciden desde desde un plano fuente a una distanca $a < d$ de la lente, de modo que su amplitud se restaura a una distancia $2d$ del plano fuente (en $z = 2d - a$).*

Éste es un resultado extremadamente importante, ya que demuestra que una lámina de $\varepsilon = -\varepsilon_0$ y $\mu = -\mu_0$ actúa como una "lente perfecta" que reproduce los campos en el plano fuente en otro plano al otro lado de la lente, a una distancia $2d$ del plano fuente. No obstante, hay que decir que este efecto se ve fuertemente afectado tanto por las pérdidas como por la dispersión en frecuencia de ε y μ, que limitan severamente tanto el espesor d como el ancho de banda frecuencial del dispositivo.

8. **Metamateriales:** Medios con ε y μ simultáneamente negativos no se encuentran en la Naturaleza. Durante los últimos años (especialmente a partir del año 2000), se han diseñado medios artificiales que poseen esta propiedad a ciertas frecuencias específicas (las relaciones de Kramers-Krönig imponen que este tipo de medios sólo puedan existir en un ancho de banda frequencial pequeño). Para ello se han utilizado diferentes técnicas. Muchas de ellas (las mas usuales) pueden consultarse en el último libro de la Bibliografía recomendada (especialmente en su Cap.2).

Bibliografía recomendada

- R. F. Harrington “Time harmonic electromagnetic fields”. McGraw-Hill. Capítulos 1-3,
- A. C. Balanis “Antenna Theory”. Wiley. Capítulo 1.
- J. D. Jackson “Classical Electromagnetic Field”. Wiley. Capítulo 10.
- R. Marqués et al. “Metamaterials with negative parameters”. Wiley. Capítulos 1-2.