

# ELECTROMAGNETISMO

Ricardo Marqués

Profesor Titular de Electromagnetismo

Aviso: Estas notas NO son los apuntes de clase de la asignatura, ni pretenden sustituirlos, sino que constituyen solo una guía para su estudio. Si se observa algún error o se desea hacer algún comentario, por favor dirigirse a [marques@us.es](mailto:marques@us.es)

## TEMARIO

1. Tema I: Electrostática en el Vacío
2. Tema II: Sistemas de conductores en equilibrio electrostático.
3. Tema III: Polarización, conducción y relajación al equilibrio.
4. Tema IV: El campo magnético estacionario.
5. Tema V: Ley de Faraday. Energía del campo magnético.
6. Tema VI: El campo magnético en medios materiales.
7. Tema VII: Ecuaciones de Maxwell.

# Tema I: Electrostática en el Vacío

1. **Ley de Coulomb:** La fuerza entre cargas puntuales en reposo  $q_1$  y  $q_2$  viene dada por:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{F}_{2,1} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{F}_{1,2}$  es la fuerza que sobre  $q_2$  ejerce  $q_1$ ,  $\mathbf{r}_i$  es la posición de la carga  $q_i$  y  $\epsilon_0$  una constante que en el sistema internacional (S.I.) de unidades (Newton, Metro, Segundo, Coulombio...) vale  $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} C^2 / (N \cdot m^2)$

- La fuerza de Coulomb es una fuerza Newtoniana:
  - Inversamente proporcional al cuadrado de la distancia
  - Dirigida según el radiovector que une las cargas (fuerza central)
  - Cumple la ley de acción y reacción:  $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$
  - La interacción entre las cargas es instantánea (fuerza de “acción a distancia”).
- La fuerza de Coulomb es mucho más intensa que la fuerza gravitatoria.  
**Ejercicio:** *Demostrar que la fuerza eléctrica entre dos protones es  $10^{36}$  veces superior que la interacción gravitatoria entre ellos.*
- A diferencia de la fuerza gravitatoria, la fuerza de Coulomb puede ser atractiva o repulsiva.

2. **Superposición y linealidad:** Cuando hay más de dos cargas en interacción se supone que la fuerza total sobre una de ellas es la suma de las fuerzas ejercidas por cada una de las demás, considerada aisladamente:

$$\mathbf{F}_j = \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{i,j} \quad (2)$$

ello implica que las ecuaciones de la electrostática son lineales.

3. **Leyes de conservación:** Al ser una fuerza newtoniana, puede definirse una energía potencial y el movimiento de partículas en un campo Coulombiano debe cumplir las leyes de conservación de:

- La energía (cinética mas potencial)
- El momento cinético o cantidad de movimiento.

A estas leyes de conservación se añade el postulado de

- La conservación de la carga

La energía potencial de un conjunto de cargas puntuales se define como el trabajo necesario para reunir las y es función tanto de los valores de las cargas como de su posición relativa:

$$U_E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (3)$$

**Ejercicio:** *Demostrar que la expresión (3) es correcta y que no depende del camino elegido para juntar las cargas.*

4. **Campo eléctrico y potencial:** Se definen de modo totalmente análogo al campo y el potencial gravitatorio:

- Campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  creado por un sistema de cargas en el punto  $r$  es la fuerza por unidad de carga en ese punto:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (4)$$

- El potencial eléctrico  $\phi(\mathbf{r})$  se define como el trabajo por unidad de carga necesario para llevar una carga desde el infinito hasta el punto  $\mathbf{r}$ :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (5)$$

5. **Densidades de carga y corriente:** En la materia existen del orden de  $10^{23}$  electrones de valencia por mol. Es razonable definir una densidad de carga de volumen  $\rho$  macroscópica. También se pueden definir densidades de carga superficial  $\sigma$  y lineal  $\lambda$ . Si un fluido cargado se mueve, se define la densidad de corriente como el vector  $\mathbf{J}$  cuya componente  $i$  es igual al flujo de carga que atraviesa, por unidad de tiempo y área, una superficie perpendicular al vector unitario  $\mathbf{n}_i$ . Se puede demostrar que:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{v} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del fluido. Si hay varios fluidos que se mueven a diferentes velocidades:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum \rho_i \mathbf{v}_i \quad (7)$$

Cuando hay más de un fluido es posible la existencia de corriente aún en ausencia de densidad de carga neta (por ejemplo, cuando  $\rho_1 = -\rho_2$  y  $\mathbf{v}_2 = 0$ ). De forma similar es posible definir una densidad de corriente superficial  $\mathbf{K} = \sum \sigma_i \mathbf{v}_i$ .

6. **Paso de las expresiones discretas a las continuas:** El paso de la descripción en términos de cargas puntuales (descripción discreta) a la descripción en términos de densidades de carga (descripción continua), se realiza mediante los cambios:

$$\sum_i \rightarrow \int dV \quad (8)$$

$$\sum_{i \neq j} \rightarrow \int d\mathcal{V} \int d\mathcal{V}' \quad (9)$$

$$q \rightarrow \rho ; \mathbf{r}, \mathbf{r}_j \rightarrow \mathbf{r}; \mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}' \quad (10)$$

y mediante cambios análogos cuando hay densidades de carga superficiales o lineales.

**Ejercicio:** Demostrar que el campo eléctrico en el eje de un disco de densidad de carga superficial constante  $\sigma$  y radio  $R$  vale:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \mathbf{n}_z \quad (11)$$

donde  $z$  es la distancia al centro del disco. Sugerencia: utilizar la expresión integral derivada de (4) y de (8)-(10).

**Ejercicio:** Calcular el valor del campo eléctrico en el plano medio transversal a un hilo de carga de densidad  $\lambda$

7. **Gradiente de una función escalar:** Sea  $\psi(\mathbf{r})$  una función escalar. Se define el gradiente de  $\psi$ ,  $\text{grad}(\psi)$ , como el campo vectorial que cumple:

$$\text{grad}(\psi) \cdot d\mathbf{l} = \psi(\mathbf{r} + d\mathbf{l}) - \psi(\mathbf{r}) \quad (12)$$

para todo  $d\mathbf{l}$  en todo punto  $\mathbf{r}$ .

**Ejercicio:** Demostrar que la definición (12) implica que  $\int_a^b \text{grad}(\psi) \cdot d\mathbf{l} = \psi(b) - \psi(a)$ . De aquí y de las definiciones del apartado anterior se deduce que  $\mathbf{E} = -\text{grad}(\phi)$ .

**Ejercicio:** Demostrar que, en coordenadas cartesianas,  $\text{grad}\psi$  se escribe formalmente como  $\nabla\psi$  donde  $\nabla = \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial z}$ . En lo sucesivo usaremos  $\nabla\psi$  y  $\text{grad}\psi$  indistintamente. Las expresiones de  $\nabla\psi$  en coordenadas esféricas y cilíndricas se dan en el apéndice.

**Ejercicio:** Demostrar mediante cálculo directo que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , a partir de (4) y (5).

8. **Flujo y divergencia de un campo vectorial:** Sea  $\mathbf{V}$  un campo vectorial, se define el flujo que atraviesa una superficie arbitraria  $S$  como la integral:

$$\Phi_S = \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $S$ . La divergencia de  $\mathbf{V}$  se define como el límite:

$$\text{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \lim_{\delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS}{\delta\mathcal{V}} \quad (14)$$

donde  $\Sigma$  es una superficie cerrada y  $\delta\mathcal{V}$  el elemento de volumen correspondiente, centrados en el punto  $\mathbf{r}$ .

**Ejercicio:** Demostrar que, en coordenadas cartesianas  $\text{div}\mathbf{V}$  se escribe formalmente como el producto escalar  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  donde  $\nabla = \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial z}$ . En lo sucesivo usaremos  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  y  $\text{div}\mathbf{V}$  indistintamente. Las expresiones de  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  en coordenadas esféricas y cilíndricas se dan en el apéndice.

9. **Teorema de Gauss:** Dado un campo vectorial  $\mathbf{V}$  y una superficie cerrada arbitraria  $\Sigma$ :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (15)$$

donde  $\mathcal{V}$  es el volumen encerrado por  $\Sigma$ .

**Ejercicio:** *Demostrar (15) a partir de la definición (14).*

10. **Forma diferencial del principio de conservación de la carga:** Cuando la carga está presente en forma de densidad de carga de volumen, la conservación de la carga se puede expresar de forma integral como:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} + \frac{\partial Q_{int}}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

donde  $\Sigma$  es una superficie cerrada cualquiera,  $\mathbf{n}$  el vector unitario perpendicular hacia afuera y  $Q_{int}$  la carga total encerrada en ella  $Q_{int} = \int \rho(\mathbf{r}) d\mathcal{V}$ . La misma expresión en forma diferencial se escribe:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

ecuación que recibe el nombre de “ecuación de continuidad”.

11. **Flujo y divergencia del campo electrostático:** Para todo campo electrostático:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int} \quad (18)$$

donde  $Q_{int}$  es la carga total contenida dentro de  $\Sigma$ . De (18) se deduce que, cuando las cargas pueden describirse mediante una densidad continua de carga:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (19)$$

y que a ambos lados de una distribución de carga superficial:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \quad (20)$$

donde los superíndices  $+$  y  $-$  indican la cara superior y la inferior de la distribución de carga y definen el sentido de  $\mathbf{n}$ .

**Ejercicio:** *A partir de la definición de ángulo sólido y de (15), demostrar (18) para el campo de una carga puntual (una vez demostrado para una carga puntual, queda demostrado para cualquier campo electrostático, en virtud del principio de superposición).*

**Ejercicio:** *Utilizando (18), así como la simetría del problema, calcular el campo eléctrico dentro y fuera de una lámina plana de densidad de carga constante  $\rho_0$  y espesor  $d$ .*

**Ejercicio:** *Utilizando (18) calcular el campo eléctrico dentro y fuera de un cilindro infinito de densidad de carga uniforme  $\rho_0$  y radio  $R$ .*

12. **Circulación y rotacional de un campo vectorial:** Sea  $\mathbf{V}$  un campo vectorial, se define su circulación a través de una curva cerrada  $C$  como la integral:

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \quad (21)$$

donde  $d\mathbf{l}$  es el vector diferencial de línea a lo largo de  $C$ . El rotacional de  $\mathbf{V}$  se define mediante el límite:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}}{\delta S} \quad (22)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario arbitrario,  $\delta S$  es una superficie perpendicular a  $\mathbf{n}$  y  $C$  la curva que limita a  $\delta S$ .

13. **Teorema de Stokes:** Dado un campo vectorial  $\mathbf{V}$  y una curva cerrada arbitraria  $C$ :

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (23)$$

donde  $S$  es cualquier superficie limitada por  $C$  y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $S$ , dirigido en sentido positivo de acuerdo con la circulación  $d\mathbf{l}$ .

**Ejercicio:** Demostrar (23) a partir de la definición (22).

**Ejercicio:** Demostrar que, en coordenadas cartesianas  $\text{rot}\mathbf{V}$  se escribe formalmente como el producto vectorial  $\nabla \times \mathbf{V}$  donde  $\nabla = \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial z}$ . En lo sucesivo usaremos  $\nabla \times \mathbf{V}$  y  $\text{rot}\mathbf{V}$  indistintamente. Las expresiones de  $\nabla \times \mathbf{V}$  en coordenadas esféricas y cilíndricas se dan en el apéndice.

**Ejercicio:** Demostrar que el rotacional de un vector polar es un vector axial y que el rotacional de un vector axial es un vector polar.

**Ejercicio:** Demostrar que  $\nabla \times (\nabla\psi) \equiv 0$ , donde  $\psi$  es cualquier función escalar.

**Ejercicio:** Demostrar que  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \equiv 0$ , donde  $\mathbf{V}$  es cualquier campo vectorial.

14. **Circulación y rotacional del campo electrostático:** La circulación de todo campo electrostático debe ser nula. Para demostrarlo basta considerar que, de un sistema de cargas en reposo, es imposible obtener trabajo indefinidamente (móvil perpetuo de primera especie). El campo electrostático es pues un campo conservativo.

**Cuestión:** ¿Por qué si la circulación de  $\mathbf{E}$  fuera distinta de cero se podría obtener trabajo indefinidamente de una distribución estática de carga?

**Ejercicio:** Demostrar que las componentes tangenciales del campo eléctrico a ambos lados de una superficie que soporta una densidad de carga  $\sigma$ , son continuas (ver también (20)):

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = 0 \quad (24)$$

**Ejercicio:** Demostrar mediante cálculo directo que el rotacional del campo  $\mathbf{E}$  de (4) con una sola carga fuente se anula.

15. **Teorema de Helmholtz:** Todo campo vectorial definido y continuo en todos los puntos del espacio y que se anule en el infinito, viene determinado por su divergencia y su rotacional mediante la expresión:

$$4\pi\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int \frac{(\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathcal{V} + \int \frac{(\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{r}')) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathcal{V} \quad (25)$$

Obsérvese que el campo electrostático es un caso particular con  $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ .

Para una demostración rigurosa de (25) consultar la bibliografía, por ejemplo Panofsky y Phillips.

16. **Ecuaciones integrales y diferenciales de la electrostática.** Podemos resumir los resultados anteriores en las ecuaciones siguientes:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (26)$$

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (27)$$

La ecuación (26) implica que  $\mathbf{E}$  puede escribirse como el gradiente de un potencial, mientras que de (27) se deduce la ecuación para ese potencial:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi ; \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad (28)$$

Esta última ecuación se conoce como ecuación de Poisson. Cuando  $\rho = 0$  se conoce como ecuación de Laplace. En coordenadas cartesianas  $\nabla^2\phi$  se escribe simplemente  $\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ , debido a que los vectores unitarios  $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$  no varían con la posición. Las expresiones de  $\nabla^2\phi$  en coordenadas esféricas y cilíndricas se dan en el apéndice. Nótese que (27) define  $\phi$  salvo una constante aditiva arbitraria. Cuando ello es posible, dicha constante se toma de modo que  $\phi \rightarrow 0$  en el infinito.

**Ejercicio:** El llamado "potencial coulombiano de apantallamiento" viene dado por:

$$\phi = \frac{qe^{-r/\lambda}}{4\pi\epsilon_0 r}$$

es el adecuado para describir el potencial de una carga puntual en un medio semiconductor. Calcular el campo eléctrico y la densidad de carga correspondientes.

17. **Líneas de campo:** Una función vectorial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  puede representarse gráficamente mediante "líneas de campo". Las líneas de campo son trazos continuos que cumplen las siguientes propiedades:

- Son tangentes a  $\mathbf{V}$  en todos sus puntos.

- El flujo de  $\mathbf{V}$  a través de una superficie dada, es proporcional al número de líneas que la atraviesan.

Según estas definiciones, las líneas de campo definen en cada punto la dirección de  $\mathbf{V}$  y su densidad es proporcional a la intensidad de  $\mathbf{V}$  en ese punto.

Pueden definirse dos tipos particulares de campos:

- a) Campos solenoidales: Su flujo (o su divergencia) se anula:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (30)$$

donde  $\Sigma$  es cualquier superficie cerrada. Las líneas de campo describen curvas cerradas en el espacio.

- b) Campos irrotacionales: Su circulación (o su rotacional) se anula:

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad (31)$$

donde  $C$  es cualquier curva cerrada. Las líneas de campo jamás se cierran sobre sí mismas (por tanto existen “fuentes” y “sumideros”).

**Nota:** Las afirmaciones hechas acerca de las líneas de los campos solenoidales e irrotacionales se refieren a la representación del campo completo, no a una parte del mismo, y suponiendo que los campos se anulan en el infinito (campos “físicos”).

**Ejercicios:** Probar con diferentes funciones de  $(x, y, z)$ ,  $E_i(x, y, z)$  y campos de la forma  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$  si el campo es irrotacional o solenoidal o ninguno de ellos [Ejemplo:  $E_i = x_i$ , etc...]

18. **Superficies equipotenciales:** Son superficies perpendiculares a las líneas de campo en todos sus puntos.

**Ejercicio:** Demostrar que la anterior definición implica que el potencial electrostático es constante sobre cualquiera de dichas superficies.

19. **Singularidades del campo y el potencial**

**Ejercicio:** Calcular aplicando el teorema de Gauss y teniendo en cuenta la simetría del problema:

- El campo y el potencial creados por una recta infinita de densidad de carga lineal constante  $\lambda_0$ .
- El campo y el potencial creados por un plano infinito de densidad de carga superficial constante  $\sigma_0$ .
- El campo y el potencial creados dentro y fuera de una esfera maciza de radio  $R$  y de densidad de carga uniforme  $\rho_0$ .

Cada tipo de fuente genera un tipo de singularidad en el campo y el potencial:

- Carga puntual en  $r = 0$  (coordenadas esféricas): Singularidad infinita del tipo  $E \sim \frac{1}{r^2}$  y  $\phi \sim \frac{1}{r}$ .
- Densidad de carga lineal en  $r = 0$  (coordenadas cilíndricas): Singularidad infinita del tipo  $E \sim \frac{1}{r}$  y  $\phi \sim \ln(r)$ .
- Densidad de carga superficial: Discontinuidad en la componente normal del campo eléctrico (ver (20)). Continuidad del potencial.
- Densidad de carga de volumen: Ningún tipo de discontinuidad.

Resultados que pueden demostrarse haciendo uso de los resultados del ejercicio anterior. Una descripción que sólo utilice densidades de carga de volumen y superficiales no producirá singularidades infinitas en el campo o el potencial.

20. **La función delta de Dirac:** Se introduce para incluir en la descripción continua (en la que sólo aparecen densidades de carga), cargas puntuales y otras fuentes singulares. Por ejemplo, la densidad de carga asociada a una carga puntual  $q$  en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  se define como:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (32)$$

donde  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$  siendo  $\delta(x - x')$  una función (en realidad el límite de una sucesión de funciones) definida por:

$$\delta(x - x') = 0 \quad \text{si } x \neq x' \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')dx = 1 \quad (33)$$

de donde se deduce que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x')dx = f(x') \quad (34)$$

para toda función  $f(x)$ .

**Ejercicio:** Demostrar que la función  $\delta(x)$  es la derivada de la función escalón  $U(x)$  definida por  $U(x) = 1$  si  $x > 0$  y  $U(x) = 0$  si  $x < 0$ .

**Ejercicio:** Demostrar que la densidad de carga volumétrica asociada a un cascarón esférico de radio  $r_0$  y densidad superficial uniforme  $\sigma_0$  se escribe  $\rho = (4\pi r_0^2)^{-1}\delta(r - r_0)$ .

**Ejercicio:** Demostrar, a partir de (14) y (33) que:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (35)$$

y

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (36)$$

**Ejercicio:** Demostrar que la expresión del potencial para una distribución de densidad de carga  $\rho(\mathbf{r}')$ , obtenida a partir de (5) y (8)–(10):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{V}' \quad (37)$$

es solución de la ecuación de Poisson (27).

21. **Densidad de energía y autoenergía:** La energía almacenada en una distribución continua de cargas, puede obtenerse de (3) y (8)–(10):

$$U_E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d\mathcal{V} \int d\mathcal{V}' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \int d\mathcal{V} \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \quad (38)$$

expresión que es equivalente a:

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d\mathcal{V} \quad (39)$$

expresión que puede interpretarse diciendo que existe una “densidad de energía electrostática”  $u_E = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$  asociada al campo.

**Ejercicio:** Demostrar (39) a partir de (38) y de la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla^2 \phi$ .

Sin embargo, cuando tratamos de recuperar (3) a partir de (39), usando (28), obtenemos una serie de términos singulares (que equivalen a eliminar la restricción  $i \neq j$  en (3)). Estos términos infinitos corresponden a la autoenergía (o energía de formación) de las cargas puntuales y deben eliminarse en una descripción discreta, en la que sólo interesa la energía de interacción entre las cargas puntuales.

**Ejercicio:** Dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  están separadas por una distancia  $d$ . Si sus respectivos campos son  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ , entonces  $E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ . Mostrar como las integrales de  $E_1^2$  y de  $E_2^2$  divergen (estos son los términos de autoenergía en (39)). Mostrar también como la integral de  $\epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$  converge, dando el término de energía de interacción  $q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 r_{1,2})$ .

22. **Desarrollo multipolar del potencial:** Considérese el potencial (37) de una distribución de carga dada. Si  $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'$  (es decir, si el punto de observación está lejos de la fuente), podemos desarrollar  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  en serie de potencias de  $|\mathbf{r}'|^{-1}$ . La serie obtenida expresa  $\phi$  en función de una serie de momentos multipolares, que no dependen de  $\mathbf{r}$ , multiplicados por funciones sencillas de  $\mathbf{r}$ :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{r_i r_j Q_{i,j}}{r^5} + \dots \right) \quad (40)$$

donde  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $r_i$  son las componentes de  $\mathbf{r}$  ( $r_1 = x$ ,  $r_2 = y$ ,  $r_3 = z$ ), y  $q$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $Q_{i,j}$  son los momentos multipolares de orden cero, uno, dos... (carga total, momento dipolar, momento cuadrupolar...):

$$q = \int \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' \quad (41)$$

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \cdot \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' \quad (42)$$

$$Q_{i,j} = \int (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{i,j}) \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' \quad (43)$$

donde las integrales se extienden a toda la distribución de carga.

**Cuestión:** ¿Cual es la ventaja práctica de la expresión (40)?

**Ejercicio:** Utilizando el desarrollo  $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$  y la identidad  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left(1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ , demostrar (40)–(43)

23. **Invarianza de los momentos multipolares:** Los momentos multipolares dependen, en general, del sistema de referencia elegido para hacer las integrales (41)–(43). No obstante, el primer momento multipolar no nulo no depende del sistema de referencia, siendo por tanto una propiedad intrínseca de la fuente.

**Ejercicio:** Demostrar que si  $q = 0$ , el momento dipolar (42) no depende del origen elegido para  $\mathbf{r}$ .

**Ejercicio:** Supóngase que una molécula se representa por una carga  $-2q$  en el origen y cargas  $+q$  en  $\mathbf{l}_1$  y  $\mathbf{l}_2$ , siendo  $|\mathbf{l}_1| = |\mathbf{l}_2| = l$  y siendo  $\theta$  el ángulo entre  $\mathbf{l}_1$  y  $\mathbf{l}_2$ . Demostrar que el momento dipolar de la molécula vale  $p = 2ql \cos(\theta/2)$  y está dirigido según la bisectriz de la molécula.

24. **Dipolos:** En la naturaleza hay muchas fuentes de campo que se caracterizan por tener  $q = 0$  (moléculas, etc...). Estas fuentes pueden aproximarse mediante dipolos. Un dipolo es una fuente puntual cuyo potencial en todos los puntos es el potencial dipolar (ver (40)):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (44)$$

donde  $\mathbf{r}'$  es la posición de la fuente.

Podemos construir un dipolo colocando dos cargas iguales  $+q$  y  $-q$  separadas una distancia  $\delta$  y tomando el límite  $q \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  de modo que su producto

$$\mathbf{p} = \lim(q\delta) \quad (45)$$

permanezca finito.

**Ejercicio:** Demostrar que el potencial de la distribución de carga mencionada es (44) y que el campo vale:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (46)$$

**Nota avanzada:** Las expresiones (44) y (45) no definen ni el campo ni el potencial en el dipolo ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ). Estos pueden calcularse mediante un paso al límite, considerando el

campo de dos esferas macizas de carga  $\pm q$  separadas una distancia  $\epsilon$  y haciendo tender a cero el radio de las esferas (pero manteniendo constante su carga total). El resultado es:

$$\phi(\mathbf{r} = \mathbf{r}') = 0 \quad ; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r} = \mathbf{r}') = -\frac{1}{3\epsilon_0}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{p} \quad (47)$$

25. **Energía y fuerzas sobre un dipolo:** La autoenergía o energía de formación de un dipolo es infinita, como ocurre en toda fuente puntual. Sin embargo sí tiene interés la energía de interacción de un dipolo con un campo externo. Sea un dipolo en un campo externo  $\mathbf{E}_{ext} = -\nabla\phi_{ext}$ . Su energía de interacción puede expresarse como:

$$U_{int} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext} \quad (48)$$

**Ejercicio:** Demostrar (48) usando la imagen del dipolo como dos cargas puntuales separadas una distancia pequeña, y haciendo el paso al límite.

La fuerza y el par ejercidos por el campo externo sobre el dipolo son:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}_{ext} \quad (49)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext} \quad (50)$$

**Ejercicio:** Demostrar (49) y (50) usando (48) y el principio de los trabajos virtuales. Usar también la identidad

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (51)$$

26. **Límites de la electrostática:** A la hora de establecer los límites de validez de la electrostática hay que considerar dos casos diferentes: La electrostática como descripción de la interacción entre cargas puntuales elementales y la electrostática como descripción de la interacción entre cuerpos macroscópicos cargados. Como descripción de la interacción entre cargas puntuales:

- La validez de la ley de Coulomb (1) se ha comprobado en el rango de distancias de  $10^{-11}$  hasta  $10^9$  cm.
- Para cargas en movimiento uniforme hay que tener en cuenta la fuerza magnética (no incluida en (1)). Los efectos de dicha fuerza, entre cargas puntuales, sólo empiezan a ser comparables con los efectos de la fuerza de Coulomb para velocidades de las partículas cercanas a la de la luz.
- Finalmente hay que tener en cuenta que una carga que se mueve con aceleración  $\mathbf{a}$  radia energía en forma de ondas electromagnéticas a una razón de:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{q^2 |\mathbf{a}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad (52)$$

(expresión no relativista), donde  $c$  es la velocidad de la luz. Este hecho debe tenerse en cuenta a la hora de calcular el movimiento de partículas sometidas a la fuerza de Coulomb (1)

**Ejercicio:** Calcular para el átomo de Rutherford, formado por un protón y un electrón orbitando a su alrededor a una distancia  $r_0$  igual al radio de Bohr, la frecuencia de la órbita, la energía radiada en cada órbita (según (52)) y hacer una estimación del tiempo que tardaría el electrón en “caer” sobre el protón ( $e = 1,6022 \times 10^{-19}C.$ ,  $m_e = 9,1095 \times 10^{-31}kg.$ ,  $r_0 = 5,2918 \times 10^{-11}m.$ ).

*Solución:* El tiempo de caída es  $1,5 \times 10^{-11}s$ , lo que implica que el electrón da aproximadamente  $10^5$  revoluciones en torno al núcleo antes de caer. El átomo de Rutherford es pues un modelo que no se sostiene a escala macroscópica, pero resulta ser válido a escala de los tiempos atómicos.

**Ejercicio:** Suponer un modelo “clásico” del electrón como una bolita de radio  $r_e$  y densidad uniforme de masa, sobre la que se coloca una densidad de carga superficial uniforme. Ahora, a partir de la ecuación  $mc^2 = U$ , donde  $U$  es la energía electrostática de la distribución de carga, calculada según (39), calcular el “radio clásico del electrón”  $r_e$  (esta magnitud sólo tiene sentido como medida teórica del límite de validez de cualquier imagen clásica del electrón. El “radio clásico del electrón” que aparece en las tablas de constantes físicas es, en realidad, el doble de la magnitud calculada, pero eso carece de importancia, ya que  $r_e$  sólo es importante como orden de magnitud).

*Solución:*  $r_e = 1,4 \times 10^{-15}m.$

En lo que respecta a los límites de validez de la electrostática al analizar cuerpos macroscópicos cargados, debe tenerse en cuenta que el hecho de estar la materia formada, básicamente, por partículas de carga igual y opuesta, permite la presencia de corrientes eléctricas incluso en ausencia de carga neta, según (7). Ello hace que las fuerzas magnéticas sean con frecuencia superiores a las electrostáticas, incluso en ausencia de velocidades relativistas.

## 27. Apéndice: Fórmulas explícitas de los operadores vectoriales en coordenadas cilíndricas y esféricas

a) **Coordenadas cilíndricas:**  $(r, \phi, z)$

$$\nabla\psi = \mathbf{n}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{n}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{n}_z \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (54)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{n}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial\phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{n}_\phi \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + \mathbf{n}_z \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rV_\phi) - \frac{\partial V_r}{\partial\phi} \right) \quad (55)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (56)$$

b) **Coordenadas esféricas:**  $(r, \theta, \phi)$

$$\nabla\psi = \mathbf{n}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{n}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{n}_\phi \frac{1}{r\text{sen}\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \quad (57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\text{sen}\theta V_\theta) + \frac{1}{r\text{sen}\theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} \quad (58)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{n}_r \frac{1}{r\text{sen}\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} (\text{sen}\theta V_\phi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial\phi} \right] + \quad (59)$$

$$\mathbf{n}_\theta \left[ \frac{1}{r\text{sen}\theta} \frac{\partial V_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) \right] + \mathbf{n}_\phi \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta} \right] \quad (60)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \text{sen}\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \quad (61)$$

Nótese que:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \quad (62)$$

## Tema II: Sistemas de Conductores en Equilibrio Electrostático

1. **Definición de conductor:** Un conductor es un cuerpo por cuyo interior puede moverse la carga eléctrica, de modo que su situación de equilibrio termodinámico corresponde a campo cero en su interior ( $\mathbf{E}_{int} = 0$ ). Ello implica que  $\phi_{int} = K$ , donde  $K$  es una constante. También debe ser  $\rho = 0$  en su interior (pues  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ), de modo que la carga se distribuye sólo por su superficie, donde aplicando el T. de Gauss:

$$\sigma = \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \quad (63)$$

siendo  $\mathbf{E}$  el campo exterior al conductor,  $\sigma$  la densidad de carga sobre su superficie y  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal a su superficie. Por otra parte, aplicando el teorema de Stokes (23):

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = K \quad (64)$$

que constituye la condición de contorno para el potencial en la superficie del conductor.

**Ejercicio:** *Demostrar que:*

- a) *No puede haber líneas de campo que empiecen y acaben en un mismo conductor*
- b) *Si del conductor  $C_1$  sale una línea de campo que acaba en el conductor  $C_2$ , es imposible que haya líneas de campo que empiecen en el  $C_2$  y acaben en el  $C_1$ .*

*Estos resultados permiten trazar "diagramas de líneas" en un sistema de conductores, que establecen los flujos de campo de un conductor a otro (la superficie del infinito puede tratarse como un conductor a potencial cero).*

2. **Uso del Teorema de Gauss para resolver problemas con contornos conductores:** El Teorema de Gauss para el campo eléctrico (18) es útil para resolver problemas sencillos con contornos conductores. En particular puede usarse para resolver problemas sencillos con simetrías planas, cilíndricas y esféricas.

**Ejercicio:** *Calcular el campo entre dos planos conductores infinitos separados una distancia  $d$ , soportan una densidad de carga superficial  $\pm\sigma$  cada uno. Calcular el campo entre las placas, así como el potencial a que está cada placa.*

**Ejercicio:** *Un conductor cilíndrico macizo de radio  $a$  está rodeado por una camisa conductora cilíndrica de radio interior  $b > a$ . Si en el conductor interior se coloca una carga total  $+Q$  y en el exterior otra  $-Q$  ¿Cómo habrán de distribuirse para que se cumpla la condición (64)? ¿Cuanto vale el campo y el potencial entre ambos conductores?*

**Ejercicio:** *Repetir el ejercicio anterior para conductores de simetría esférica.*

3. **Teoremas de unicidad:** La solución la a ecuación de Laplace (o a la de Poisson para una densidad de carga dada) dentro de un recinto es única cuando:

- a) Se conoce el valor del potencial en el contorno (condiciones de contorno de Dirichlet)
- b) o bien, se conoce el valor de la derivada normal del potencial,  $\partial\phi/\partial n$ , en el contorno (condiciones de contorno de Neumann; en este caso el potencial se conoce salvo una constante aditiva).
- c) o bien se conoce el valor del potencial en parte del contorno y el valor de su derivada normal en el resto del contorno (condiciones de contorno mixtas).

En el caso de un problema con contornos conductores, y supuesto que el potencial se anula en el infinito, la solución para el potencial será única si se especifican:

- a) Los potenciales de todos los conductores.
- b) o bien, la carga total sobre cada conductor.
- c) o bien, los potenciales de unos conductores y las cargas del resto.

**Ejercicio:** *Demostrar la identidad vectorial*

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\psi) = \psi \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \psi \quad (65)$$

donde  $\mathbf{V}$  y  $\psi$  son un campo vectorial y una función escalar arbitrarios.

**Ejercicio:** *Demostrar a partir del resultado anterior, la primera identidad de Green:*

$$\oint_{\Sigma} \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} d\mathcal{S} = \int \psi \nabla^2 \psi d\mathcal{V} + \int |\nabla \psi|^2 d\mathcal{V} \quad (66)$$

donde  $\Sigma$  es una superficie cerrada,  $\mathbf{n}$  la dirección normal hacia afuera y las integrales de volumen se extienden a todo el volumen encerrado por  $\Sigma$ .

**Ejercicio:** *Demostrar a partir de los resultados anteriores el siguiente teorema de unicidad: Sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  dos soluciones a la ecuación de Poisson con la misma fuente  $\rho(\mathbf{r})$  (la ec. de Laplace será el caso particular con  $\rho = 0$ ) en un recinto dado, tales que  $\phi_1 = \phi_2$  sobre el contorno, o  $\partial\phi_1/\partial n = \partial\phi_2/\partial n$  en el contorno, o tales que  $\phi_1 = \phi_2$  sobre parte del contorno y  $\partial\phi_1/\partial n = \partial\phi_2/\partial n$  sobre el resto. Entonces  $\phi_1 = \phi_2$ .*

**Ejercicio:** *Demostrar a partir del resultado anterior y de (63) y (64) que, en un problema con contornos conductores, basta con conocer la carga o el potencial sobre cada uno de los conductores para que el potencial quede unívocamente determinado en todo el recinto.*

Una consecuencia importante del teorema de unicidad es que el campo eléctrico en el interior de un hueco en un conductor sólo depende de la distribución de cargas en el interior de dicho hueco y no de la distribución de cargas y/o potencial en el exterior del hueco. Este fenómeno se denomina apantallamiento. En particular, el campo eléctrico en el interior de un hueco excavado en un conductor es nulo si no hay cargas ni conductores cargados en el interior del hueco, con independencia de lo que ocurra fuera del hueco.

**Ejercicio:** *Una carga puntual  $q$  se coloca en el centro de un hueco esférico de radio  $a$  excavado en el interior de un conductor esférico macizo de radio exterior  $b$ , descentrado*

respecto de  $a$ . Si la carga del conductor es nula ¿Cuanto vale el campo eléctrico dentro del hueco y fuera del conductor esférico? ¿Y si la carga del conductor es  $Q \neq 0$ ? ¿Y si el conductor está conectado a tierra ( $V = 0$ )? ¿Y si el conductor está a potencial  $V \neq 0$ ?

El teorema de unicidad determina las condiciones de contorno necesarias para la resolución de un problema de potencial. Además es la base del "método de las imágenes" para la resolución de problemas de potencial con contornos conductores.

Los problemas de potencial con contornos conductores quedan determinados una vez que se impone un valor para la carga o para el potencial de cada uno de los conductores ¡Pero no ambos a la vez!, pues en ese caso el problema quedaría sobredeterminado. Cuando la carga de un conductor se mantiene constante se dice que el conductor está aislado. En general, para mantener un conductor a potencial constante es necesario variar su carga, lo que supone la presencia de baterías y la realización de trabajo.

4. **Método de las imágenes:** El método de las imágenes es un método para resolver problemas de potencial en los que aparece una fuente de carga puntual o lineal, frente a contornos conductores sencillos. El fundamento del método es el teorema de unicidad: se sustituye el conductor por una o más fuentes puntuales en su interior, de modo que la superficie del conductor coincida con una equipotencial del sistema de fuentes puntuales. Existen tres geometrías básicas, mas sus derivadas:

- **Carga puntual frente a un plano conductora tierra:** Su imagen es una carga igual y de signo opuesto colocada en su imagen especular respecto del plano conductor. De esta configuración pueden obtenerse las siguientes configuraciones derivadas:
  - Carga frente a una esquina conductora cóncava.
  - Carga entre planos paralelos (se obtiene una serie infinita de imágenes)
  - Carga en una caja (serie infinita)
- **Carga puntual  $q$  frente a una esfera conductora de radio  $R$  conectada a tierra:** Si  $D$  es la distancia de la carga puntual al centro de la esfera, la imagen es otra carga puntual de valor  $q' = -qR/D$  a una distancia  $b = R^2/D$  del centro de la esfera, sobre la línea que une la carga original  $q$  con dicho centro. Las configuraciones derivadas son:
  - Carga en un hueco esférico
  - Esfera conductora en un campo exterior constante
  - Carga frente a un plano conductor con una protuberancia esférica
  - Carga frente a una esfera cargada, de carga total  $Q$ .
  - Carga frente a una esfera a potencial dado  $V$ .
  - Dos esferas conductoras enfrentadas (serie infinita de imágenes).
- **Línea de carga de densidad  $\lambda$  frente a un cilindro conductor infinito:** Si  $R$  es el radio del cilindro y  $D$  la distancia de la fuente al centro del cilindro, la imagen

es una densidad de carga lineal  $-\lambda$  a una distancia  $b = R^2/D$  del centro del cilindro en la línea que une dicho centro con la fuente, siendo el potencial del conductor  $\phi = -\lambda \ln(D^2/R^2)/(2\pi\epsilon_0)$ . Las configuraciones derivadas son:

- Línea de carga en el interior de un hueco cilíndrico conductor.
- Línea de carga frente a un plano con una protuberancia cilíndrica.
- Cilindro conductor en un campo exterior constante.
- Línea de carga frente a un cilindro infinito de carga por unidad de longitud  $\lambda_0$ .
- Línea bifilar (dos cilindros conductores paralelos de cargas iguales y opuestas).

**Ejercicios:** *Se aconseja demostrar los resultados anteriores y hallar la configuración de imágenes de las geometrías derivadas.*

**Cuestión** *¿Por qué en la configuración "carga puntual frente a esquina conductora" se especifica que la esquina sea cóncava?*

**Cuestión** *¿Por qué no se considera la configuración "línea de carga frente a cilindro conductor a potencial dado  $V$ "?*

**Cuestión** *Considera una carga puntual positiva frente a una esfera conductora de carga total positiva  $Q$ . ¿Es la fuerza entre ambas necesariamente repulsiva?*

El método de las imágenes proporciona expresiones cerradas para el potencial, pero sólo es aplicable a un número limitado de geometrías. Una aplicación importante del método es el cálculo de funciones de Green (ver más adelante).

**Ejercicio:** *Calcular la fuerza que experimenta una carga puntual  $q$  situada frente a una esfera metálica que está: a) descargada. b) conectada a tierra*

**Ejercicio:** *Calcular, para el caso del ejercicio anterior, el potencial a que está la esfera en el caso (a) y la carga de la esfera en el caso (b)*

5. **Teorema del valor medio:** Sea  $\phi$  una función potencial que cumple la ecuación de Laplace en una región del espacio desprovista de carga. Consideremos una superficie esférica imaginaria de radio  $R$  centrada en  $\mathbf{r} = 0$  y contenida en esa región desprovista de cargas. Entonces el valor de  $\phi$  en el centro de la esfera es igual al valor medio de todos los valores de  $\phi$  sobre la superficie esférica imaginaria.

$$\phi(\mathbf{r} = 0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{r=R} \phi d\mathcal{S} \quad (67)$$

**Ejercicio:** *Demostrar, a partir de la (65), la segunda identidad de Green:*

$$\int (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\mathcal{V} = \oint_{\Sigma} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\mathcal{S} \quad (68)$$

donde  $\psi$  y  $\phi$  son funciones escalares arbitrarias.

**Ejercicio:** *Demostrar el teorema del valor medio a partir de (68) con  $\psi = 1/r$ .*

**Corolario:** Es imposible alcanzar una posición de equilibrio estable mediante fuerzas púramente electrostáticas.

El anterior teorema es la base del "método de las diferencias finitas" para el cálculo del potencial en un recinto conductor.

6. **Método de las diferencias finitas:** Se trata de un método numérico para el cálculo del potencial en un recinto limitado por contornos conductores. Se necesita un mallado uniforme de todo el recinto. Los nudos de la red son entonces numerados mediante índices discretos  $i, j, k = 1, 2, 3, \dots$ . Se propone a continuación una función potencial discretizada, que toma valores  $V_{i,j,k}^0$  en los nudos de la malla, y es igual a  $V_n$  sobre los conductores  $n = 1, 2, \dots$  del contorno. Se define un parámetro de error  $\varepsilon$  y se calculan las cantidades:

$$\Gamma_{i,j,k}^0 = V_{i,j,k}^0 - \frac{1}{6} (V_{i,j,k+1}^0 + V_{i,j,k-1}^0 + V_{i,j+1,k}^0 + V_{i,j-1,k}^0 + V_{i+1,j,k}^0 + V_{i-1,j,k}^0) \quad (69)$$

en los nudos de la malla. Si  $\Gamma_{i,j,k}^0 < \varepsilon$  se detiene el proceso, si no se define:

$$V_{i,j,k}^n = V_{i,j,k}^{n-1} - \alpha \Gamma_{i,j,k}^{n-1} \quad (70)$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$ , hasta que  $\Gamma_{i,j,k}^n < \varepsilon$ . El parámetro  $\alpha$  gobierna la convergencia del proceso, que está asegurada para  $0 < \alpha < 2$ . Se suele elegir  $\alpha$  tal que  $1 < \alpha < 2$ .

**Ejercicio:** *Demostrar que en el centro de un poliedro regular de  $N$  caras, tal que  $n$  de ellas están a potencial  $V$  y las  $N - n$  restantes a tierra, el potencial vale  $\phi = (n/N)V$ . Sugerencia: aplicar el principio de superposición. Demostrar que si las caras están a potenciales  $V_i$ , el potencial en el centro vale el valor medio de los potenciales en todas las caras.*

7. **Teorema de reciprocidad:** Sean  $\rho, \sigma$  y  $\rho', \sigma'$  dos distribuciones de carga arbitrarias, y sean  $\phi$  y  $\phi'$  los potenciales creados por  $\rho, \sigma$  y  $\rho', \sigma'$  respectivamente. Entonces se cumple que

$$\int \phi \rho' dV + \int \phi \sigma' dS = \int \phi' \rho dV + \int \phi' \sigma dS \quad (71)$$

**Ejercicio:** *Demostrar (71) a partir de (68) con  $\psi = \phi'$ .*

**Ejercicio:** *Demostrar que, para el caso de un sistema de conductores con cargas y potenciales  $[V_i, Q_i]$  y  $[V'_i, Q'_i]$ , (71) se reduce a:*

$$\sigma Q_i V'_i = \sigma Q'_i V_i \quad (72)$$

**Ejercicio:** *Demostrar usando el teorema de reciprocidad que la carga inducida en una esfera conductora conectada a tierra por otra carga puntual a una distancia  $r$  de la esfera es  $q = -qR/r$ , donde  $R$  es el radio de la esfera y  $q$  el valor de la carga puntual*

8. **Teorema variacional para la carga. Teorema de Thompson:** En un sistema de conductores cargados y aislados, el equilibrio electrostático se alcanza cuando la carga se distribuye por la superficie de los conductores de modo que la energía electrostática del sistema sea mínima.

**Ejercicio:** Demostrar el teorema precedente a partir de la expresión de la energía en función del campo y de (65) con  $\mathbf{V} = \nabla\delta\phi$  y  $\psi = \phi$  donde  $\phi$  es el potencial en el equilibrio electrostático y  $\delta\phi$  una variación del potencial consecuencia de una variación  $\delta\sigma$  de la densidad de carga sobre los conductores, sujeta a la condición  $\delta Q_i = 0$  (la carga total de cada uno de los conductores no varía). Para demostrar que  $U_E$  es un mínimo, hay que demostrar que  $\delta U_E = 0$  y que  $\delta^2 U_E > 0$ .

**Corolario:** La introducción de un nuevo conductor aislado y descargado en un sistema de conductores aislados, disminuye la energía electrostática del sistema.

9. **Teorema variacional para el potencial:** Consideremos un sistema de conductores a potencial constante. La función potencial en el exterior de los conductores es aquella que minimiza la energía electrostática del sistema, satisfaciendo al mismo tiempo las condiciones de contorno impuestas ( $\phi = V_i$  sobre cada conductor).

**Ejercicio:** Demostrar el teorema precedente a partir de la expresión de la energía en función del campo y de (65) con  $\mathbf{V} = \nabla\phi$  y  $\psi = \delta\phi$  donde  $\phi$  es el potencial electrostático y  $\delta\phi$  una variación del potencial que satisface las condiciones de contorno ( $\delta\phi = 0$  sobre los conductores).

**Corolario:** La introducción de un nuevo conductor conectado a tierra en un sistema de conductores mantenidos a potencial constante, aumenta la energía electrostática del sistema.

10. **Aplicación del método de separación de variables a la resolución de la ecuación de Laplace:** Existen once sistemas de coordenadas ortogonales en los cuales la ecuación de Laplace es separable, es decir admite una solución general en forma de un producto de tres funciones independientes de cada una de las coordenadas. En tales casos se generan conjuntos de funciones ortogonales que pueden aprovecharse para la resolución de la ecuación de Laplace por separación de variables cuando los contornos coinciden con superficies de coordenada constante. En este curso estudiaremos tres casos: Coordenadas cartesianas, coordenadas polares (cilíndricas con simetría de traslación a lo largo del eje  $z$ ) y esféricas con simetría azimutal. En este último caso sólo consideraremos el caso en que la coordenada angular varía entre 0 y  $\pi$ .

- a) **Separación de variables en coordenadas cartesianas:** La ecuación de Laplace  $\nabla^2\phi(x, y, z) = 0$  es equivalente al conjunto ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 ; \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2 ; \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \quad (73)$$

siempre que:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (74)$$

siendo entonces la función  $\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  solución de la ecuación de Laplace.

**Ejercicio:** *Demostrar (74) a partir de la hipótesis  $\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$*

Las soluciones generales de (73) son de la forma:

$$X(x) = ax + b \quad (75)$$

si  $\alpha = 0$ ,

$$X(x) = A_\alpha \cos(\alpha\theta) + B_\alpha \sin(\alpha\theta) \quad (76)$$

si  $\alpha$  es imaginaria ( $\alpha^2 < 0$ ) y

$$X(x) = A_\alpha \cosh(\alpha\theta) + B_\alpha \operatorname{senh}(\alpha\theta) \quad (77)$$

(o combinaciones de exponenciales reales) si  $\alpha$  es real.

Excepto cuando  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  la ecuación (74) muestra que al menos una de las constantes debe ser imaginaria, lo que genera siempre soluciones del tipo seno ó coseno. De ese modo, toda función  $\phi(x, y, z)$  solución de la ecuación de Laplace en un recinto rectangular, con condiciones de contorno dadas sobre ese contorno, puede desarrollarse en serie de funciones solución de (73) para valores adecuados de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , alguna de las cuales son senos y/o cosenos que satisfacen la relación de ortogonalidad:

$$\int_0^\pi \sin/\cos(nx) \sin/\cos(mx) = 0 \quad (m \neq n) \quad \text{ó} \quad \frac{\pi}{2} \quad (m = n) \quad (78)$$

esto permite utilizar el método de separación de variables, estudiado en las asignaturas de matemáticas, para resolver un gran número de problemas de potencial en geometría rectangular. El método opera como sigue:

- Desarrollo del potencial en serie de funciones de la forma (76) y (77) de modo que se cumplan el máximo de condiciones de contorno.
- Determinación de los coeficientes restantes haciendo uso de las relaciones de ortogonalidad ((78) en el caso de coordenadas cartesianas).
- Obtención del resultado final en forma de una serie de funciones del tipo (76) y (77) con coeficientes conocidos.

Una buena descripción del método, que abarca mas casos de los considerados en estas notas, puede encontrarse en la bibliografía citada [Jackson].

**Ejercicio:** *Resolver la ecuación de Laplace bidimensional en el interior de una caja rectangular, todas cuyas caras están a tierra excepto una que está a potencial  $V$ .*

- b) **Separación de variables en coordenadas polares** ( $r, \theta$ ): La ecuación de Laplace bidimensional:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (79)$$

admite la solución  $\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ , donde  $R$  y  $\Theta$  son soluciones de las ecuaciones:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = \nu^2; \quad \frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -\nu^2 \quad (80)$$

**Ejercicio:** Demostrar (80) a partir de (79) y de la hipótesis  $\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . Las soluciones de (80) son:

$$R(r) = a_0 + b_0 \ln(r); \quad \Theta(\theta) = A_0 + B_0 \theta \quad (81)$$

para  $\nu = 0$  y:

$$R(r) = a_\nu r^\nu + b_\nu r^{-\nu}; \quad \Theta(\theta) = A_\nu \cos(\nu\theta) + B_\nu \sin(\nu\theta) \quad (82)$$

cuando  $\nu \neq 0$ .

**Ejercicio:** Calcular el campo eléctrico en el exterior de un cilindro infinito macizo de radio  $R$ , colocado en un campo exterior  $E_0$  constante y perpendicular al eje del cilindro. Comparar el resultado con el obtenido por el método de las imágenes.

**Ejercicio:** Calcular el momento dipolar por unidad de longitud del cilindro, comparando el resultado con el obtenido de la configuración de cargas imágenes.

**Ejercicio:** Usando (82) y las relaciones de ortogonalidad (78) calcular el potencial en el interior de un cilindro conductor hueco infinito, una de cuyas mitades (de  $\theta = 0$  a  $\theta = \pi$ ) está a potencial  $V/2$  y la otra a potencial  $-V/2$ . Nótese que al estar  $\phi(r, \theta)$  definido para todo valor de  $\theta$ ,  $\nu$  debe ser un número entero en (82) (de lo contrario  $\phi(r, \theta)$  sería una función multivaluada en  $\theta$ ).

**Ejercicio:** Utilizar (82) con  $\nu = n\pi/\theta_0$  para demostrar que en las proximidades de una esquina conductora de ángulo  $\theta_0$  el potencial varía como  $r^{\pi/\theta_0}$  y la componente radial del campo como  $r^{\pi/\theta_0-1}$ . Obsérvese que si  $\theta_0 > \pi$  el campo tiende a infinito en la esquina (efecto punta bidimensional).

c) **Separación de variables en coordenadas esféricas con simetría azimutal.**

La ecuación de Laplace con simetría azimutal:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (83)$$

admite las soluciones:

$$\phi = \frac{U_n(r)}{r} P_n(\cos \theta) \quad (84)$$

donde:

$$U_n(r) = A_n r^{n+1} + B_n r^{-n} \quad (85)$$

y donde  $P_n(x)$  son los polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \dots \quad (86)$$

que satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_{n'}(x) dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,n'} \quad (87)$$

Los polinomios de Legendre convergen en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  (ó  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) y las soluciones (84) son, por tanto, válidas cuando  $\theta$  toma todos los valores posibles. Existen también polinomios de Legendre de subíndice real convergentes en el intervalo  $-1 < x \leq 1$  (y que, por tanto, no dan soluciones físicas para  $\theta = \pi$ ), que se utilizan para resolver problemas con contornos conductores de forma cónica y, en particular, para demostrar el "efecto punta", similar al "efecto punta bidimensional" del ejercicio anterior, según el cual los campos en el entorno de una punta cónica tienden a infinito [ver Jackson pp.96 y ss.], lo que constituye el fundamento del pararrayos.

**Ejercicio:** *Calcular el potencial dentro y fuera de una esfera hueca conductora de radio  $a$  y espesor despreciable, cuyos dos hemisferios ( $\theta < \pi/2$  y  $\theta > \pi/2$ ) están a potenciales opuestos  $\pm V$ . Calcular el momento dipolar de la distribución de carga*

**Ejercicio:** *Calcular el potencial creado por una esfera conductora descargada en presencia de un campo exterior constante  $\mathbf{E}_0$  y comparar el resultado con el obtenido por el método de las imágenes. Calcular también el momento dipolar de la esfera.*

11. **Concepto de función de Green electrostática:** Consideremos el problema de una densidad de carga  $\rho$  contenida en un recinto limitado por una superficie  $\Sigma$ . Entonces el problema de potencial puede plantearse como el problema de resolver la ecuación de Poisson,  $\nabla^2\phi = \rho/\epsilon_0$ , dentro del recinto, con las condiciones de contorno adecuadas sobre  $\Sigma$ . Una forma alternativa es transformar esta ecuación diferencial en una ecuación integral, en la que  $\phi$  se expresa como una integral sobre la densidad de carga y, eventualmente, también sobre el contorno. El núcleo de esa ecuación integral es la Función de Green. Por ejemplo, la conocida expresión para el potencial creado por una distribución de carga  $\rho$  en el espacio libre:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (88)$$

es una ecuación integral cuyo núcleo  $(4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^{-1}$  es la función de Green del espacio libre.

12. **Tema avanzado: Función de Green de Dirichlet:** Consideremos una carga puntual de valor unidad en el punto  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  de un recinto limitado por paredes conductoras. Supongamos que el potencial de los conductores del contorno es cero (en la jerga electromagnética se dice que están conectados a tierra). Entonces la función de Green de Dirichlet  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es igual al potencial creado en el punto  $\mathbf{r}$ .

En virtud del principio de superposición, para una densidad de carga arbitraria  $\rho(\mathbf{r}')$  y paredes conductoras a tierra, el potencial puede escribirse como:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' \quad (89)$$

Si los conductores del contorno no están conectados a tierra, pero se conoce su potencial  $V_i$ , entonces se demuestra que:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' + \epsilon_0 \sum V_i \oint_{\Sigma_i} \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathcal{S}' \quad (90)$$

donde las integrales de superficie se extienden sobre los conductores del contorno, siendo  $\mathbf{n}'$  la dirección normal hacia afuera de los conductores (es decir hacia dentro del recinto).

De acuerdo con su definición, la función de Green  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  puede obtenerse resolviendo la ecuación

$$\nabla^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (91)$$

con la condición:

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{r} \in \Sigma \quad (92)$$

**Ejercicio:** Demostrar la simetría de la función de Green,  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ , a partir de (68) con  $\psi(\mathbf{r}) = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  y  $\phi(\mathbf{r}) = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$ .

**Ejercicio:** Demostrar (90) a partir de (68) cuando  $\phi(\mathbf{r})$  es el potencial electrostático y  $\psi(\mathbf{r}) = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .

13. **Tema avanzado: Función de Green de Neumann:** Consideremos una carga puntual de valor unidad en el punto  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  de un recinto limitado por una superficie tal que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$ , siendo  $\mathbf{n}$  la dirección normal a  $\Sigma$  (condiciones de contorno de Neumann). Entonces la función de Green de Neumann  $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es el potencial creado en el punto  $\mathbf{r}$  por la carga puntual en  $\mathbf{r}'$ .

En virtud del principio de superposición, para una densidad de carga arbitraria  $\rho(\mathbf{r}')$  en un recinto cuyas paredes satisfacen la condición de contorno de Neumann, el potencial puede escribirse como:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' \quad (93)$$

Si el contorno no satisface la condición de Neumann, pero se conoce el valor de la componente normal del campo sobre el contorno, entonces:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathcal{V}' + \epsilon_0 \oint_{\Sigma} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathcal{S}' \quad (94)$$

donde  $\mathbf{n}'$  es la normal dirigida hacia afuera del recinto.

De acuerdo con su definición, la función de Green  $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  puede obtenerse resolviendo la ecuación

$$\nabla^2 G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (95)$$

con la condición:

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{r} \in \Sigma \quad (96)$$

**Ejercicio:** *Demostrar la simetría de la función de Green,  $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ , a partir de (68) con  $\psi = G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  y  $\phi = G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$ .*

**Ejercicio:** *Demostrar (94) a partir de (68) cuando  $\phi(\mathbf{r})$  es el potencial electrostático y  $\psi(\mathbf{r}) = G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .*

La función de Green de Neumann no es útil en problemas con contornos conductores, pero puede resultar útil en otros casos (por ejemplo, a la hora de calcular los campos y corriente estacionarias en el interior de medios con conductividad finita).

14. **Coefficientes de capacidad y potencial:** Debido a la linealidad de las ecuaciones de la electrostática, las cargas y los potenciales de un sistema de conductores están relacionados por:

$$Q_i = \sum_j C_{i,j} V_j \quad (97)$$

donde los  $C_{i,j}$  son los coeficientes de capacidad del sistema. Los elementos de la matriz inversa:

$$V_i = \sum_j P_{i,j} Q_j \quad (98)$$

se denominan coeficientes de potencial.

15. **Energía de un sistema de conductores:** La energía de un sistema de conductores puede escribirse, en función de sus cargas, sus potenciales y sus coeficientes de capacidad como:

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{i,j} V_i V_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P_{i,j} Q_i Q_j > 0 \quad (99)$$

siendo  $U_E$  una forma cuadrática definida positiva.

**Ejercicio:** *Demostrar (99) a partir de la definición de energía en función del campo electrostático (39) de la primera identidad de Green (66) y de (97) y (98)*

16. **Propiedades de  $C_{i,j}$  y de  $P_{i,j}$ :**

- Los coeficientes de capacidad y potencial forman matrices simétricas:  $C_{i,j} = C_{j,i}$  y  $P_{i,j} = P_{j,i}$ . Esto es una consecuencia del teorema de reciprocidad (71).
- $C_{i,i} > 0$ ,  $P_{i,i} > 0$ . Esto es consecuencia de ser (99) definida positiva.

c)  $C_{i,j} \leq 0 ; i \neq j, P_{i,j} > 0, P_{i,j} \leq P_{i,i}, |C_{i,j}| \leq C_{i,i}$ . Todas estas propiedades son consecuencia del teorema del valor medio (67) (que establece que el potencial no puede tener máximos ni mínimos fuera de los conductores y/o el infinito).

**Ejercicio:** *Demostrar las propiedades del último apartado anterior, utilizando las sugerencias de dicho apartado.*

**Ejercicio:** *Demostrar que el único coeficiente de capacidad de una esfera conductora maciza de radio  $R$  es  $C = 4\pi R\epsilon_0$ .*

**Ejercicio:** *Dos conductores se dice que están en condiciones de “influencia total” cuando se cumple que  $C_{1,2} = -C_{1,1}$ , siendo el conductor “1” uno cualquiera de ellos. Demostrar que esa condición se cumple cuando uno de ellos rodea completamente al otro. Demostrar que entonces  $P_{1,2} = P_{2,2}$  y que si hay otros conductores  $3, 4, \dots$ , entonces  $C_{1,i} = 0$  y  $P_{1,i} = P_{2,i}$  para  $i = 3, 4, \dots$ .*

**Ejercicio:** *Un conductor esférico macizo de radio  $a$  está alojado en un hueco esférico concéntrico de radio  $b$  excavado en el interior de otra esfera conductora de radio exterior  $c$ . Calcular las matrices de capacidades y coeficientes de potencial del sistema. ¿Influye en el resultado el que el hueco esférico esté descentrado respecto de la esfera exterior? ¿Y si está descentrado respecto del conductor interior?.*

**Ejercicio:** *Repetir el ejercicio anterior con conductores de simetría cilíndrica.*

17. **Condensadores:** Un condensador es un sistema de dos conductores a los que se impone la condición de que las cargas almacenadas en cada uno de ellos son iguales y de signo contrario. Se define la capacidad del condensador como:

$$C = |Q|/\Delta V \quad (100)$$

donde  $\Delta V$  es la diferencia de potencial entre los conductores.

**Ejercicio:** *Demostrar que, en general:*

$$C = \frac{C_{1,1}C_{2,2} - C_{1,2}^2}{C_{1,1} + C_{2,2} + 2C_{1,2}} \quad (101)$$

y que cuando se trata de conductores en influencia total entonces (101) se transforma en  $C = C_{1,1}$ .

**Ejercicio:** *Demostrar que la capacidad del condensador formado por dos placas conductoras planoparalelas de área  $A$  separadas una distancia  $d$  vale aproximadamente  $C = \epsilon_0 A/d$ , siempre que la distancia de separación  $d$  sea mucho menor que las dimensiones de las placas.*

**Ejercicio:** *Demostrar que la capacidad por unidad de longitud de un cable coaxial, formado por un conductor cilíndrico macizo de radio  $a$  rodeado de una camisa conductora de radio  $b$ , vale:*

$$\frac{d}{dz}C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \quad (102)$$

**Ejercicio:** *Demostrar que la capacidad de un condensador esférico formado por un conductor esférico macizo de radio  $a$ , rodado de un cascarón esférico de radio interior  $b > a$  vale:*

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)^{-1} \quad (103)$$

**Ejercicio:** *Usando la teoría de imágenes calcular la capacidad por unidad de longitud de una línea bifilar, formada por dos cilindros conductores de radio  $R$  separados una distancia  $d > 2R$ .*

**Ejercicio:** *Calcular aproximadamente la capacidad entre dos esferas conductoras macizas de radio  $R$  separadas una distancia  $d > 2R$ . Sugerencia: usar el resultado de la teoría de imágenes en primer orden de aproximación.*

18. **Condensadores como elementos de circuito. Conexión de condensadores en serie y en paralelo:** Los condensadores al conectarse a un circuito eléctrico, actúan como elementos de circuito que almacenan carga y energía eléctrica, según las relaciones (100) y:

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (104)$$

(ésta última se deduce de (99)).

Dos condensadores  $-1-$  y  $-2-$  se dice que están conectados en paralelo si se conectan de modo que la diferencia de potencial  $\Delta V$  sea siempre la misma en ambos. En tal caso el conjunto de ambos puede considerarse como un solo condensador de capacidad

$$C = C_1 + C_2 \quad (105)$$

dado que la carga total almacenada en ambos es  $Q = Q_1 + Q_2$  y la diferencia de potencial es la misma:  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ .

Asimismo, dos condensadores  $-1-$  y  $-2-$  están conectados en serie cuando el segundo conductor de uno de ellos se conecta al primero del otro, de modo que la diferencia de potencial entre los otros dos conductores es  $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ . El conjunto puede ahora considerarse como un solo condensador si se impone la condición de que la carga total almacenada conjuntamente en los dos conductores interconectados sea nula. En tal caso se cumple que  $Q = Q_1 = Q_2$ , de donde, si  $C$  es la capacidad del nuevo condensador:

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (106)$$

que constituye la regla de combinación de condensadores conectados en serie.

**Ejercicio:** *Hacer un esquema gráfico de la conexión en serie y en paralelo de dos condensadores y comprobar las reglas de composición enunciadas*

**Ejercicio:** *Considérese el sistema formado por un conductor esférico central de radio  $a$ , un cascarón esférico concéntrico de radio interior  $b$  y exterior  $c$  y otro cascarón esférico concéntrico de radio interior  $d > c$  y exterior  $e$ . Calcular primero la matriz de capacidades del sistema. Después la capacidad de los condensadores formados por el primer y el segundo conductor y por el segundo y el tercero, respectivamente. Finalmente calcular la capacidad entre el primer y el tercer conductor, suponiendo que el segundo está descargado y comprobar que se cumple (106).*

19. **Fuerzas generalizadas:** Para calcular la fuerza que se ejerce sobre un sistema de conductores podemos utilizar el principio de los trabajos virtuales:

$$F_\zeta = -\frac{\delta W_{mec}}{\delta \zeta} \quad (107)$$

donde  $W_{mec}$  es el trabajo mecánico que es necesario realizar sobre el sistema en un desplazamiento virtual  $\delta \zeta$  a lo largo de la coordenada generalizada  $\zeta$ . Puede demostrarse que

$$F_\zeta = -\left(\frac{\partial U_E}{\partial \zeta}\right)_Q = \left(\frac{\partial U_E}{\partial \zeta}\right)_V \quad (108)$$

según que la derivada se realice manteniendo constantes las cargas  $Q_i$  o los potenciales  $V_i$  de los conductores.

En efecto, en un proceso en el que las cargas de los conductores permanecen constantes, el único trabajo que se realiza es el trabajo mecánico, lo que lleva a  $\delta W_{mec} = \delta U_E$  y, por tanto, a la primera igualdad de (108).

Consideremos ahora un proceso en el que son los potenciales de los conductores los que permanecen constantes. En tal caso es preciso realizar, además del trabajo mecánico, un trabajo eléctrico para mantener constantes los potenciales durante el desplazamiento. Este trabajo es  $\delta W_e = \sum_i V_i \delta Q_i$ , donde  $\delta Q_i$  es el incremento de carga de los conductores durante el desplazamiento (recuérdese que, en general, es imposible mantener constantes a la vez las cargas y los potenciales). Ahora bien, dado que el proceso se realiza a potencial constante, podemos escribir  $\delta W_e = \sum_i V_i \delta Q_i = \delta(\sum_i V_i Q_i) = 2\delta U_E$ , donde hemos usado la primera igualdad de (99). Aplicando ahora el principio de conservación de la energía tenemos que  $\delta U_E = \delta W = \delta W_e + \delta W_{mec} = 2\delta U_E + \delta W_{mec}$ , de donde finalmente  $\delta W_{mec} = -\delta U_E$ , lo que junto a (107) nos lleva a la segunda igualdad de (108)

**Ejercicio:** *Mostrar que todo conductor descargado es atraído por un sistema de conductores cargados, sea cual sea su carga. Mostrar también que todo conductor a tierra es atraído por un sistema de conductores a potencial distinto de cero. Utilizar los teoremas variacionales para la energía.*

Usando (99), (108) se transforma en:

$$F_\zeta = -\sum_{i,j} Q_i Q_j \frac{\partial P_{i,j}}{\partial \zeta} = \sum_{i,j} V_i V_j \frac{\partial C_{i,j}}{\partial \zeta} \quad (109)$$

**Ejercicio:** Utilizando el resultado aproximado de uno de los ejercicios anteriores, calcular la fuerza entre dos esferas macizas conductoras de radio  $R$ , separadas una distancia  $d$  y colocadas a potenciales  $\pm V/2$ .

20. **Métodos variacionales para el cálculo de capacidades (tema avanzado):** En muchos casos sólo estamos interesados en el cálculo de las capacidades de un sistema de conductores. En ese caso podemos evaluar éstas de un modo bastante aproximado mediante una técnica variacional que hace uso de los teoremas variacionales para la carga (T. de Thompson) y el potencial vistos anteriormente. Para ello podemos definir el funcional:

$$U[\psi(\mathbf{r})] = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathcal{V} \quad (110)$$

que coincide con la energía electrostática del sistema cuando la función  $\psi$  coincide con el potencial electrostático  $\phi$ . De acuerdo con el teorema variacional mencionado,  $U$  alcanza un mínimo entre todas las funciones de prueba  $\psi$  posibles que satisfacen las condiciones de contorno impuestas ( $\psi = \phi = V_i$  sobre los conductores y  $\psi = \phi = 0$  en el infinito), cuando  $\psi = \phi$  en todas partes. Ello quiere decir que, para funciones  $\psi$  que constituyan una aproximación razonable de  $\phi$ , el error cometido al evaluar la energía usando (110) será mucho más pequeño que el error cometido en la propia aproximación de  $\phi$  mediante  $\psi$ . Nótese que, en esta aproximación resulta esencial que la función aproximada  $\psi$  cumpla las mismas condiciones de contorno que  $\phi$ . En tal caso podemos hacer la aproximación:

$$U[\psi(\mathbf{r})] \simeq U_E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{i,j} V_i V_j \quad (111)$$

Evaluando  $U[\psi]$  para distintas funciones prueba  $\psi$  correspondientes a distintas excitaciones  $V_i$  del sistema de conductores, podemos usar (111) para evaluar de un modo aproximado las  $C_{i,j}$ . En el caso simple de un condensador formado por dos conductores, (111) se reduce a:

$$U[\psi(\mathbf{r})] \simeq U_E = \frac{1}{2} CV^2 \quad (112)$$

**Ejercicio:** Un cable coaxial está formado por dos cilindros metálicos concéntricos, de radios  $a$  y  $b$ . Calcular una expresión aproximada para la capacidad por unidad de longitud del cable, utilizando una función aproximada para el potencial  $\psi \simeq \phi$  que varíe linealmente con la distancia al conductor externo ( $\psi = A(b-r)$ , donde  $A$  es una constante a determinar en función de  $V$ ), así como (112). Comparar esa expresión con la expresión exacta, utilizando el resultado:

$$\ln(x) = 2 \left( \left( \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \dots \right) \quad (113)$$

Análogamente es posible desarrollar un método variacional para el cálculo de la matriz de coeficientes de potencial, basado en la aproximación de la densidad de carga superficial en los conductores  $\sigma_i(\mathbf{r})$  mediante funciones aproximadas  $\xi_i(\mathbf{r})$  definidas sobre cada conductor que satisfagan la condición:

$$\oint_i \xi_i(\mathbf{r}) d\mathcal{S} = Q_i \quad (114)$$

donde  $Q_i$  es la carga total sobre el conductor  $i$ -ésimo. En tal caso usaremos el funcional

$$U[\xi(\mathbf{r})] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \oint_i \oint_j \frac{\xi_i(\mathbf{r})\xi_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{S}d\mathcal{S}' \quad (115)$$

y la aproximación:

$$U[\xi_i(\mathbf{r})] \simeq U_E = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P_{i,j} Q_i Q_j \quad (116)$$

Evaluando  $U[\xi_i]$  para distintos conjuntos de funciones prueba  $\xi_i$  correspondientes a distintas excitaciones  $Q_i$  del sistema de conductores, podemos usar (116) para evaluar de un modo aproximado las  $P_{i,j}$ . En el caso simple de un condensador formado por dos conductores, (116) se reduce a:

$$U[\xi_i(\mathbf{r})] \simeq U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{V} \quad (117)$$

**Ejercicio:** *Demostrar que la expresión para la capacidad obtenida a partir de una expresión aproximada para la densidad de carga (117) es una cota inferior del valor exacto de la capacidad. Demostrar que si partimos de una expresión aproximada de la función potencial usando (112), obtenemos una cota superior para la capacidad.*

# Tema III: Polarización, Conducción y Relajación al Equilibrio

## Primera parte: Electroestática de los aislantes

1. **Cargas inducidas, polarización y desplazamiento eléctrico:** En un cuerpo aislante no hay carga libre, pero pueden inducirse desplazamientos de carga en torno a átomos y moléculas, que generan una densidad de carga media,  $\rho_p$ ,  $\sigma_p$ , no nula. La neutralidad eléctrica de la materia impone a estas magnitudes la restricción:

$$\int_{\Sigma} \rho_p dV + \oint_{\Sigma} \sigma_p dS = 0 \quad (118)$$

donde  $\Sigma$  es la superficie límite del cuerpo aislante. De ahí se deduce que  $\rho_p$  y  $\sigma_p$  pueden escribirse como:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} ; \sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (119)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal dirigido hacia afuera de  $\Sigma$ .

El sentido físico de  $\mathbf{P}$  queda claro de la identidad:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{P} dV = \int_{\Sigma} \mathbf{r} \rho_p dV + \oint_{\Sigma} \mathbf{r} \sigma_p dS \quad (120)$$

que se demuestra a partir de (119). De (120) y de la definición del momento dipolar de una distribución de carga (42) se deduce que  $\mathbf{P}$  es la polarización por unidad de volumen del cuerpo.

**Nota I:** Al decir que en un cuerpo aislante la carga libre total es nula hemos obviado la posibilidad, muy estudiada en los primeros experimentos sobre electricidad estática, de generar una densidad de carga libre superficial en un medio aislante por frotamiento. Para incluir estos fenómenos en la formulación del presente tema, basta con considerar esta densidad de carga libre inducida como una densidad de carga libre externa al cuerpo y localizada en su superficie.

**Nota II:** en realidad, (119) no define unívocamente  $\mathbf{P}$ , pues siempre es posible añadir a  $\mathbf{P}$  el rotacional de una función vectorial sin que (119) y (120) dejen de cumplirse. Sólo cuando identificamos  $\mathbf{P}$  con la polarización queda  $\mathbf{P}$  unívocamente definido.

**Ejercicio:** Demostrar (120) a partir de (119).

**Ejercicio:** Considérese un cuerpo neutro formado por la superposición de una densidad de carga positiva  $\rho(\mathbf{r})$  y otra negativa  $-\rho(\mathbf{r})$  de modo que la polarización por unidad de volumen sea nula. Si la densidad de carga positiva sufre un desplazamiento  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ , de modo que el cuerpo adquiera una polarización por unidad de volumen  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{a}$ , demostrar que la densidad de carga neta por unidad de volumen del cuerpo viene ahora dada por  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

**Ejercicio:** *Considérese un cuerpo formado por moléculas dipolares, que dan lugar a una polarización por unidad de volumen  $\mathbf{P}$ . Integrando la expresión del potencial de un dipolo (44), hallar una expresión para el potencial eléctrico creado por el cuerpo. Luego, demostrar que ese potencial es el mismo que el creado por las distribuciones de carga  $\rho_p$  y  $\sigma_p$  sobre el volumen y la superficie del cuerpo respectivamente. Esta es la forma en que, en muchos libros de texto se introduce el vector polarización,  $\mathbf{P}$ . Sin embargo, el carácter de  $\mathbf{P}$  es mucho más general y puede definirse incluso en el caso de cuerpos formados por moléculas cuyos momentos cuadrupolares, octopolares, etc. no son despreciables.*

Definiendo ahora el vector desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  como:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} + \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (121)$$

las ecuaciones diferenciales de la electrostática, en presencia de cuerpos aislantes quedan:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = 0 &\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \end{aligned} \quad (122)$$

donde  $\rho$  es cualquier distribución de carga libre, no ligada al cuerpo:  $\rho = \rho_{total} - \rho_p$ . En general, en el interior de un aislante será  $\rho = 0$ , pero en el exterior puede ser  $\rho \neq 0$  y esto hay que tenerlo en cuenta en las ecuaciones. También es posible encontrar cuerpos semiaislantes (o semiconductores), en cuyo interior/superficie pueden coexistir densidades de carga de polarización,  $\rho_p$ ,  $\sigma_p$  y libre  $\rho$ ,  $\sigma$ .

2. **Teorema de Gauss. Condiciones de contorno:** De las ecuaciones (123) se deduce que, dada una superficie cerrada  $\Sigma$  arbitraria, que incluya o no cuerpos conductores, aislantes o semiaislantes:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q_{int} \quad (123)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal hacia afuera y  $Q_{int}$ , la carga **libre** contenida en  $\Sigma$ .

Consideremos ahora las condiciones de contorno en la frontera entre dos medios con propiedades aislantes o semiaislantes. de (123) y (123) se deduce que:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 ; \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad (124)$$

donde  $\sigma$  es la densidad de carga libre depositada sobre la frontera.

**Ejercicio:** *Mostrar que las densidades de carga superficial y total  $\sigma_{total}$  y de polarización  $\sigma_p$  en la frontera entre dos medios semiaislantes, pueden obtenerse de:*

$$\epsilon_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \sigma_{total} ; \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \sigma_p \quad (125)$$

**Ejercicio:** *En un condensador de placas planoparalelas separadas una distancia  $d$  sometido a una diferencia de potencial  $V$ , se introduce una lámina paralela a las placas y de*

espesor  $a < d$  de un material caracterizado por una polarización constante  $\mathbf{P}_0$  dirigida en la dirección perpendicular a la lámina y a las placas. Utilizando (121) y (123) junto con las condiciones de contorno (124) calcular, despreciando los efectos de borde, los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$ , así como el potencial  $\phi$ .

**Ejercicio:** Calcular el potencial y el campo eléctrico creado por una esfera de radio  $R$  y polarización uniforme  $\mathbf{P}_0$ , demostrando que el campo en el interior viene dado por  $\mathbf{E} = -(1/3\epsilon_0)\mathbf{P}_0$  y en el exterior coincide con el de un dipolo de momento dipolar  $\mathbf{p} = (4/3)\pi R^3\mathbf{P}_0$ . Sugerencia: usar separación de variables en coordenadas esféricas, con las condiciones de contorno adecuadas.

**Ejercicio:** Calcular el potencial y el campo eléctrico dentro y fuera de un cilindro infinito de polarización uniforme  $\mathbf{P}_0$  perpendicular al eje del cilindro.

3. **Relaciones constitutivas. Medios dieléctricos lineales e isótropos:** Los cuerpos en los que se generan densidades de carga ligada se denominan cuerpos polarizables o dieléctricos. En esos casos la ventaja de trabajar con  $\mathbf{D}$  en lugar de con  $\mathbf{E}$  directamente en las ecs. (123) es que los efectos de la carga ligada o carga de polarización los incluimos en el campo de desplazamiento  $\mathbf{D}$ , cuya fuente es la carga libre, que podemos medir con mucha más facilidad. Ahora bien, el precio que hay que pagar por ello es que para poder resolver las ecuaciones (123) necesitamos conocer la relación entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  (o entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$ ). Estas son las “relaciones constitutivas” del medio.

El caso más sencillo es el de los medios dieléctricos lineales e isótropos, cuyas relaciones constitutivas vienen dadas por:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E} ; \mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad (126)$$

donde  $\chi_e$  es la susceptibilidad eléctrica (adimensional) y  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$  la constante dieléctrica del medio. La mayoría de los gases, líquidos, amorfos, cuerpos policristalinos y monocristales cúbicos, presentan unas relaciones constitutivas de este tipo. A veces se usa también la constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ , que es un número adimensional mayor que la unidad. Esta propiedad se deriva del hecho de que los momentos dipolares intrínsecos o inducidos en la materia tienden siempre a orientarse según el campo aplicado.

A partir de ahora nos limitaremos a este tipo de relaciones constitutivas, que pueden aplicarse con mayor o menor grado de aproximación a la mayoría de los medios macroscópicos sometidos a campos no muy intensos, aunque las relaciones constitutivas pueden ser muy variadas. Dejaremos el estudio detallado de este tema para la asignatura “Electromagnetismo en la Materia”.

Una propiedad importante de los medios aislantes caracterizados por las relaciones (126) es que, en ellos, no hay densidad de carga volumétrica de polarización. En efecto, por ser aislantes  $\rho = 0$  y de (126):

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\epsilon_0\chi_e\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\epsilon_0\chi_e}{\epsilon}\nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\epsilon_0\chi_e}{\epsilon}\rho = 0 \quad (127)$$

En el caso de que en el dieléctrico lineal e isótropo exista, por el motivo que sea, una densidad volumétrica de carga libre no nula,  $\rho$ , la densidad volumétrica de carga de polarización tampoco se anulará.

**Ejercicio:** *Mostrar que, en este último caso, la densidad volumétrica de carga de polarización vale  $\rho_p = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \rho$ .*

4. **Ecuaciones y condiciones de contorno en dieléctricos lineales e isótropos:** Las ecuaciones diferenciales (123) en el caso de dieléctricos lineales e isótropos se reducen a:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} = 0 & \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} & \rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}\end{aligned}\quad (128)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga libre que, en medios aislantes, será nula.

A su vez, las condiciones de contorno en la interfaz entre dos medios dieléctricos lineales e isótropos se deducen de (124) y (126):

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 & \rightarrow \phi_1 - \phi_2 = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\epsilon_2\mathbf{E}_2 - \epsilon_1\mathbf{E}_1) = \sigma & \rightarrow \epsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \epsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n} = \sigma\end{aligned}\quad (129)$$

donde  $\sigma$  es una posible densidad de carga libre superficial depositada en la interfaz.

Finalmente, las condiciones de contorno en la frontera entre un conductor en equilibrio electrostático y un dieléctrico lineal e isótropo se deducen a su vez de (129) en el caso particular en que el campo eléctrico se anula en el conductor (medio 1 en (129)):

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \phi = V \quad (130)$$

donde  $\mathbf{n}$  apunta hacia el exterior del conductor y  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico en el exterior del conductor.

5. **Generalización del teorema de unicidad:** De acuerdo con (128) el potencial electrostático en un aislante lineal e isótropo satisface la ecuación de Laplace. Esta situación es en todo similar a la del vacío, excepto por la presencia de la constante dieléctrica  $\epsilon$  en lugar de  $\epsilon_0$ . Por otro lado, las condiciones de contorno en la interfaz entre estos aislantes establecen que:

$$\epsilon_1\phi_1 \cdot \frac{\partial\phi_1}{\partial n} d\mathcal{S} = \epsilon_2\phi_2 \cdot \frac{\partial\phi_2}{\partial n} d\mathcal{S} \quad (131)$$

(recuérdese que estamos considerando medios aislantes y que, por tanto, en las interfaces de separación entre esos medios es  $\sigma = 0$ ). A partir de este resultado se demuestra que las condiciones de unicidad para la solución de la ecuación de Laplace en el interior de un recinto que encierra uno o varios medios aislantes lineales e isótropos son las mismas que las enunciadas en el apartado 2 del tema anterior.

**Ejercicio:** *Usando (131) generalizar la demostración del del teorema de unicidad a un recinto que encierra un medio aislante lineal e isótropo, homogéneo a trozos. Sugerencia:*

usar (131) para demostrar que, dadas dos soluciones  $\phi_a$  y  $\phi_b$  que cumplen las mismas condiciones, la función  $\epsilon_i(\phi_a(\mathbf{r}) - \phi_b(\mathbf{r}))$  debe anularse (o a lo sumo ser una constante) para todo  $\mathbf{r}$ . Usar en la demostración la primera identidad de Green (66) del mismo modo que se hizo para demostrar el teorema de unicidad en el vacío.

La generalización del teorema de unicidad al caso en que, en el interior del recinto hay una densidad de carga volumétrica no nula resulta también análoga al caso del vacío.

En definitiva, al igual que en el Tema II, podemos decir que la solución a la ecuación de Laplace (o a la de Poisson para una densidad de carga dada) dentro de un recinto que encierra un medio dieléctrico lineal e isótropo, homogéneo a trozos, es única cuando:

- a) Se conoce el valor del potencial en el contorno (condiciones de contorno de Dirichlet)
- b) o bien, se conoce el valor de la derivada normal del potencial,  $\partial\phi/\partial n$ , en el contorno (condiciones de contorno de Neumann; en este caso el potencial se conoce salvo una constante aditiva).
- c) o bien se conoce el valor del potencial en parte del contorno y el valor de su derivada normal en el resto del contorno (condiciones de contorno mixtas).

En el caso de un problema con contornos conductores, y supuesto que el potencial se anula en el infinito, la solución para el potencial será única si se especifican:

- a) Los potenciales de todos los conductores.
- b) o bien, la carga total sobre cada conductor.
- c) o bien, los potenciales de unos conductores y las cargas del resto.

6. **Teorema de reciprocidad:** El teorema de reciprocidad (71) puede también generalizarse para distribuciones de carga arbitrarias inmersas en un medio lineal e isótropo, homogéneo a trozos. Para ello basta con considerar que  $\rho = \epsilon_i \nabla \cdot \mathbf{D}$  y que, de acuerdo con las condiciones de contorno (129), en las interfaces se debe cumplir que:

$$\epsilon_1 \phi_1 \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial n} d\mathcal{S} - \epsilon_2 \phi_2 \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial n} d\mathcal{S} = \sigma d\mathcal{S} \quad (132)$$

donde  $\sigma$  es una posible densidad de carga libre depositada en la interfaz.

**Ejercicio:** Utilizando (132) generalizar el teorema de reciprocidad (71) a dos distribuciones de carga inmersas en un medio dieléctrico lineal e isótropo, homogéneo a trozos.

7. **Sistemas formados por conductores y dieléctricos lineales e isótropos. Matriz de capacidades:** Consideremos un sistema formado por conductores inmersos en un medio dieléctrico lineal e isótropo, homogéneo a trozos. De acuerdo con el teorema de unicidad, el potencial queda determinado cuando se conocen:

- a) Los potenciales de todos los conductores.

- b) o bien, la carga total sobre cada conductor.
- c) o bien, los potenciales de unos conductores y las cargas del resto.

Siendo además las relaciones entre las cargas y los potenciales de los conductores lineales (pues también lo son las ecuaciones para el potencial y los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$ ). Este hecho permite generalizar sin más las definiciones de matriz de capacidades y de coeficientes de potencial al caso estudiado. En particular, y dado que se cumple el teorema de reciprocidad, las propiedades de las matrices  $C_{i,j}$  y  $P_{i,j}$ , así como la definición de condensador, etc... estudiadas en el Tema II.

8. **Métodos de resolución de problemas de potencial en medios dieléctricos lineales e isótropos:** Existen algunos casos que conviene conocer, en los que de la solución del problema en el vacío puede deducirse la solución del problema con dieléctricos. Estos casos se reducen a:

- En primer lugar el caso trivial en el que todo el medio es homogéneo de constante  $\epsilon$ .
- En segundo lugar el caso en el que las interfaces de separación entre dieléctricos son paralelas a las líneas de campo de la solución conocida en el ausencia de dieléctricos.
- En tercer lugar el caso en el que las interfaces de separación entre dieléctricos son perpendiculares a las líneas de campo de la solución conocida en el ausencia de dieléctricos.

Estos casos y algunos ejemplos se estudian en los ejercicios que siguen.

**Ejercicio:** Considerar un condensador formado por dos conductores próximos en el vacío. Sea  $C_0$  la capacidad de dicho condensador. Demostrar que si los mismos conductores se sumergen en un medio de constante dieléctrica  $\epsilon$ , la capacidad del nuevo condensador es  $C = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} C_0$ .

**Ejercicio:** Considérese un problema con contornos conductores y en un medio de permitividad igual a la del vacío. Sea  $\mathbf{E}_0$  la solución para el campo eléctrico en dicho problema. Considérese ahora un problema con los mismos contornos conductores y con el medio parcialmente ocupado por dieléctricos lineales e isótropos, de modo que las fronteras de esos dieléctricos entre sí y con el vacío sean paralelas a  $\mathbf{E}_0$ . Demostrar que  $\mathbf{E}_0$  es también una posible solución del segundo problema. Demostrar que, en ese caso, los potenciales de los conductores permanecen inalterados respecto del caso vacío, pero no así su carga.

**Ejercicio:** Calcular la carga almacenada en una esfera conductora de radio  $R$  colocada a potencial  $V$  e inmersa hasta la mitad en un medio de constante dieléctrica  $\epsilon$ .

**Ejercicio:** Un condensador de placas planoparalelas de área  $A$  y separación  $d$  pequeña comparada con las dimensiones de las placas se llena hasta la mitad con un medio dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , de modo que la interfaz de separación entre ambos medios sea perpendicular a las placas. Calcular los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en cada medio cuando se

impone una diferencia de potencial  $V$  en el condensador. Calcular la capacidad del nuevo condensador. Relacionar el resultado con la conexión de dos condensadores en paralelo ¿Por qué es posible hacer esa relación?

**Ejercicio:** Enunciar y resolver dos ejercicios similares, uno con simetría cilíndrica y otro con simetría esférica.

**Ejercicio:** Dos esferas conductoras idénticas están separadas una cierta distancia en el vacío y forman un condensador de capacidad  $C_0$ . Ahora ambas esferas se sumergen hasta la mitad en un medio de constante dieléctrica  $\epsilon$ . ¿Cuanto vale la capacidad del nuevo condensador?

**Ejercicio:** Considérese un problema con contornos conductores y en un medio de permitividad igual a la del vacío. Sea  $\mathbf{E}_0$  la solución para el campo eléctrico en dicho problema. Considérese ahora un problema con los mismos contornos conductores y con el medio parcialmente ocupado por dieléctricos lineales e isótropos, de modo que las fronteras de esos dieléctricos entre sí y con el vacío sean perpendiculares a  $\mathbf{E}_0$ . Demostrar que  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$  es también una posible solución para el vector desplazamiento eléctrico del segundo problema. Demostrar que en ese caso las cargas de los conductores permanecen inalteradas respecto del caso vacío, pero no así sus potenciales.

**Ejercicio:** Calcular el potencial electrostático de un esfera conductora de radio  $R$  que contiene una carga  $Q$  y que se halla rodeada por un cascarón aislante de constante dieléctrica  $\epsilon$  y radios interior y exterior  $R$  y  $R_e > R$  respectivamente.

**Ejercicio:** Un condensador de placas planoparalelas de área  $A$  y separación  $d$  pequeña comparada con las dimensiones de las placas se llena hasta la mitad con un medio dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , de modo que la interfaz de separación entre ambos medios sea paralela a las placas. Calcular los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en cada medio cuando se impone una diferencia de potencial  $V$  en el condensador. Calcular la capacidad del nuevo dispositivo. Poner el resultado en relación con la conexión de condensadores en serie. ¿Por qué puede hacerse esta comparación?

**Ejercicio:** Enunciar y resolver dos ejercicios similares, uno con simetría cilíndrica y otro con simetría esférica.

**Ejercicio:** Dos esferas conductoras idénticas están separadas una cierta distancia  $d$  en el vacío y forman un condensador de capacidad  $C_0$ . A partir de esa configuración construimos otra en la que el plano medio entre las dos esferas (a una distancia  $d/2$  de cada esfera) es la interfaz entre dos medios semiinfinitos de constantes dieléctricas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ . ¿Cuanto vale ahora la capacidad del condensador formado por las dos esferas?

El método de las imágenes, estudiado en el tema anterior, es de escasa utilidad en el caso de medios dieléctricos (hay una sola excepción: una carga puntual frente a un plano dieléctrico semiinfinito), debido a que las cargas superficiales de polarización distorsionan la solución para  $\mathbf{E}$  de modo que no puede reproducirse mediante un conjunto simple de cargas puntuales.

El método de separación de variables es útil siempre que las interfaces de separación entre dieléctricos tengan la geometría adecuada.

**Ejercicio:** Resolver la ecuación de Laplace bidimensional en el interior de una caja rectangular, rellena hasta la mitad por un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , todas cuyas caras están a tierra, excepto una de ellas que está a potencial  $V$ .

**Ejercicio:** Calcular el campo eléctrico y el potencial creados por una esfera de radio  $R$  y de permitividad  $\epsilon$  colocada en un campo externo  $\mathbf{E}_0$  uniforme.

**Ejercicio:** En el plano medio de un condensador de placas planoparalelas circulares de radio  $a$  y separación  $d \ll a$ , se coloca una esfera dieléctrica de radio  $R \ll d$ . Utilizando el resultado del ejercicio anterior, calcular aproximadamente la capacidad del nuevo condensador.

**Ejercicio:** Calcular el campo eléctrico y el potencial creados por una cilindro infinito dieléctrico de radio  $R$  y permitividad  $\epsilon$  colocado en un campo externo  $\mathbf{E}_0$  uniforme y perpendicular al eje del cilindro.

Los métodos aproximados como el de las diferencias finitas, pueden adaptarse fácilmente a la presencia de medios dieléctricos lineales e isótropos, para lo que basta con introducir de alguna forma las condiciones de contorno en las interfaces. Finalmente, los métodos variacionales siguen siendo válidos, ya que los teoremas que los sustentan lo son también.

9. **Trabajo necesario para crear un campo eléctrico en presencia de medios aislantes. Energía:** Supongamos un sistema de conductores en un medio inhomogéneo y aislante. Para crear un campo eléctrico hay que traer carga desde el infinito ( $V = 0$ ) hasta los conductores que estarán a un determinado potencial. El trabajo necesario para llevar las cargas  $\delta Q_i$  desde infinito al potencial  $V_i$  de cada conductor  $i$ -ésimo es:

$$\delta W = \sum V_i \delta Q_i = \sum P_{i,j} Q_j \delta Q_i \quad (133)$$

expresión que, haciendo uso de (123) junto con (131) y la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{D}) \equiv \nabla \phi \cdot \mathbf{D} + \phi \nabla \cdot \mathbf{D}$  puede transformarse en la integral:

$$\delta W = \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} d\mathcal{V} \quad (134)$$

extendida a todo el volumen ocupado por el campo.

**Ejercicio:** Demostrar (134) a partir de (133).

El trabajo total para generar el campo será la integral:

$$W = \int_{\mathbf{E}=0}^{\mathbf{E}} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} d\mathcal{V} \quad (135)$$

El trabajo total, dado por (135), se ha calculado suponiendo implícitamente que el proceso es cuasiestático, ya que sólo en ese caso resultan rigurosamente válidas las ecuaciones de

la electrostática, luego en la práctica representa la cantidad mínima de energía que es necesario invertir para crear el campo (proceso cuasiestático reversible).

La integración de (135) solo puede realizarse fácilmente en determinadas condiciones. Si el medio es lineal, con una constante dieléctrica que puede considerarse constante con independencia del proceso seguido para cargar los conductores, la integración es trivial y lleva a:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon |\mathbf{E}|^2 d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\mathcal{V} = U_E \quad (136)$$

donde  $U_E$  es la energía electrostática almacenada en el medio, que por definición es igual al trabajo necesario para crear el campo electrostático  $\mathbf{E}$  en presencia del medio dieléctrico. Nótese que, en (136) hemos incluido  $\epsilon$  dentro de la integral, ya que  $\epsilon$ , aunque constante en cada punto durante el proceso, puede ser una función de la posición (medios inhomogéneos).

La constancia de  $\epsilon$  a lo largo del proceso también implica la constancia de los coeficientes de potencial  $P_{i,j}$ . Esto permite integrar directamente la segunda igualdad de (133), lo que lleva de inmediato a (99), que también resulta válida, por tanto, en el caso de un sistema de conductores inmerso en un medio dieléctrico lineal e isótropo.

Finalmente, los teoremas variacionales para la carga (Teorema de Thompson) y el potencial, se generalizan sin dificultad.

**Ejercicio:** *Demostrar que el teorema variacional para la carga de una sistema de conductores en el vacío (teorema de Thompson) es también válido para un sistema de conductores inmersos en un medio dieléctrico lineal e isótropo, homogéneo a trozos.*

**Ejercicio:** *Demostrar que el teorema variacional para el potencial de una sistema de conductores en el vacío es también válido para un sistema de conductores inmersos en un medio dieléctrico lineal e isótropo, homogéneo a trozos.*

10. **Tema avanzado: Interpretación termodinámica de  $U_E$ :** La hipótesis de un medio dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  constante e independiente de las variables termodinámicas como presión, temperatura, densidad, etc... no es, evidentemente, realista. En la práctica, para la gran mayoría de las sustancias,  $\epsilon$  es una función de la temperatura y de la densidad. Ello quiere decir que sólo en un proceso a temperatura y densidad (o volumen) constantes la integración de (135) lleva a (136). Así pues,  $U_E$  no es sino el trabajo necesario para crear el campo en un proceso a temperatura y volumen constante. Este trabajo coincide, como veremos, con el incremento de energía libre del sistema, de modo que  $U_E$  no es sino el incremento de energía libre del sistema debido a la presencia del campo. Sólo si despreciamos la variación de  $\epsilon$  con la temperatura o el volumen de las sustancias que constituyen el medio, así como los fenómenos de contracción (electrostricción) durante el proceso, carece de sentido diferenciar entre el incremento de energía libre y el incremento de energía interna y podemos hablar de  $U_E$  como la "energía electrostática del medio", sin mayores precisiones.

Para demostrar que el trabajo necesario para crear el campo en un proceso a temperatura y volumen constante coincide con el incremento de la energía libre del sistema, consideremos la variación de la energía libre  $\mathcal{F} \equiv U - TS$  del sistema. La variación de la energía interna en un proceso cuasiestático como el que estamos considerando es, por definición,  $\delta U = \delta Q + \delta W = T\delta S - P\delta V + \delta W_e$ , donde hemos diferenciado el trabajo de compresión  $-P\delta V$  del trabajo eléctrico  $\delta W_e$  dado por (134). Sustituyendo esta última expresión en la expresión de  $\mathcal{F}$ , obtenemos finalmente  $\delta\mathcal{F} = -S\delta T - P\delta V + \delta W_e$ , que en un proceso a temperatura y volumen constantes se reduce a  $\delta\mathcal{F} = \delta W_e$ , es decir, a (134).

11. **Trabajos virtuales y fuerzas:** Aunque ya hemos indicado que no es un hipótesis realista, en muchos casos resulta suficiente considerar el medio dieléctrico como un medio incompresible con una constante dieléctrica independiente de la temperatura. En ese caso las expresiones (107) – (109) se generalizan directamente al caso de conductores inmersos en un medio dieléctrico lineal e isótropo, dado que las expresiones para la energía (99) también resultan válidas en ese caso. Hay que indicar, en todo caso, que el concepto de desplazamiento virtual, en este caso, se generaliza a desplazamientos no sólo de los conductores, sino también de los dieléctricos.

**Ejercicio:** *Calcular la altura a la que sube un dieléctrico líquido de constante dieléctrica  $\epsilon$  y densidad de masa  $\rho_m$  entre las placas de un condensador de placas paralelas, colocado perpendicularmente a la superficie del líquido.*

**Ejercicio:** *Demostrar que la fuerza entre dos pequeñas esferas de carga inmersas en un líquido dieléctrico viene dada por  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , donde  $q$  es la carga libre sobre la esfera y  $\mathbf{E}$  el campo eléctrico debido a la otra esfera. Este ejercicio muestra que es el campo eléctrico y la carga libre (no la de polarización) la que contribuye a la fuerza.*

**Ejercicio:** *Dos esferas conductoras de radio  $R$  flotan hasta su mitad en un medio dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , separadas por una distancia  $d$ . Utilizando resultados de ejercicios anteriores, calcular aproximadamente la fuerza de atracción entre dichas esferas cuando una de ellas se coloca a potencial  $V/2$  y al otra a potencial  $-V/2$ .*

**Ejercicio:** *Repetir el ejercicio cuando ambas esferas están al mismo potencial  $V$ .*

## Segunda parte: Conducción en el estado estacionario

1. **Conducción en el estado estacionario, ley de Ohm:** Cuando se aplica una diferencia de potencial entre dos puntos de un cuerpo conductor, aparece una corriente  $\mathbf{J}$ . Si la diferencia de potencial es constante, se alcanza al cabo de cierto tiempo un *estado estacionario*. De la ecuación de conservación de la carga se deduce que, en dicho estado:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (137)$$

Este estado estacionario no es un estado de equilibrio termodinámico, ya que se está realizando un trabajo por unidad de volumen a una razón dada por:

$$\frac{\delta w}{\delta t} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (138)$$

Si esta cantidad es positiva se está transfiriendo energía del campo al medio, y si es negativa ocurre a la inversa.

La relación más sencilla entre  $J$  y  $E$  viene dada por la ley de proporcionalidad, o ley de Ohm:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (139)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad.

El paso de una corriente eléctrica a través de un conductor de conductividad  $\sigma$ , disipa una energía (produce calor) por unidad de tiempo y de volumen:

$$\frac{\delta w}{\delta t} = \frac{\delta q}{\delta t} = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} = \sigma |\mathbf{E}|^2 = T \frac{ds}{dt} \quad (140)$$

resultado que se conoce como efecto Joule. Hay que hacer hincapié en que (140) expresa la producción total de energía (en forma de calor) por unidad de volumen (derivada total respecto a  $t$ ) y no la variación de la densidad de energía en un punto fijo (derivada parcial), en cuyo caso habría que restar el flujo de energía que sale de dicho punto.

**Ejercicio:** *Demostrar que, en un medio óhmico en el estado estacionario, se cumple que  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\zeta \nabla T)$ , donde  $\zeta$  es la conductividad térmica, definida por  $\mathbf{J}_q = -\zeta \nabla T$ , donde  $\mathbf{J}_q$  es el flujo de calor. Nota: En este ejercicio se desprecian los efectos electro-térmicos que se verán en la asignatura optativa "Electromagnetismo en la Materia".*

2. **Ecuaciones para los campos y condiciones de contorno para el estado estacionario en medios que satisfacen la ley de Ohm:** Las ecuaciones en el estado estacionario serán:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \phi \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \end{aligned} \quad (141)$$

donde la última ecuación se deduce de (137) y (139) y significa que en el interior de un medio que satisface la ley de Ohm, no se generan densidades de carga libre estacionarias.

Las condiciones de contorno en la interfaz entre dos medios conductores se deducen de (137) y de la primera ecuación en (141):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\sigma_2 \mathbf{E}_2 - \sigma_1 \mathbf{E}_1) = 0 & \rightarrow \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 & \rightarrow \phi_2 - \phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (142)$$

Un caso particular de interés de estas relaciones es aquél en que uno de los medios es conductor perfecto ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). En ese caso se cumple que:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \phi = V \quad (143)$$

donde  $\mathbf{n}$  apunta hacia el exterior del conductor y  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico en el exterior del conductor.

**Ejercicio:** *Considérese la frontera entre dos medios de conductividades  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  y polarizables con constantes dieléctricas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ . Demostrar que, en el estado estacionario, no se generan densidades de carga libre de volumen y que en la interfase entre dichos medios, la densidad de carga libre superficial viene dada por:*

$$\sigma_s = \mathbf{n} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \quad (144)$$

Nótese que las ecuaciones (141) – (143) son en todo análogas a las ecuaciones (128) – (130) para medios aislantes (es decir sin densidades de carga libre volumétrica o superficial), excepto en que el papel de  $\epsilon$  lo juega ahora  $\sigma$ . Es decir, las ecuaciones de la conducción en el estado estacionario en medios óhmicos son isomorfas a las ecuaciones de la electrostática en un conjunto de conductores inmersos en un medio aislante, si hacemos el cambio  $\epsilon \rightarrow \sigma$ . En particular, la integral

$$I = \oint_{\Sigma} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (145)$$

que nos da la intensidad que sale de la superficie cerrada  $\Sigma$ , resulta ser isomorfa de la carga encerrada por esa misma superficie en el caso de conductores en un medio aislante:

$$Q = \oint_{\Sigma} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

**Ejercicio:** *Demostrar que en un conductor perfecto, rodeado de un medio óhmico polarizable de constantes  $\sigma$  y  $\epsilon$ , se cumple que, en el estado estacionario  $I \neq 0 \Rightarrow Q = (\epsilon/\sigma)I$ , donde  $Q$  e  $I$  son la carga y la intensidad saliente del conductor, respectivamente.*

Otro caso particular interesante de (142) es aquel en el que la interfaz separa un medio óhmico de un aislante ( $\sigma = 0$ ). En tal caso, de (142) se sigue que:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (147)$$

donde  $\mathbf{E}$ ,  $\phi$  son el campo y el potencial en el medio óhmico y  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal a la interfaz. La condición de contorno (147) es la condición de contorno de Neumann, definida en el Tema II. Del teorema de unicidad se deduce por tanto que el campo y el potencial en una región que contiene medios óhmicos y conductores perfectos, rodeada de aislantes, el campo y el potencial quedan unívocamente determinados exclusivamente por los potenciales o las cargas de los conductores perfectos incluidos en dicha región (salvo, a lo sumo, una constante aditiva para el potencial)

3. **Matriz de resistencias. Resistencia eléctrica:** Consideremos un conjunto de  $N$  conductores perfectos o "electrodos" ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) en un medio inhomogéneo de conductividad

$\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ . Al igual que podemos encontrar una relación lineal entre las cargas y los potenciales de los electrodos en el estado estacionario, a través de la matriz de coeficientes de potencial, es posible encontrar una relación análoga entre las intensidades que salen de cada electrodo:

$$I_i = \oint_i \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds \quad (148)$$

y los potenciales de los mismos en el estado estacionario, a través de una matriz denominada matriz de resistencias:

$$V_i = \sum_{j=1}^N R_{i,j} I_j \quad (149)$$

**Ejercicio:**  *Demostrar que si el medio entre los electrodos es homogéneo, de conductividad  $\sigma$  y permitividad  $\epsilon$  uniformes, entonces  $R_{i,j} = \frac{\epsilon}{\sigma} P_{i,j}$*

La matriz de resistencias es formalmente isomorfa a la matriz de coeficientes de potencial del mismo sistema de electrodos en un medio aislante de permitividad  $\epsilon(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})$ . Ello demuestra que las propiedades de la matriz  $P_{i,j}$  estudiadas en el Tema II pueden trasladarse a la matriz  $R_{i,j}$ . En particular  $R_{i,j}$  debe ser simétrica.

Sin embargo, entre las matrices  $P_{i,j}$  y  $R_{i,j}$  hay importantes diferencias. En primer lugar la conservación de la carga exige que, e cualquier estado estacionario con  $I_i \neq 0$ , existan fuentes exteriores de carga que la suministren a los conductores. Estas fuentes de carga o generadores quedan fuera del ámbito de estudio de la electrostática. Por otro lado, dado que la conductividad de un medio puede anularse (medio aislante), algo que no sucede con la permitividad, puede ocurrir que algunos elementos de la matriz  $R_{i,j}$  tiendan a infinito, lo que corresponde a una situación en la que no hay un camino físico para que la corriente eléctrica discorra entre los conductores  $i$  y  $j$ . En ese caso  $R_{i,j}$  resulta ser una matriz singular, algo que no ocurre con  $P_{i,j}$ .

**Nota:** Cuando el sistema está rodeado completamente por medios aislantes, de modo que no hay fugas de corriente al infinito, se suele imponer la condición de que uno de los electrodos del sistema (la "masa." "tierra") está a potencial cero. Tenemos entonces  $N+1$  electrodos de los cuales  $N$  están a potenciales variables y uno a potencial cero constante. En esas condiciones también resulta válida (149), siendo  $R_{i,j}$  la matriz de resistencias de los  $N$  electrodos a potencial variable "en presencia de la masa". Formalmente ello equivale a considerar el conductor a masa como formando parte, junto con el infinito, de las condiciones de contorno del sistema. Ello no invalida el isomorfismo entre  $P_{i,j}$  y  $R_{i,j}$ , siempre que  $P_{i,j}$  se defina como la matriz de coeficientes de potencial del sistema de  $N$  conductores, con el  $N+1$  a masa y se realice el cambio  $\sigma \rightarrow \epsilon$ . Es obvio que en las circunstancias descritas, en las que no hay fugas de intensidad al infinito, la intensidad que sale de la masa es igual a la suma de las restantes intensidades cambiada de signo.

**Ejercicio:**  *Sea  $R_{i,j}$  la matriz de resistencias de un sistema de conductores. ¿Cuanto deben valer los potenciales  $V_k$  de los conductores para que sólo circule una corriente  $I_m$  entre el conductor  $m$ -ésimo y la tierra, siendo nula la intensidad total que sale de los demás conductores?. Este ejercicio puede ayudar a comprender el sentido físico de  $R_{i,j}$ .*

**Ejercicio:** Demostrar que el calor disipado por efecto Joule vale

$$\delta Q/\delta t = \sum_{i,j} I_i R_{i,j} I_j \quad (150)$$

**Ejercicio:** Calcular el único elemento de la matriz de resistencias  $R$  de una esfera inmersa hasta la mitad en un medio semiinfinito de conductividad  $\sigma$ . ¿Cambia el resultado si consideramos un electrodo semiesférico en lugar de esférico, de modo que la parte sumergida sea idéntica al caso anterior?

Si tenemos dos electrodos conectados por un medio resistivo, la resistencia entre ambos se define como el cociente entre la diferencia de potencial entre ambos electrodos y la intensidad que circula entre ellos, en una configuración en la que la intensidad que sale de uno de es igual a la que entra en el otro (es decir, no hay fugas de corriente hacia el infinito):

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I_1} = -\frac{V_1 - V_2}{I_2} = \frac{\Delta V}{|I|} \quad (151)$$

**Ejercicio:** Demostrar que dado un sistema de dos electrodos inmersos en un medio inhomogéneo de conductividad  $\sigma(\mathbf{r})$ , la resistencia del sistema es formalmente igual al inverso de la capacidad del mismo sistema de conductores inmerso en un medio con  $\epsilon(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})$ .

**Ejercicio:** Hallar las reglas de composición para resistencias en serie y en paralelo.

**Ejercicio:** Demostrar la fórmula elemental para la resistencia de un cable de longitud  $l$ , sección  $S$  y conductividad  $\sigma$ :

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (152)$$

**Ejercicio:** Considérese un problema con contornos conductores y en un medio de permitividad igual a la del vacío. Sea  $\mathbf{E}_0$  la solución para el campo eléctrico en dicho problema. Considérese ahora un problema con los mismos contornos conductores perfectos ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) y con el medio parcialmente ocupado por medios óhmicos diferentes, de modo que las fronteras de esos medios entre sí y con el vacío sean paralelas a  $\mathbf{E}_0$ . Demostrar que  $\mathbf{E}_0$  es también una posible solución del segundo problema. Demostrar que, en ese caso, los potenciales de los conductores permanecen inalterados respecto del caso vacío.

**Ejercicio:** Un condensador de placas planoparalelas de área  $A$  y separación  $d$  pequeña comparada con las dimensiones de las placas se llena hasta la mitad con un medio óhmico de permitividad  $\sigma_1$ , y la otra mitad con un medio óhmico de permitividad  $\sigma_2$ , de modo que la interfaz de separación entre ambos medios sea perpendicular a las placas. Calcular los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  en cada medio cuando se impone una diferencia de potencial  $V$  entre las placas en el estado estacionario. Calcular la resistencia del dispositivo. Relacionar el resultado con la conexión de dos resistencias en paralelo ¿Por qué es posible hacer esa relación?

**Ejercicio:** Enunciar y resolver dos ejercicios similares, uno con simetría cilíndrica y otro con simetría esférica.

**Ejercicio:** Dos esferas conductoras idénticas están separadas una cierta distancia en el vacío y forman un condensador de capacidad  $C_0$ . Ahora ambas esferas se sumergen hasta la mitad en un medio de óhmico de conductividad  $\sigma$ . ¿Cuanto vale la resistencia del nuevo dispositivo?

**Ejercicio:** Considérese un problema con contornos conductores y en un medio de permitividad igual a la del vacío. Sea  $\mathbf{E}_0$  la solución para el campo eléctrico en dicho problema. Considérese ahora un problema con los mismos contornos conductores perfectos y con el medio parcialmente ocupado por medios óhmicos con  $\sigma_i \neq 0$ , de modo que las fronteras de esos medios entre sí y con el vacío sean perpendiculares a  $\mathbf{E}_0$ . Demostrar que  $\mathbf{J} = K\mathbf{E}_0$ , con  $K$  constante, es también una posible solución para el vector densidad de corriente del segundo problema.

**Ejercicio:** Un condensador de placas planoparalelas de área  $A$  y separación  $d$  pequeña comparada con las dimensiones de las placas se llena hasta la mitad con un medio óhmico de conductividad  $\sigma_1$ , llenándose la otra mitad de un medio óhmico de conductividad  $\sigma_2$ , de modo que la interfaz de separación entre ambos medios sea paralela a las placas. Calcular los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  en cada medio cuando se impone una diferencia de potencial  $V$  entre las placas. Calcular la resistencia del dispositivo. Relacionar el resultado con la conexión de dos resistencias en serie ¿Por qué es posible hacer esa relación?

**Ejercicio:** Enunciar y resolver dos ejercicios similares, uno con simetría cilíndrica y otro con simetría esférica.

El sistema de dos electrodos conectados a su vez por un conductor perfecto ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) tiene evidentemente resistencia nula. Ello quiere decir, de acuerdo con (151), que puede soportar una corriente no nula en ausencia de potencial aplicado. Tampoco disipa potencia, de acuerdo con (150).

La relación (149) se puede invertir, dando:

$$I_i = \sum_{j=1}^N G_{i,j} V_j \quad (153)$$

donde  $G_{i,j}$  es la matriz de conductancias, que resulta isomorfa a  $C_{i,j}$  y que, cuando  $R_{i,j}$  no es singular, coincide con la inversa de  $R_{i,j}$ .

- Circuitos de corriente continua. Generadores. Leyes de Kirchoff:** Un circuito de corriente continua es un conjunto de resistencias y "generadores" conectados entre sí y rodeados de un medio aislante, por los que pueden circular uno o más bucles cerrados de corriente. De acuerdo con la condición de frontera en el límite del circuito (147) (ver comentario bajo dicha expresión), el campo y, por tanto, la corriente en el interior del circuito queda determinada unívocamente por las tensiones impuestas a lo largo del circuito.

Si las resistencias cumplen la ley de Ohm, en cada resistencia se disipa potencia a una razón dada por

$$\delta Q/\delta t = RI^2 \quad (154)$$

La energía  $\delta W$  disipada por una carga elemental  $q$  al describir un bucle de corriente vendrá dada por:

$$\frac{\delta W}{\delta q} = \oint \left( \frac{\mathbf{F}}{q} \right) \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad (155)$$

El segundo término de (155) es el trabajo por unidad de carga realizado por el campo, o la fuerza electromotriz (f.e.m.) proporcionada por los generadores a lo largo de ese bucle de corriente. La f.e.m. depende del sentido del camino de integración, por lo que es preciso especificar éste en la definición.

Es evidente que si  $\mathbf{E}$  fuera un campo puramente electrostático,  $\mathcal{E} = 0$ . De modo que en los circuitos debe haber zonas donde estén presente campos de naturaleza no electrostática. Cuando los campos no electrostáticos están localizados en determinados dispositivos, esos dispositivos se denominan *generadores*.

La f.e.m. proporcionada por un generador se puede obtener midiendo la diferencia de potencial electrostático entre sus bornes  $V_A - V_B$  a circuito abierto. En efecto, al ser  $\mathbf{J} = 0$ , los campos dentro del generador se anulan, a consecuencia de la ley de Ohm, por lo que la f.e.m. coincide con la diferencia de potencial electrostática.

**Ejercicio:** *Demostrar que, cuando por el circuito circula una intensidad  $I$ , entonces*

$$\mathcal{E} = V_A - V_B + R_g I \quad (156)$$

donde  $R_g$  es la resistencia interna del generador.

Las leyes de Kirchoff permiten resolver circuitos de corriente. Su enunciado es el siguiente:

- La suma de las intensidades (con su signo) que confluyen en un nudo es cero
- La suma de las caídas de potencial a lo largo de las resistencias que forman un bucle (incluidas las resistencias internas de los generadores), es igual a la suma de las f.e.m. de los generadores incluidos en el bucle.

### Tercera parte: Cuasielectrostática, relajación al equilibrio

#### 1. Relajación de la densidad de carga y ecuaciones para el campo y el potencial:

Consideremos una densidad de carga libre  $\rho$  en el seno de un medio conductor. A partir de la conservación de la carga y de la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$  obtenemos la ecuación de difusión para la carga:

$$\rho + \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (157)$$

ecuación cuya solución es:

$$\rho(t) = \rho_f + (\rho_i - \rho_f)e^{-t/\tau} ; \tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (158)$$

donde  $\rho_i$  y  $\rho_f$  son las densidades de carga en el estado inicial y final respectivamente y  $\tau$  es el *tiempo de relajación*. Este tiempo  $\tau = \epsilon/\sigma$ , característico del medio, es el que nos determina su carácter de aislante o conductor en función de la escala de tiempos del experimento. Así si  $\tau$  es grande comparado con la escala de tiempo, el medio podrá considerarse un aislante. Por el contrario si  $\tau$  es del orden o menor que la escala de tiempos, el medio deberá considerarse conductor.

Nótese que si en el instante inicial  $t = 0$  la densidad de carga es cero y no se impone ninguna restricción al estado final, la densidad de carga sigue siendo nula en todo momento, según (158). En el caso medios óhmicos evolucionando entre dos estados estacionarios ( $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ), las densidades de carga volumétrica inicial y final son ambas cero, de modo que también en el transitorio se cumple que  $\rho(t) = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .

En general las ecuaciones para el campo son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 ; \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho(t) \quad (159)$$

siendo la ecuación para el potencial la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon} \rho(t) \quad (160)$$

que en el caso de medios óhmicos evolucionando entre dos estados estacionarios se reducen a:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 ; \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (161)$$

siendo la ecuación para el potencial la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (162)$$

La solución particular vendrá determinada por las condiciones de contorno, que en la frontera entre dos medios conductores y polarizables toma la forma de una ecuación diferencial para las componentes normales:

$$\mathbf{n} \cdot \left( \sigma_2 \mathbf{E}_2 - \sigma_1 \mathbf{E}_1 + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_2 \mathbf{E} - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) \right) = 0 \quad (163)$$

siendo la primera ecuación de (129) la condición de contorno para las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$ .

**Ejercicios:** Hallar los campos en el estado inicial ( $t = 0^+$ ) y final ( $t \rightarrow \infty$ ), así como el tiempo de relajación, para un condensador plano relleno por dos medios conductores y polarizables de constantes  $\sigma_i, \epsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ), en los siguientes casos:

- La interfaz entre ambos medios es paralela a las placas.
- La interfaz entre ambos medios es perpendicular a las placas.

y para las siguientes excitaciones:

- El condensador está sometido a una diferencia de potencial  $V_0$  en  $t = 0^-$ , y en  $t = 0$  se abre el circuito y se permite que las cargas relajen al equilibrio.
- El condensador está descargado y en  $t = 0$  se aplica una diferencia de potencial  $V_0$  entre sus placas a partir de un generador ideal ( $R_g = 0$ ).
- El condensador está sometido a una diferencia de potencia  $V_0$  en  $t = 0^-$  y en  $t = 0$  se cortocircuita el condensador mediante un cable de resistencia nula (es decir se impone una diferencia de potencial nula  $V = 0$ ).

**Ejercicio:** Hacer el balance energético de los diferentes casos estudiados en el ejercicio anterior, demostrando que la energía electrostática almacenada en el dispositivo en  $t \rightarrow \infty$  es igual a la energía almacenada en  $t = 0^+$  menos la energía disipada en forma de calor por efecto Joule más, en su caso, la energía suministrada por el generador.

**Ejercicio:** Repetir los ejercicios anteriores para condensadores de simetría cilíndrica y esférica

**Ejercicio:** Repetir los ejercicios anteriores considerando que los potenciales se imponen desde un generador no ideal ( $R_g \neq 0$ ) o que el cortocircuito se realiza a través de un cable de resistencia  $R \neq 0$

## Tema IV: El campo magnético estacionario

1. **Fuerza entre elementos de corriente:** Entre dos elementos de corriente  $I_1 d\mathbf{l}_1$  e  $I_2 d\mathbf{l}_2$  existe una fuerza que viene dada por la Ley de Ampère:

$$\delta\mathbf{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (164)$$

donde  $\delta\mathbf{F}_{1,2}$  es la fuerza que sobre el elemento 1 ejerce el elemento 2. La constante  $\mu_0$  depende del sistema de unidades, y en el S.I. vale  $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{Nw/Amp}^2$ .

La expresión (164) se puede generalizar al caso de cargas en movimiento, haciendo el cambio  $I d\mathbf{l} \rightarrow q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathcal{V}$  e integrando:

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \frac{\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (165)$$

### 2. Propiedades de la fuerza de Ampère

- La fuerza magnética entre cargas en movimiento a velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , (165), es inferior a la electrostática en el factor:

$$\frac{|\mathbf{F}_m|}{|\mathbf{F}_e|} \sim \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{c^2} \quad (166)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. No obstante, debido a la neutralidad eléctrica de la materia ordinaria, la fuerza magnética se manifiesta en el mundo macroscópico aún en ausencia de fuerza eléctrica.

- La fuerza magnética no cumple la ley de acción y reacción:

$$\delta\mathbf{F}_{1,2} + \delta\mathbf{F}_{2,1} \neq 0 \quad (167)$$

No obstante, cuando integramos (164) para dos espiras cerradas, la fuerza total sí cumple la ley de acción y reacción. Por tanto (164) sólo es coherente con los postulados de Newton en el caso de fuerzas en un sistema estacionario de espiras.

- La fuerza (165) depende de las velocidades de las partículas, por tanto no satisface el postulado de Galileo: Las fuerzas deben ser invariantes en las transformaciones de un sistema inercial a otro. Este hecho está en el origen de las transformaciones de Lorentz y de la Teoría de la Relatividad. En el marco de la teoría pre-relativista la invariancia de la fuerza de Ampère puede corregirse mediante las llamadas "transformaciones galileanas" de los campos, que constituyen una aproximación a las transformaciones de Lorentz válidas para valores pequeños de  $v/c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz (ver mas adelante).

- La fuerza (165), al ser perpendicular a la velocidad de la partícula que la recibe, no cambia la energía cinética de ésta. En general, para cualquier sistema de corrientes, la fuerza magnética (164) no realizará ningún trabajo sobre el sistema. No obstante, en sistemas no estacionarios, sí se realiza trabajo de forma indirecta, a través del campo eléctrico inducido por la Ley de Faraday (ver tema V).

**Ejercicio:** *Demostrar (166) a partir del resultado experimental  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ .*

**Ejercicio:** *Demostrar que la fuerza total entre dos espiras cerradas, obtenida por integración doble de (164), sí satisface la ley de acción y reacción. Sugerencia: usar la identidad vectorial:*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (168)$$

3. **Campo magnético:** La fuerza (164) se puede escribir como:

$$\delta\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \delta\mathbf{B} \quad (169)$$

donde  $\mathbf{B}$  es el campo magnético creado por el elemento de corriente 2 en la posición ocupada por el elemento de corriente 1:

$$\delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I(\mathbf{r}') \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (170)$$

Estas expresiones pueden generalizarse para cargas puntuales:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (171)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (172)$$

así como para el caso en que tenemos una densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , haciendo el cambio  $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J} d\mathcal{V}$ :

$$\delta\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) d\mathcal{V} \quad (173)$$

$$\delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathcal{V}' \quad (174)$$

**Ejercicio:** *Demostrar por integración directa de (170) que el campo magnético en el centro de una espira circular por la que circula una corriente  $I$  vale:*

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I}{2R} \mathbf{n} \quad (175)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al plano de la espira.

**Ejercicio:** *Demostrar por integración directa de (170) que el campo  $\mathbf{B}$  en el eje de la espira del ejercicio anterior, a una distancia  $z$  del centro vale:*

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I}{2R} \left( \frac{R^2}{x^2 + R^2} \right)^{3/2} \quad (176)$$

**Ejercicio:** Las "Bobinas de Helmholtz" es una configuración que se usa para obtener campos magnéticos constantes en una región del espacio fácilmente accesible. Consiste en dos bobinas iguales y paralelas de radio  $R$ , separadas a su vez por una distancia  $R$  y por las que circula una intensidad  $I$  en el mismo sentido en ambas. Estudiar usando (176) el campo magnético en el punto medio del eje común a ambas bobinas y demostrar que, en torno a ese punto, se anulan todas las derivadas del campo en la dirección axial hasta la cuarta derivada. (Para mas información ver Reitz - Milford pp.203 y ss.).

4. **Fuerza de Lorentz y transformaciones "galileanas" de los campos:** Consideremos una partícula de carga  $q$  sometida a la acción combinada de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y uno magnético  $\mathbf{B}$ . La fuerza total sobre la partícula será:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (177)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad de la partícula. Esta fuerzra se denomina "fuerza de Lorentz".

La fuerza de Lorentz resulta invariante ante las transformaciones de Galileo de la posición y el tiempo si para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en el sistema inicial y los campos  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$  en otro sistema inercial que se mueve a velocidad  $\mathbf{v}_0$  respecto al anterior, se postulan las siguientes transformaciones:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} ; \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad (178)$$

denominadas transformaciones "galileanas" de los campos. Estas transformaciones constituyen una aproximación a las transformaciones relativistas (transformaciones de Lorentz) válida en primer orden de  $|\mathbf{v}_0|/c$ .

**Ejercicio:** Demostrar que las transformaciones (178) hacen de la Fuerza de Lorentz (177) un invariante de Galileo

**Ejercicio:** Un cilindro dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  gira en torno a su eje a velocidad  $\omega$  en presencia de un campo  $\mathbf{B}$  uniforme paralelo al eje. Calcular las cargas de polarización inducidas en el cilindro.

**Ejercicio:** Un cascarón cilíndrico conductor inicialmente descargado, de radios interior y exterior  $a$  y  $b$  ( $b > a$ ), gira en torno a su eje a velocidad angular  $\omega$ . Calcular las densidades de carga de superficie y de volumen generadas en el conductor.

5. **Movimiento de cargas en campos magnéticos. Movimiento en campos constantes y uniformes:** De acuerdo con la expresión (171), la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad y, por tanto, no realiza trabajo ( $\delta W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = 0$ ). De ese modo, para una partícula que se mueve en el seno de un campo magnético constante en el tiempo, la energía cinética de la partícula es una constante del movimiento:

$$E_c = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 = K \quad (179)$$

y por tanto el módulo de la velocidad  $|\mathbf{v}|$  permanece constante.

Es fácil demostrar que, una carga puntual moviéndose en el plano perpendicular a un campo magnético constante y uniforme describe una circunferencia de radio  $R$  a frecuencia angular  $\omega_c$  dados por:

$$\omega_c = -\frac{q\mathbf{B}}{m} ; R = \frac{|\mathbf{v}|}{\omega_c} \quad (180)$$

donde  $\omega_c$  recibe el nombre de "frecuencia de ciclotrón". Nótese que  $\omega_c$  es una constante que no depende de la energía de la partícula. Este es el fundamento de algunos dispositivos experimentales, como el ciclotrón o el espectrógrafo de masas.

**Ejercicio:** *El ciclotrón es un acelerador de partículas que utiliza la independencia de la frecuencia de giro (180) de la velocidad. Básicamente está compuesto por dos medios cilindros huecos en forma de "D", enfrentados por su lado recto y separados una pequeña distancia. El dispositivo se coloca en un campo  $\mathbf{B}_0$  perpendicular a las bases de las "D" con una diferencia de potencial  $V = V_0 \cos(\omega_c t)$  se aplica entre las "D". Demostrar que si una partícula se emite en  $t = 0$  en el centro de una de las "D", la partícula describirá órbitas de radio cada vez mayor en el interior de ambas "D", aumentando su velocidad en cada vuelta. La eficacia del ciclotrón está limitada porque, al alcanzar la partícula velocidades relativistas, la masa en (174) se hace dependiente de la velocidad, de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, de modo que la frecuencia de giro disminuye y el acoplamiento entre ésta y  $V(t)$  desaparece.*

**Ejercicio:** *Demostrar (180) a partir de (171)*

Por otra parte, es evidente de (171) que una partícula moviéndose en dirección paralela a un campo magnético constante y uniforme no experimenta fuerza ni aceleración alguna. Por tanto concluimos que una carga puntual en un campo magnético constante y uniforme describe, en general, una hélice a la frecuencia de ciclotrón  $\omega_c$ , de radio  $R$  dado por  $R = |\mathbf{v}_t|/\omega_c$ , donde  $\mathbf{v}_t$  es la componente de la velocidad en el plano transversal a  $\mathbf{B}$ , con velocidad de traslación constante  $\mathbf{v}_p = \mathbf{v} - \mathbf{v}_t$  en la dirección paralela a  $\mathbf{B}$ .

6. **Movimiento de partículas en campos eléctricos y magnéticos constantes:** En ese caso la partícula se mueve por efecto de la fuerza de Lorentz (177).

**Ejercicio:** *Mostrar que una partícula cargada que se mueve en el seno de campos eléctrico y magnético constantes, uniformes y perpendiculares entre sí  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$ , no es desviada si su velocidad inicial vale  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 / |\mathbf{B}_0|^2$ . Este es el fundamento del "selector de velocidades", dispositivo que proporciona partículas que se mueven a una velocidad dada ( $\mathbf{v}_0$ ) independiente de su masa y/o su carga. Si a la salida de un "selector de velocidades" se hace pasar a las partículas por un campo  $\mathbf{B}_0$  uniforme, las partículas se moverán en órbitas de radio  $R = v_0/\omega_c = (m/q)(v_0/B_0)$ , de acuerdo con (180). De ese modo, el radio  $R$  de la órbita nos determina la razón carga-masa de la partícula en función de magnitudes conocidas (los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en el dispositivo). Este dispositivo se denomina "espectrógrafo de masas" se utiliza para determinar las masas de iones diferentes, separando los distintos isótopos entre sí.*

**Ejercicio:** *Estudiar el movimiento de una partícula cargada en el seno de los campos  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  del ejercicio anterior para cualquier velocidad de la partícula. Demostrar que*

tal movimiento es la composición de un movimiento de traslación a velocidad constante  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 / |\mathbf{B}_0|$  y uno de rotación en el plano perpendicular a  $\mathbf{B}_0$ , que se realiza a la frecuencia de ciclotrón (180). Sugerencia: colocarse en el sistema inercial que se mueve a la velocidad  $\mathbf{v}_0$ .

De los ejercicios anteriores se deduce que el movimiento de una partícula en campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  arbitrarios resulta ser la composición del movimiento descrito en el último ejercicio y un movimiento uniformemente acelerado en la dirección de  $\mathbf{E}_p$ , la componente de  $\mathbf{E}$  paralela a  $\mathbf{B}$ .

7. **Movimiento de partículas en un campo eléctrico central y un campo magnético uniforme. Frecuencia de Larmor:** La mecánica clásica nos dice que cuando una partícula se mueve bajo el influjo de fuerzas centrales, el movimiento se realiza en un plano, siendo el momento angular de la partícula respecto del centro de fuerzas,  $\mathbf{L}$ , una constante del movimiento. Cuando además existe un campo  $\mathbf{B}$  uniforme, la partícula se mueve bajo el influjo de la fuerza de Lorentz (177) y  $\mathbf{L}$  ya no es una constante del movimiento. Nos preguntamos acerca de cómo varía  $\mathbf{L}$  y de si es posible definir otra constante del movimiento análoga a  $\mathbf{L}$ .

En el caso de que  $\mathbf{B}$  sea perpendicular a la órbita de la partícula, puede demostrarse que existe una nueva constante del movimiento, el momento angular generalizado, dado por:

$$\mathbf{L}_g = \mathbf{L} + \frac{1}{2}qr^2\mathbf{B} \quad (181)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el radiovector de la partícula respecto del centro de fuerzas. En ese caso, de (181) se deduce que el movimiento de la partícula sigue estando contenido en un plano (perpendicular a  $\mathbf{B}$ ).

**Ejercicio:** Demostrar la constancia de  $L_g$  en la situación indicada. Sugerencia: Usar la identidad  $\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}$ .

Generalizaremos ahora  $\mathbf{L}_g$  al caso de campos  $\mathbf{B}$  dirigidos arbitrariamente. La generalización adecuada es (la justificación de esta generalización se basa en la formulación hamiltoniana del electromagnetismo, que queda mas allá del objeto de esta asignatura):

$$\mathbf{L}_g = \mathbf{L} - \frac{1}{2}q\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \quad (182)$$

que puede comprobarse que coincide con (181) para el caso particular de  $\mathbf{B}$  perpendicular al plano de la órbita, usando la identidad  $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{B}$ . La ecuación del movimiento para  $\mathbf{L}_g$  resulta ser:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_g = -\frac{q}{2m}\mathbf{B} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L} \quad (183)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{q}{2m}\mathbf{B}$  es la "frecuencia de Larmor".

**Ejercicio:** Demostrar (183). Sugerencia: usar la identidad  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} \equiv \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ .

De (183) se deducen que la componente de  $\mathbf{L}_g$  paralela a  $\mathbf{B}$  es una constante del movimiento.

Cuando, como sucede a menudo, el campo aplicado  $\mathbf{B}$  es débil, de modo que  $\mathbf{L}_g \simeq \mathbf{L}$ , la ecuación (181) se reduce a:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} \simeq -\frac{q}{2m}\mathbf{B} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L} \quad (184)$$

es decir, al aplicar un campo magnético débil a un sistema de cargas sometido a una fuerza central, su momento angular precesa en torno al campo magnético aplicado a la frecuencia de Larmor, manteniéndose su módulo aproximadamente constante.

**Ejercicio:** *Supóngase un electron orbitando en torno a un núcleo a una distancia  $R$  del mismo bajo el influjo de la fuerza de atracción electrostática. Aplicamos ahora un campo magnético uniforme perpendicular a la órbita  $\mathbf{B}$ , manteniendo constante el radio de ésta  $R$ . Demostrar que si la frecuencia de giro era  $\omega_0$  cuando  $\mathbf{B} = 0$ , la nueva frecuencia de giro para  $\mathbf{B} \neq 0$  será  $\omega \pm |\omega_L|$ , siendo  $\omega_L$  la frecuencia de Larmor. Éste es el fundamento de la teoría clásica del diamagnetismo.*

**Ejercicio:** *Mostrar que  $\mathbf{L}_g$  dado por (181) es también una constante del movimiento para cargas puntuales moviéndose en un campo eléctrico de simetría cilíndrica, siendo  $r$  la distancia perpendicular al eje de simetría del campo.*

**Ejercicio:** *Considérese un electrodo cilíndrico de radio  $a$  a potencial  $-V$ , rodeado de otro electrodo cilíndrico de radio interior  $b$  colocado a tierra ( $V = 0$ ). El electrodo a potencial  $-V$  se calienta de modo que emite electrones por emisión termoiónica, pudiéndose considerar la velocidad inicial de éstos electrones prácticamente cero. Todo el sistema se coloca en un campo magnético  $\mathbf{B}$  uniforme, paralelo al eje de los electrodos cilíndricos. Utilizando el resultado del ejercicio anterior calcular el valor de  $\mathbf{B}$  necesario para que los electrones emitidos por el electrodo a potencial negativo no lleguen a alcanzar el electrodo exterior. Sugerencia: dado que la fuerza magnética no realiza trabajo, el principio de conservación de la energía establece que la energía total  $\frac{1}{2}mv^2 - e\phi$  es una constante del movimiento, al igual que  $\mathbf{L}_g$ .*

8. **Ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno:** De la definición de  $\mathbf{B}$  (174):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathcal{V}' \quad (185)$$

mediante cálculo directo se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (186)$$

Igualmente, de (185) junto a la condición de estado estacionario para la corriente,  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , se obtiene que:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (187)$$

que puede expresarse también en forma integral utilizando el teorema de Stokes (23):

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_C \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = I_C \quad (188)$$

donde  $C$  es una curva cerrada cualquiera.

**Ejercicio:** *Obtener (186) a partir de (185). Sugerencia: usar la identidad vectorial:*

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (189)$$

**Ejercicio:** *Demostrar, a partir de la definición (185) que  $\mathbf{B}$  puede escribirse también como:*

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (190)$$

*Sugerencia: usar el resultado:*

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (191)$$

**Ejercicio:** *Demostrar (187) a partir de (190). Sugerencia: utilizar la identidad vectorial:*

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (192)$$

La ecuación (187) se conoce también como “Ley de Ampère”. Su validez está limitada al estado estacionario, pues si la extendemos a estados no estacionarios llegamos a una contradicción con el principio de conservación de la carga (17). En efecto, de la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \equiv 0$  y de (187) se deduce que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , lo que está en contradicción con (17) excepto cuando  $\partial\rho/\partial t = 0$ .

En muchos problemas aparecen láminas de corriente que pueden expresarse como corrientes superficiales definidas sobre una superficie dada. Para resolver las ecuaciones de la magnetostática (186) y (187) en ese caso, necesitamos conocer las condiciones de contorno para  $\mathbf{B}$  a ambos lados de la lámina de corriente. Designemos mediante el vector  $\mathbf{K}$  dicha corriente superficial. De (186) en forma integral se deduce que, a ambos lados de  $\mathbf{K}$  debe ser:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0 \quad (193)$$

donde los superíndices  $+$  y  $-$  indican las caras superior e inferior de la lámina de corriente y el vector unitario  $\mathbf{n}$  apunta de la cara inferior a la superior.

Análogamente, de (187) en su forma integral se deduce que:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = \mu_0 \mathbf{K} \quad (194)$$

**Ejercicio:** Demostrar, usando la Ley de Ampère en forma integral (188) que el campo de un hilo de corriente recto infinito vale:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \mathbf{n}_\phi \quad (195)$$

donde hemos usado coordenadas cilíndricas en torno al hilo.

**Ejercicio:** Demostrar, usando la Ley de Ampère en forma integral (188), que el campo  $\mathbf{B}$  de un solenoide recto infinito vale

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{n}_z \quad (196)$$

en el interior del solenoide y  $\mathbf{B} = 0$  en el exterior, siendo  $n$  el número de espiras por unidad de longitud,  $I$  la intensidad que circula por el solenoide y donde hemos usado coordenadas cilíndricas en torno al eje del solenoide.

**Ejercicio:** Demostrar usando (176) que el campo magnético en el punto medio del eje de un solenoide finito de  $N$  vueltas y longitud  $L$  vale:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{NI}{L} \left( \frac{L}{(L^2 + 4R^2)^{1/2}} \right) \mathbf{n}_z \quad (197)$$

9. **Potencial Vector:** De (186) se deduce que  $\mathbf{B}$  puede escribirse como el rotacional de un potencial vector  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (198)$$

Si observamos de nuevo (190) vemos que una posible definición para  $\mathbf{A}$  es:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (199)$$

Obsérvese la analogía formal con la expresión para el potencial electrostático de una distribución de carga.

Esta no es la única definición posible, ya que según (198) podemos añadir a  $\mathbf{A}$  el gradiente de una función escalar arbitraria, sin que varíe el resultado para  $\mathbf{B}$ . Dicho de otro modo, (198) no define completamente a  $\mathbf{A}$ . Para definir  $\mathbf{A}$  unívocamente es preciso fijar su divergencia. En magnetostática se suele postular *de modo arbitrario* que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (200)$$

aunque existen otras posibilidades.

**Ejercicio:** Demostrar que (199) cumple la condición (200), siempre y cuando se cumpla condición de estado estacionario para  $\mathbf{J}$  ( $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ) y  $\mathbf{J}$  esté localizada ( $\mathbf{J} = 0$  en el infinito).

La ecuación diferencial para  $\mathbf{A}$  se puede deducir de (198) y de la ley de Ampère (187), con la condición adicional (200). El resultado es:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (201)$$

Obsérvese la analogía formal con la ecuación de Poisson de la electrostática.

10. **Potencial escalar** Sea una región en la que  $\mathbf{J} = 0$ , entonces (187) se transforma en  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , de modo que podemos escribir (en esa región):

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi_m \quad (202)$$

donde  $\phi_m$  es una función potencial escalar. La ecuación que debe satisfacer  $\phi_m$  se deduce de (186):

$$\nabla^2 \phi_m = 0 \quad (203)$$

Es decir,  $\phi_m$  cumple la ecuación de Laplace.

Consideremos ahora la forma integral de la ley de Ampère (187):

$$\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (204)$$

donde  $I$  es la intensidad total que atraviesa la curva cerrada  $C$ , con su signo definido de acuerdo al sentido de la circulación. Si a lo largo del camino  $C$  se cumple que  $\mathbf{J} = 0$ , entonces  $\mathbf{B}$  en (204) vendrá dado por (202), lo que implica que  $\phi_m$  debe ser una función multivaluada que se incrementa en un valor igual  $-I$  cada vez que recorre el camino cerrado  $C$ . Otra alternativa igualmente válida es definir  $\phi$  como una función monovaluada discontinua, que experimenta un salto  $\pm I$  cada vez que atravesamos una "superficie de corte" definida adecuadamente.

**Ejercicio:** Calcular el potencial escalar magnético creado por un hilo recto de corriente y comprobar que el potencial obtenido es una función multivaluada que se incrementa en  $-I$  cada vez que el punto de observación rodea al hilo.

**Ejercicio:** Calcular el potencial escalar magnético dentro y fuera de una superficie esférica de radio  $R_0$ , por la que circula una corriente superficial  $\mathbf{K} = K_0 \sin\theta \mathbf{u}_\phi$ . Sugerencia: Usar el método de separación de variables en coordenadas esféricas, con las condiciones adecuadas para  $\phi_m$  a ambos lados de la lámina de corriente (que deduciremos de (193), (194) y (202)).

11. **Campo y potencial creado por espiras distantes:**

Consideremos el potencial creado por una espira a gran distancia de ésta. Desarrollando (199) en serie de potencias de  $1/|\mathbf{r}|$  (se supone que el origen de coordenadas está próximo a la espira), obtenemos:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} \oint d\mathbf{r}' + \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \oint \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' d\mathbf{r}' + \dots \right\} \quad (205)$$

donde las integrales se extienden sobre toda la espira. El primer término de (205) es idénticamente nulo (es decir no existe término de orden cero – carga magnética – en el desarrollo). El segundo término puede escribirse también como:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \dots \quad (206)$$

donde:

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \quad (207)$$

es el “momento dipolar magnético” de la espira. Para una espira plana, (207) se puede escribir también como:

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{n} \quad (208)$$

donde  $S$  es la superficie total de la espira y  $\mathbf{n}$  viene definido por el sentido de giro de  $I$ .

**Ejercicio:** *Demostrar (207) a partir de (205). Sugerencia: usar la relación vectorial  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ , junto con  $d\{\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\} = d\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}')$ .*

**Ejercicio:** *Demostrar (208) a partir de (207).*

La expresión (207) se puede generalizar para distribuciones arbitrarias de corriente, haciendo el cambio  $I d\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{J} d\mathcal{V}$ :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J} d\mathcal{V}' \quad (209)$$

.

**Ejercicio:** *Demostrar que el momento dipolar magnético (207) o (209) no depende del origen de coordenadas.*

**Ejercicio:** *Demostrar que el par de fuerzas ejercido sobre una pequeña espira plana rectangular de lado  $\delta l$  por la que circula una intensidad  $I$  viene dado por:*

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (210)$$

donde  $\mathbf{m}$  es el momento dipolar de la espira.

## 12. Dipolo magnético:

El dipolo magnético es el caso límite de una pequeña espira de corriente de momento dipolar  $\mathbf{m}$  en el caso límite en que la corriente tiende a infinito y el área de la espira a cero, de modo que el momento dipolar magnético  $|\mathbf{m}| = IS$  permanece constante. El potencial vector de un dipolo magnético colocado en el origen de coordenadas viene dado por (206), y el campo  $\mathbf{B}$  por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + 3 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right\} \quad (211)$$

expresión que es análoga al campo electrostático de un dipolo eléctrico y que, por tanto, puede escribirse también como  $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi_m$ , donde  $\phi_m$  es el potencial escalar magnético del dipolo:

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (212)$$

**Ejercicio:** Demostrar (211) a partir de  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ .

**Ejercicio:** Demostrar que en el exterior de una superficie esférica de radio  $R_0$ , por la que circula una corriente superficial  $\mathbf{K} = K_0 \text{sen}\theta \mathbf{u}_\phi$  se genera un campo magnético igual al generado por un dipolo magnético de magnitud  $\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R_0^2 K_0 \mathbf{u}_z$  colocado en el centro de la esfera.

**Ejercicio:** Demostrar que el campo en el interior de la superficie esférica del problema anterior viene dado por  $\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \frac{\mathbf{m}}{V_{esf}}$ , siendo  $V_{esf}$  el volumen total de la esfera.

La expresión (212) da el campo “fuera del dipolo” ( $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ), pero no “en el dipolo” ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ). El resultado del último ejercicio puede utilizarse para demostrar que, “en el dipolo”:

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{m} ; \mathbf{r} = \mathbf{r}' \quad (213)$$

**Ejercicio:** Utilizar la ecuación (212) para demostrar que el potencial escalar magnético creado por una espira de forma arbitraria viene dado por  $\phi_m = -\frac{I}{4\pi} \Omega$ , donde  $\Omega$  es el ángulo sólido subtendido por la espira desde la posición del observador (con el vector  $\mathbf{n}d\mathcal{S}$  definido de acuerdo al sentido de giro de  $I$ ). Comprobar el carácter multivaluado del potencial así obtenido.

Finalmente, el resultado anterior (210) puede utilizarse para demostrar que el par de fuerzas ejercido sobre un dipolo en un campo externo  $\mathbf{B}_{ext}$  viene dado por:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{ext} \quad (214)$$

Este resultado puede derivarse de una energía de interacción entre un dipolo  $\mathbf{m}$  y un campo externo  $\mathbf{B}_{ext}$  dada por:

$$U_{int} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{ext} \quad (215)$$

análoga a (48), que daría lugar a una fuerza en el caso de un dipolo magnético en un campo externo no uniforme análoga a (49):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext} \quad (216)$$

## Tema V: Ley de Faraday. Energía del campo magnético

1. **f.e.m. en espiras en movimiento en un campo magnético constante y no uniforme:** Considérese una espira que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  constante en el seno de un campo  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  constante en el tiempo pero variable con la posición. En ese caso puede demostrarse a partir de (177) que, en la espira, se genera una f.e.m. igual a:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (217)$$

donde  $\Phi$  es el flujo del campo  $\mathbf{B}$  a través de la espira:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} \quad (218)$$

donde la integral se extiende a cualquier superficie limitada por la espira y los sentidos de  $d\mathbf{l}$  y  $\mathbf{n}$  están relacionados por la regla de la mano derecha.

**Ejercicio:** Demostrar que la definición (218) no depende de la superficie elegida. Sugerencia: utilizar la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

**Ejercicio:** Demostrar (217) para el caso particular de una espira rectangular que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_0$  paralela a uno de sus lados en el seno de un campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  perpendicular al plano de la espira.

**Ejercicio:** Demostrar (217) para una espira de forma arbitraria que se mueve sin deformarse en el seno de un campo magnético constante y no uniforme. Sugerencia: usar  $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{v} \times d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}$ , e identificar el sentido geométrico de  $\mathbf{v} \times d\mathbf{l}$ .

**Ejercicio:** Resolver la siguiente paradoja: sea una espira rectangular de lados paralelos a los ejes  $x$  e  $y$ , que se mueve con velocidad  $v_0$  en la dirección del eje  $z$ . Supóngase que dicha espira se mueve en un campo  $\mathbf{B}_0$  constante de la forma  $\mathbf{B} = B_0(x)\hat{\mathbf{x}}$ , siendo  $B_0(x)$  una función de  $x$  distinta de una constante. Demostrar que a lo largo de la espira la integral del segundo término de (217) es distinta de cero, mientras que el flujo total que atraviesa el plano de la espira es nulo, contradiciendo así la segunda igualdad de (217). ¿Significa eso que (217) no es cierta siempre? ¿Por qué?.

2. **Ley de Faraday:** Consideremos ahora lo que ocurre en el sistema rígidamente ligado a la espira. Allí hay un campo local  $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , dado por las transformaciones de Galileo de los campos (178), que no es electrostático, pues su circulación no es nula en general. Haciendo uso de (217) podemos escribir, en el nuevo sistema:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi'}{dt} \quad (219)$$

donde se ha recalado que el flujo  $\Phi$  dado por (218) es un invariante (ya que  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$  según (178)). Podemos entonces escribir:

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial B'}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} \quad (220)$$

donde se ha metido la derivada temporal dentro de la integral, puesto que en el nuevo sistema los límites de integración no son función del tiempo. De (220):

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \quad (221)$$

que es la *Ley de Faraday*. La Ley de Faraday dice que la fuente de los campos eléctricos no electrostáticos son las variaciones en el tiempo de los campos magnéticos. Si, conforme al *principio de relatividad*, suponemos que las leyes de la física son las mismas en todo sistema de referencia inercial, la Ley de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (222)$$

deberá ser válida en cualquier sistema inercial.

**Ejercicio** *Demostrar directamente que el campo eléctrico local en cualquier sistema móvil, que se mueve a velocidad  $\mathbf{v}$  constante,  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  también satisface la ley de Faraday (222) en el sistema móvil:  $\nabla \times \mathbf{E}' = -\partial \mathbf{B}' / \partial t'$ , usando para  $\partial / \partial t'$  la regla de la cadena, es decir:  $\partial / \partial t' = \partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ . Ayuda: Usar la identidad  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}$*

**Ejercicio:** *Demostrar, utilizando el teorema de Helmholtz (25), que el campo de Faraday que satisface (222) en todo el espacio, en ausencia de densidades de carga, viene dado por:*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} d\mathcal{V}' \quad (223)$$

3. **Condiciones de contorno en la frontera de un conductor perfecto:** En muchas ocasiones resulta una buena aproximación suponer que un conductor es perfecto ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). En tal caso y para conductores en reposo,  $\mathbf{E} = 0$  en el interior del conductor, de modo que, de acuerdo con (222), cualquier campo magnético variable con el tiempo se anulará en el interior del conductor. Así, cualquier campo  $\mathbf{B}$  variable con el tiempo deberá satisfacer la condición de contorno que se deduce de (193):

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (224)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie del conductor. De (194) se deduce entonces que:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{K} \quad (225)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la corriente superficial variable con el tiempo sobre el conductor perfecto.

**Nota:** Recalamos que las ecuaciones (224) y (225) solo son válidas para campos variables con el tiempo. Un campo  $\mathbf{B}$  constante o que varíe con el tiempo de forma suficientemente lenta podrá penetrar en el conductor. El significado de la expresión "suficientemente lenta" se aclara en el marco de la teoría del efecto pelicular, estudiado en la asignatura optativa "Electromagnetismo en la Materia".

4. **f.e.m. en espiras en movimiento en campos variables con el tiempo:** En el caso más general ( $\mathbf{v} \neq 0$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ), podemos combinar (217) y (220) para obtener:

$$\mathcal{E} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} + \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (226)$$

donde la primera integral es la variación del flujo debida a la variación de  $\mathbf{B}$  con el tiempo y la segunda la variación de flujo debida al movimiento de la espira.

**Ejercicio:** Una espira cuadrada de lado  $a$  y resistencia  $R$  gira en torno a un eje que pasa por la mitad de dos lados opuestos con velocidad angular  $\omega$  en el seno de un campo externo  $\mathbf{B}_0$  uniforme y constante, perpendicular al eje de giro. Calcular la f.e.m. inducida por este campo en la espira. Despreciando el efecto de las corrientes en la propia espira sobre el flujo magnético total, calcular la intensidad  $I(t)$  que circula por la espira, así como las pérdidas por efecto Joule en cada instante. Calcular el par de fuerzas necesario para mantener el giro de la espira, demostrando que el trabajo realizado coincide con las pérdidas por efecto Joule.

**Ejercicio:** Suponer ahora que la misma espira está fija. Encontrar un campo externo  $\mathbf{B}_0(t)$ , uniforme pero variable en el tiempo, que origine la misma f.e.m. en la espira.

**Ejercicio:** ¿Cuanto vale la f.e.m. de los ejercicios anteriores si, en lugar de una espira tenemos una bobina de  $N$  espiras?

**Ejercicio:** Un alambre rígido conductor se dobla en forma de  $\bar{U}$ , de modo que los brazos de la  $\bar{U}$  pueden considerarse infinitos, siendo  $l$  la anchura de la  $\bar{U}$ . El alambre se considera conductor perfecto. Una resistencia  $R$  se desliza sobre los brazos de la  $\bar{U}$  con velocidad  $v$ , haciendo contacto eléctrico y manteniéndose paralela a la base de la  $\bar{U}$ . Todo el dispositivo está inmerso en un campo externo  $\mathbf{B}_0$  perpendicular al plano de la  $\bar{U}$ , constante y uniforme. Despreciando el efecto de las corrientes en el circuito sobre el flujo total, calcular la f.e.m., la fuerza necesaria para mantener el movimiento de la resistencia, el trabajo realizado por dicha fuerza y las pérdidas por efecto Joule, demostrando el balance energético.

**Ejercicio:** Repetir el ejercicio anterior con un condensador de capacidad  $C$  en lugar de la resistencia. ¿Cuanto vale ahora la carga almacenada en el condensador?

**Ejercicio:** El "Disco de Faraday" constituyó el primer generador de corriente eléctrica basado en la ley de Faraday. Se trata de un disco conductor (que supondremos de conductividad muy grande para simplificar) que se hace girar en torno a un eje perpendicular que pasa por su centro, en el seno de un campo magnético perpendicular al disco que supondremos uniforme y constante. El circuito se cierra mediante una resistencia  $R$  conectada al eje y al borde del disco mediante un contacto deslizante. Si la frecuencia de giro es  $\omega$  y el radio del disco  $a$ , calcular la f.e.m. inducida en el circuito, así como la intensidad que circula por el mismo y las pérdidas por efecto Joule. Calcular también el par de fuerzas necesario para hacer girar el disco y comprobar que el trabajo mecánico realizado es igual a las pérdidas por efecto Joule.

**Ejercicio:** En un acelerador “betatrón” un ión de carga  $q$  y masa  $m$  recorre una órbita circular a una distancia  $R$  del eje de la máquina. El campo magnético tiene simetría cilíndrica, es decir,  $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{n}_z$ , en coordenadas cilíndricas en torno al eje de simetría. Calcular el radio  $R$  de la órbita del ión en función de su velocidad. Demostrar que si la magnitud de  $B$  se incrementa, el electrón se acelera a consecuencia del campo eléctrico generado por la Ley de Faraday (222). Demostrar que para que el radio de la órbita no varíe, el campo  $B(r)$  debe satisfacer la siguiente condición:  $\frac{d}{dt} \langle B(r) \rangle_R = 2\frac{d}{dt} B(R)$ , donde  $\langle B(r) \rangle_R$  es el promedio espacial de  $B(r)$  sobre todo el área de la órbita.

5. **Ecuaciones y potenciales de la cuasimagnetostática:** Las ecuaciones de la cuasimagnetostática son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (227)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (228)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (229)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (230)$$

de (230) se deduce que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (231)$$

y de (227) que  $\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ . Así pues podemos escribir:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (232)$$

deduciéndose de (227) y (232) las siguientes ecuaciones para los potenciales  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  (supuesto que se imponga la condición usual de  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ):

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (233)$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (234)$$

que son idénticas que las ecuaciones de la electrostática y la magnetostática. Vemos pues que la cuasimagnetostática se reduce, desde este punto de vista, a introducir el término  $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  en la expresión (232) para  $\mathbf{E}$ .

6. **Inconsistencia de la Ley de Ampère para campos variables con el tiempo:** Tomando la divergencia de la ecuación de la ley de Ampère (229) y teniendo en cuenta que la divergencia del rotacional es idénticamente nula, tenemos que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , lo que está en contradicción con la ley de conservación de la carga en sistemas variables con el tiempo 17. Vemos pues que la Ley de Ampère, como toda la cuasimagnetostática, debe considerarse como una aproximación válida en el límite  $\partial\rho/\partial t \rightarrow 0$ . En caso contrario, la ley de Ampère debe sustituirse por la ecuación

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (235)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. El término  $c^{-2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , introducido por Maxwell, recibe el nombre de *corriente de desplazamiento* y su introducción da lugar a las ondas electromagnéticas (ver Tema VII).

**Ejercicio:** *Demostrar que tomando la divergencia de (235) se obtiene la ley de conservación de la carga en forma diferencial. (Nota: téngase en cuenta que  $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ ).*

## 7. Energía del campo magnético

De acuerdo con lo establecido en el Tema IV un conjunto de corrientes sometidas a fuerzas magnéticas estáticas no realiza trabajo. Ahora bien, de acuerdo con la ley de Faraday, la variación de un campo magnético  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \delta \mathbf{B}$  requiere la realización de un trabajo por unidad de tiempo:

$$\frac{\delta W}{\delta t} = - \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} \quad (236)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo de Faraday dado por  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ . Integrando (236) tras algunas transformaciones, se puede calcular la energía magnética almacenada en el campo  $\mathbf{B}$ , como el trabajo total necesario para pasar de  $\mathbf{B} = 0$  al valor final  $\mathbf{B}$ :

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 d\mathcal{V} \quad (237)$$

de donde se deduce la existencia de una densidad de energía magnética asociada al campo  $\mathbf{B}$  dada por

$$u_M = \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (238)$$

**Ejercicio** *Demostrar (237) a partir de (236) así como de (227) y (229) junto con la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$*

8. **Movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos constantes y débilmente no uniformes. Constancia del flujo y el momento magnético:** Vimos en el tema IV que el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante es una hélice de paso y radio constantes, que la partícula describe a velocidad de traslación constante y frecuencia de giro dada por (180), la frecuencia de ciclotrón. De tales resultados cabe esperar que cuando nos hallamos ante campos débilmente uniformes, la trayectoria de la partícula debe ser una hélice de radio y paso no uniformes. Deduciremos a continuación que el flujo magnético a través de esa quasi-hélice debe ser constante. Nos colocamos en el sistema de referencia que se mueve con la velocidad de traslación  $\mathbf{v}_p$  de la partícula a lo largo de la hélice. En ese sistema la partícula describe una trayectoria aproximadamente circular en el seno de un campo magnético  $\mathbf{B}(t')$  que, en el nuevo sistema, es variable con el tiempo. El trabajo realizado sobre la partícula en el nuevo sistema será:

$$\delta W' = -q\mathcal{E} = q \frac{d\Phi'}{dt'} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (239)$$

donde hemos usado que, según las transformaciones galileanas  $\Phi = \Phi'$  y  $t = t'$  y el signo menos en la primera igualdad se debe a que, según (180), el sentido de giro de la partícula es negativo respecto a  $\mathbf{B}$ .

El trabajo  $\delta W'$  no es un invariante de Galileo, pero en este caso particular:

$$\delta W' = \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{l}' = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_p \delta t = \delta W - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_p \delta t \quad (240)$$

donde hemos usado  $d\mathbf{l}' = d\mathbf{l} - \mathbf{v}_p \delta t$  y que la fuerza es un invariante de Galileo. Si la velocidad de traslación es pequeña comparada con la velocidad de giro ( $\mathbf{v}_p \ll \mathbf{v}_t$ ) y  $\mathbf{B}$  es débilmente no uniforme y aproximadamente perpendicular a la órbita, el último término de (240) es un infinitésimo de segundo orden y:

$$\delta W' \simeq \delta W = 0 \quad (241)$$

donde hemos usado el hecho de que la fuerza magnética no realiza trabajo ( $\delta W = 0$ ). De (239) y (241) se deduce que el flujo que atraviesa la órbita debe ser constante:

$$\Phi(t) = \Phi_0 = \text{Constante} \quad (242)$$

Esta ecuación indica que la partícula describe una hélice no uniforme en torno a las líneas de  $\mathbf{B}$ , de modo que el flujo que atraviesa la hélice (el número de líneas de campo) permanece constante.

El momento magnético asociado a la órbita circular es  $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}q|\mathbf{r}'|^2\boldsymbol{\omega}_c$ , donde  $\mathbf{r}'$  es el radiovector de posición de la partícula respecto del centro de la órbita (que se mueve a velocidad  $\mathbf{v}_p$ ). De las definiciones de  $\boldsymbol{\omega}_c$  y  $\Phi$  vemos que:

$$\mathbf{m} = -\frac{q^2\Phi}{2\pi m}\mathbf{n} \quad (243)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $\mathbf{n}$  apunta en la dirección de  $\mathbf{B}$ .

**Ejercicio:** *Los "espejos magnéticos" son una configuración que permite retener durante cierto tiempo partículas cargadas en el seno de campos magnético débilmente no uniformes (ver, p.ej. Reitz - Milford - Christy pp. 352 y ss.). Demostrar que una partícula que se mueve en el seno de un campo magnético débilmente no uniforme, inicialmente hacia la región de campo más intenso, lo hace con velocidad de traslación decreciente y, si el campo llega a ser lo suficientemente intenso, es finalmente reflejada hacia la zona de campo débil. Este fenómeno explica también la captura de partículas cargadas de los rayos cósmicos por el campo magnético terrestre (cinturones de Van Allen) y las "auroras boreales".*

9. **Autoinducción de una espira:** Consideremos una espira de resistencia  $R$  en el seno de un campo magnético variable. La ecuación para la intensidad de corriente vendrá dada por:

$$\mathcal{E} = RI = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B}_{ext} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{d}{dt} \int \mathbf{B}(I) \cdot \mathbf{n} dS \quad (244)$$

donde hemos separado el campo  $\mathbf{B}$  en campo externo  $\mathbf{B}_{ext}$  y campo creado por la propia corriente en la espira  $\mathbf{B}(I)$ . Este último es proporcional a  $I$ , según (172). Por tanto el último término de (244) es proporcional a  $I$ , siendo la constante de proporcionalidad una integral que depende de la geometría de la espira. Dicha constante se denomina *autoinducción*  $L$ . Por tanto, la ecuación para la intensidad será

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{d\Phi_{ext}}{dt} = 0 \quad (245)$$

**Ejercicio:** *Demostrar que la autoinducción de un solenoide recto de longitud  $l$  y formado por  $N$  espiras de sección  $S$  es muy aproximadamente (despreciando efectos de borde)  $L = \mu_0 N^2 S / l$ .*

**Ejercicio:** *Calcular la autoinducción de un dispositivo formado por dos cáscaras metálicas cilíndricas coaxiales de radios  $R_1$  y  $R_2$ ,  $R_2 > R_1$ , de longitud común  $L \gg R_2$ , conectadas por placas planas en los extremos.*

**Ejercicio:** *Una línea de transmisión consiste en dos alambres muy largos de radio  $a$  separados por una distancia  $d$ . Calcular la autoinducción por unidad de longitud. Suponer que los conductores son perfectos y los campos varían con el tiempo de modo que se cumplen (224) y (225).*

**Ejercicio:** *Calcular la autoinducción por unidad de longitud de un cable coaxial de radios interior y exterior  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Suponer que los conductores son perfectos y los campos varían con el tiempo de modo que se cumplen (224) y (225).*

10. **Inducción mutua. Fórmula de Neumann:** Consideremos dos espiras en interacción. A partir de  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y de la definición de flujo, puede demostrarse que el flujo que atraviesa la espira 2 como consecuencia de la intensidad  $I_1$  por la espira 1, puede escribirse como:

$$\Phi_{2,1} = \int_2 \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_2 dS = \oint_2 \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} \quad (246)$$

de aquí y de (199) se deduce la Fórmula de Neumann para la inducción mutua entre dos espiras:

$$L_{i,j} = L_{j,i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (247)$$

En general un sistema de espiras viene caracterizado por su matriz de inducciones mutuas  $L_{i,j}$ :

$$\Phi_i = \sum_j L_{i,j} I_j \quad (248)$$

**Cuestión:** *¿Por qué no se puede usar la fórmula de Neumann (247) para calcular los términos diagonales de la matriz de inducciones  $L_{i,i}$ ? Este hecho indica que la aproximación de espiras de sección nula no siempre es aplicable. En particular, la autoinducción de una espira se debe determinar teniendo en cuenta su grosor y resulta ser dependiente*

de la conductividad y del modo en que  $I$  varía con el tiempo (para campos armónicos, de la frecuencia de la pulsación).

**Ejercicio:** Mostrar que en un sistema de espiras de resistencia nula (espiras superconductoras), el flujo total que atraviesa cada espira,  $\Phi_i$ , debe permanecer constante en el tiempo, con independencia de que las espiras se muevan o estén sometidas a un campo magnético externo variable en el tiempo. Por contra, las intensidades  $I_i(t)$  son funciones del tiempo, que pueden calcularse a partir de la condición  $\Phi_i = \text{Constante}$ . Este hecho se conoce como efecto Meissner.

**Ejercicio:** Calcular la inducción mutua entre un solenoide recto de longitud  $l$  formado por  $N$  espiras de sección  $S$  cada una y una pequeña espira de sección  $s \ll S$  colocada en el centro geométrico del solenoide, de modo que el vector unitario perpendicular al plano de la espira pequeña forme un ángulo  $\theta$  con el eje del solenoide.

**Ejercicio:** Calcular la inducción mutua entre una espira circular de radio  $R$  y una pequeña espira de sección  $s \ll \pi R^2$  colocada en el eje de la espira a una distancia  $z$  del centro de la espira mayor, de modo que el vector unitario perpendicular al plano de la espira pequeña forme un ángulo  $\theta$  con el eje de la espira grande. Sugerencia: usar (176).

**Ejercicio:** Calcular la f.e.m. inducida en el solenoide del ejercicio anterior por un momento magnético  $\mathbf{m}$  situado en su centro geométrico, que gira con velocidad angular  $\omega$  en torno a un eje perpendicular al eje del solenoide.

**Ejercicio:** Calcular la inducción mutua entre un hilo recto infinito y un rectángulo de dimensiones  $a$  y  $b$  colocado en el mismo plano del hilo, cuando los lados de dimensión  $a$  son paralelos al hilo y el más cercano está a una distancia  $d$  de éste.

11. **Trabajo y energía en un sistema de espiras:** La expresión (237) se puede escribir también como:

$$U_M = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (249)$$

**Ejercicio:** Demostrar (249) a partir de (229), (231) y de la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ .

Particularizando para un sistema de espiras filiformes, en las que la corriente se concentra en un hilo cuyo espesor tiende a cero, obtenemos:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum I_i \oint_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \sum I_i \Phi_i \quad (250)$$

donde se ha usado (246). Finalmente, usando (248) se obtiene:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{i,j} I_i I_j \quad (251)$$

De acuerdo con (237) la energía magnética es una cantidad definida positiva. Por tanto, la matriz  $L_{i,j}$  además de simétrica (ver (247)) es definida positiva con  $L_{i,i} > 0$  para todo valor de  $i$ .

12. **Fuerzas magnéticas entre espiras:** Aplicamos del principio de los trabajos virtuales:

$$F_\xi = -\frac{\delta W_{mec}}{\delta \xi} \quad (252)$$

donde  $\xi$  es un desplazamiento arbitrario y  $\delta W_{mec}$  el trabajo mecánico que es necesario realizar sobre el sistema durante el desplazamiento. Si consideramos espiras de resistencia nula no habrá disipación de energía y el trabajo coincidirá con el incremento de energía en el sistema. Por otro lado, un sistema de espiras de resistencia nula evoluciona de manera que el flujo que atraviesa cada espira permanece constante (efecto Meissner). De ese modo, el principio de los trabajos virtuales se escribe, para un sistema de espiras, como:

$$F_\xi = -\left(\frac{\partial U_M}{\partial \xi}\right)_\Phi \quad (253)$$

donde la derivación se realiza a flujo constante. Si se conoce la matriz de autoinducciones inversa, la expresión (253) puede escribirse como:

$$F_\xi = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \Phi_i \Phi_j \frac{\partial L_{i,j}^{-1}}{\partial \xi} \quad (254)$$

Si se impone la condición  $I_i = \text{cte.}$  en cada espira, entonces

$$\delta U_M = \delta W_{mec} + \delta W_G \quad (255)$$

donde  $\delta W_G$  es el trabajo realizado para mantener constante la intensidad en cada espira durante el desplazamiento. Este trabajo puede calcularse sobre cada espira como:

$$\delta W_G = -\sum_i \mathcal{E}_i \delta Q_i = \sum_i \frac{\delta \Phi_i}{\delta t} \delta Q_i = \sum_i \delta \Phi_i I_i \quad (256)$$

donde  $I_i$  es la intensidad en cada espira. Por otro lado, en un proceso a intensidad constante:

$$\delta U_M = \delta \left( \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i I_i \right) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \delta \Phi_i \quad (257)$$

de modo que  $\delta W_G = 2\delta U_M$ , de donde (252), tras aplicar (255), se transforma en:

$$F_\xi = \left( \frac{\partial U_M}{\partial \xi} \right)_I \quad (258)$$

donde la derivación se realiza a intensidad constante. Si se conoce la matriz de autoinducciones del sistema, (258) se puede escribir como

$$F_\xi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i I_j \frac{\partial L_{i,j}}{\partial \xi} \quad (259)$$

**Ejercicio:** Utilizar (259), junto con la definición de inducción mutua, para demostrar que, efectivamente, la energía de interacción entre un momento dipolar magnético  $\mathbf{m}$  y un campo externo puede definirse mediante (215).

**Ejercicio:** Demostrar de nuevo usando (259) y el resultado obtenido en un ejercicio anterior acerca de la inducción mutua entre un solenoide y una pequeña espira en su centro, que el par ejercido por un campo magnético uniforme sobre un dipolo magnético vale  $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ .

**Ejercicio:** Usando (259) y el resultado anterior acerca de la inducción mutua entre una espira grande y otra pequeña situada en su eje, calcular la fuerza y el par ejercidos por una espira sobre un dipolo  $\mathbf{m}$  situado en su eje y orientado arbitrariamente. Comprobar que el resultado coincide con (214) y (216).

13. **Autoinducciones como elementos de circuito:** Los campos que generan la f.e.m. en una espira aislada no son electrostáticos, por tanto no es posible definir la diferencia de potencial entre dos puntos de una espira de un modo unívoco.

Para poder definir de modo unívoco una diferencia de potencial a la salida de una espira o un conjunto de espiras es necesario confinar los campos no electrostáticos que generan la f.e.m. en su interior. Para ello, de acuerdo con (222), basta con confinar el campo  $\mathbf{B}$  variable con el tiempo. Se llama autoinducción a un elemento de circuito formado por un conjunto de espiras que generan en su interior un campo  $\mathbf{B}$  intenso cuando se hace circular por ellas una corriente eléctrica, pero que decae rápidamente a cero fuera del elemento de circuito. En esas condiciones los campos fuera de la autoinducción serán muy aproximadamente electrostáticos ( $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ) y podrá definirse la diferencia de potencial entre la entrada y la salida de la autoinducción.

Si  $A$  es la entrada y  $B$  la salida de una autoinducción ideal (formada por espiras conductoras perfectas), por la que circula una intensidad  $I(t)$  cuyo sentido va de  $A$  a  $B$ . La ecuación para  $V_A - V_B$  en función de  $I(t)$  (ecuación característica) es:

$$V_{A-B} \equiv V_A - V_B = L \frac{dI}{dt} \quad (260)$$

donde el signo de  $I(t)$  se elige positivo cuando el sentido de circulación es de  $A$  a  $B$  por el interior de la autoinducción. Nótese el cambio de signo respecto de (217).

**Ejercicio:** Demostrar (260). Sugerencia: usar la definición de fuerza electromotriz (155) junto con el hecho de que los campos son cero a lo largo del bobinado (las espiras son conductoras perfectas). Usar asimismo (226).

**Ejercicio:** Mostrar que una autoinducción real de resistencia  $R_L$  en continua, equivale a una autoinducción ideal en serie con una resistencia  $R_L$ .

**Ejercicio:** Mostrar que el tiempo de relajación en un circuito  $RC$  (resistencia en serie con un condensador) es  $\tau = RC$ .

**Ejercicio:** Mostrar que el tiempo de relajación en un circuito  $RL$  (resistencia en serie con una autoinducción) es  $\tau = L/R$ .

**Ejercicio:** *Mostrar que la frecuencia natural de oscilación de un circuito LC (autoinducción en serie con una capacidad), es  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ .*

**Ejercicio:** *Un resonador de alta frecuencia está formado por dos cáscaras metálicas cilíndricas coaxiales de radios  $R_1$  y  $R_2$ ,  $R_2 > R_1$ , de longitud común  $L \gg R_2$  y conductividad muy alta, conectadas por placas planas en los extremos. Calcular la frecuencia natural de oscilación de dicho dispositivo.*

**Ejercicio:** *Analizar un circuito RLC (resistencia, autoinducción y condensador en serie) para  $R < 2(L/C)^{1/2}$  y para  $R \geq 2(L/C)^{1/2}$ . Demostrar que en el primer caso el circuito es un oscilador amortiguado y en el segundo la solución no es oscilante, produciéndose el máximo de atenuación para  $R = 2(L/C)^{1/2}$  (ver Reitz -Milford -Christy pp. 311 y ss.).*

14. **Fasores:** Considérese una magnitud física - por ejemplo una tensión  $V$  - que varía armónicamente con el tiempo a frecuencia  $\omega$ :  $V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ , donde  $V_0$  es la amplitud y  $\phi$  la fase. Llamamos fasor de  $V$  a la cantidad compleja, que notaremos  $\hat{V}$ :

$$\hat{V} = V_0 e^{j\phi} \quad (261)$$

donde  $j$  es la unidad imaginaria  $j = \sqrt{-1}$ . De la definición de  $\hat{V}$  es evidente que:

$$V(t) = \Re(\hat{V} e^{j\omega t}) \quad (262)$$

expresión que nos permite recuperar la magnitud física  $V$  conocido su fasor  $\hat{V}$  y que puede considerarse como otra definición de  $\hat{V}$ .

De (261) ó de (262) se deduce de inmediato que, dadas dos magnitudes físicas  $V$  e  $I$ , ambas variables armónicamente con el tiempo a la misma frecuencia  $\omega$ :  $V = V_0 \cos(\omega t + \phi_V)$ ,  $I = I_0 \cos(\omega t + \phi_I)$ , se cumple que:

$$\text{Fasor de } [V + I] = \hat{V} + \hat{I} \quad (263)$$

$$\text{Fasor de } [\alpha V] = \alpha \hat{V} \quad (264)$$

$$\text{Fasor de } \left[\frac{\partial}{\partial t} V\right] = j\omega \hat{V} \quad (265)$$

Por otro lado, se puede demostrar que, dadas dos magnitudes físicas que varían armónicamente en el tiempo con la misma frecuencia:  $V = V_0 \cos(\omega t + \phi_V)$  e  $I = I_0 \cos(\omega t + \phi_I)$ , se cumple la identidad:

$$\frac{1}{2} \Re(\hat{V} \hat{I}^*) = \langle VI \rangle \quad (266)$$

donde  $\langle VI \rangle$  es el promedio temporal del producto  $VI$ , definido por:

$$\langle VI \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t) dt \quad (267)$$

siendo  $T = 2\pi/\omega$  el periodo de la oscilación.

**Ejercicio:** *Demostrar (266) por integración directa*

15. **Impedancia:** Usando (265), la ecuación característica tanto de una resistencia, como de un condensador o de una autoinducción puede escribirse formalmente como:

$$\hat{V} = Z\hat{I} \quad (268)$$

donde  $Z$  es la "impedancia", que para una resistencia vale:

$$Z = R \quad (269)$$

para un condensador:

$$Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \quad (270)$$

y para una autoinducción:

$$Z = j\omega L \quad (271)$$

En general, cualquier combinación de resistencias, condensadores y autoinducciones, con dos terminales, puede caracterizarse mediante la ecuación (268), donde  $Z$  es la impedancia total que puede obtenerse componiendo las impedancias (269) - (271) mediante las mismas reglas de composición de las resistencias. La impedancia total se escribe:

$$Z_T = R + jX \quad (272)$$

donde  $R$  recibe el nombre de resistencia y  $X$  el de reactancia.

La potencia disipada en este tipo de circuitos debe ser, en promedio, mayor o igual que cero. Por otro lado, de acuerdo con (266), (268) y (272):

$$\langle P_d \rangle = \langle VI \rangle = \frac{1}{2} \Re(\hat{V}\hat{I}^*) = R\hat{I}\hat{I}^* \quad (273)$$

de donde  $R \geq 0$ . La reactancia, por su parte, puede ser positiva o negativa. En el primer caso el circuito se dice que es "inductivo" (por analogía con (271)) y si  $X < 0$  se dice que es "capacitivo" (por analogía con (270)).

**Ejercicio:** *Demostrar que las reglas de composición de impedancias en serie y en paralelo son formalmente idénticas a las reglas de composición de resistencias.*

**Ejercicios:** *Calcular las impedancias de los dispositivos de dos terminales estudiados en los ejercicios del Tema III: condensadores planos, cilíndricos y esféricos rellenos por dos medios conductores y polarizables de constantes  $\sigma_i$ ,  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ), en los siguientes casos:*

- *La interfaz entre ambos medios es paralela a las placas del condensador.*
- *La interfaz entre ambos medios es perpendicular a las placas.*

**Ejercicio:** *Calcular la impedancia de un solenoide recto de longitud  $l$  formado por  $N$  espiras de radio  $R$  estrachamente arrolladas, hechas con un alambre conductor de sección  $s \ll \pi R^2$  y conductividad  $\sigma$ .*

16. **Teorema de la potencia compleja:** Este teorema dice que, para cualquier porción de un circuito de dos terminales, sometida a una tensión  $V$  y por la que circula una intensidad  $I$ , que varían armónicamente en el tiempo:

$$\frac{1}{2}(\hat{V}\hat{I}^*) = \langle P_d \rangle + 2j\omega(\langle U_M \rangle - \langle U_E \rangle) \quad (274)$$

donde  $U_M$  y  $U_E$  son la energía magnética y eléctrica almacenadas en dicha porción del circuito. La demostración de este teorema se realizará en el Tema VII como caso particular del Teorema de Poynting complejo.

**Ejercicio:** Comprobar, usando (269) - (271), que el teorema (274) se cumple para los casos particulares de una resistencia, un condensador y/o una autoinducción.

**Ejercicio:** Una espira circular de radio  $a$ , resistencia  $R$  y autoinducción  $L$  está fija, en presencia de un campo externo uniforme pero variable en el tiempo y perpendicular al plano de la espira  $\mathbf{B}_0(t) = B_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}}$ . Calcular el fasor de la intensidad y la intensidad  $I(t)$  que circula por la espira en cada instante. Calcular las pérdidas por efecto Joule en cada instante y en promedio temporal.

**Ejercicio:** Una espira rectangular de lados  $l$  y  $a$ , resistencia  $R$  y autoinducción  $L$  gira en torno a un eje paralelo al lado  $a$  y ubicado en el centro del lado  $l$  con velocidad angular  $\omega$  en el seno de un campo externo  $\mathbf{B}_0$  uniforme y constante, perpendicular al eje de giro. Calcular el fasor asociado a la intensidad, así como la intensidad  $I(t)$  en cada instante. Calcular la potencia disipada por efecto Joule en promedio temporal, así como la energía magnética almacenada por el campo de la espira, también en promedio temporal. Calcular mediante integración directa el par de fuerzas necesario para mantener el giro de la espira, demostrando que el trabajo realizado en cada giro completo se invierte en el calor generado por efecto Joule.

**Ejercicio:** Una espira rectangular de lados  $l$  y  $a$ , resistencia  $R$  y autoinducción  $L$  se coloca en el plano  $x - z$  en un campo magnético giratorio dado por  $\mathbf{B} = B_0(\cos(\omega t)\hat{\mathbf{y}} - \sin(\omega t)\hat{\mathbf{x}})$ . Calcular el fasor asociado a la intensidad, así como la intensidad  $I(t)$  en cada instante. Calcular la potencia disipada por efecto Joule en promedio temporal, así como la energía magnética almacenada por el campo de la espira, también en promedio temporal. Calcular el par de fuerzas que ejerce el campo aplicado sobre la espira.

**Ejercicio (Fuerzas sobre una espira en un campo externo):** Demostrar, empleando el principio de los trabajos virtuales, (258), así como la simetría de las inducciones mutuas, que la fuerza generalizada sobre una espira en un campo externo vale:

$$F_\xi = I \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial \xi} \quad (275)$$

donde  $\Phi_{ext}$  es el flujo que atraviesa la espira debido al campo externo.

**Ejercicio:** Demostrar, usando el resultado anterior, (275), que la potencia mecánica que es necesario aplicar para hacer girar una espira en un campo externo constante, es igual a la energía disipada por efecto Joule en la espira.

**Ejercicio:** *Analizar empleando los conceptos de fasor e impedancia el comportamiento de un circuito RLC cuando se le conecta a un generador ideal que proporciona una tensión  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$  a la entrada del circuito. Demostrar que se produce una resonancia (un máximo de la intensidad) a la frecuencia propia de oscilación del circuito  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . (ver Reitz -Milford -Christy pp. 315 y ss.)*

## Tema VI: El campo magnético en medios materiales

1. **Definición de magnetización  $\mathbf{M}$  y campo  $\mathbf{H}$ ; significado físico de  $\mathbf{M}$ :** Consideremos un cuerpo en el que coexisten corrientes de carga libre  $\mathbf{J}$  y de carga ligada (o de magnetización)  $\mathbf{J}_m$ , por efecto de un campo magnético estático aplicado. La ecuación para el rotacional de  $\mathbf{B}$  será:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \quad (276)$$

por otra parte,  $\mathbf{J}_m$  debe cumplir que  $\nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0$ , ya que se trata de corrientes estacionarias (bf Nota: Esta condición, en el caso de campos aplicados estacionarios debe ser también satisfecha por  $\mathbf{J}$ , por lo que la separación formal entre corriente de carga libre  $\mathbf{J}$  y corriente de carga ligada  $\mathbf{J}_m$  es en gran medida arbitraria). De la anterior propiedad de  $\mathbf{J}_m$  se deduce que  $\mathbf{J}_m$  puede expresarse como:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (277)$$

donde  $\mathbf{M}$  es el llamado “vector de magnetización” que se anula fuera del cuerpo (donde  $\mathbf{J}_m = 0$ ). Si en la superficie del cuerpo  $\mathbf{M}$  cae a cero bruscamente, ello implica la existencia de derivadas infinitas en (277), y por tanto una corriente superficial de carga ligada  $\mathbf{K}_m$ . Aplicando la forma integral de (277) a un camino sobre la superficie del cuerpo, se obtiene que:

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (278)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie del cuerpo y dirigido hacia afuera.

**Ejercicio:** *Demostrar que (277) y (278) aseguran que la intensidad total de corriente de carga ligada que atraviesa cualquier sección del cuerpo es nula (Debe serlo, ya que la carga ligada no puede desplazarse a distancias macroscópicas de su ligadura).*

Si introducimos (277) en (276) obtenemos:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (279)$$

donde el campo  $\mathbf{H}$  viene definido por la relación:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (280)$$

ecuación que en vacío se transforma en  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ . Por razones históricas, al campo magnético  $\mathbf{B}$  se le denomina “densidad de flujo magnético” al campo magnético  $\mathbf{H}$  simplemente “campo magnético”.

La ecuación (279), y la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (281)$$

forman las ecuaciones diferenciales de la magnetostática en medios materiales. La condición de contorno para  $\mathbf{H}$  en la frontera entre dos medios de magnetización  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$ , se deduce de la forma integral de (279):

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (282)$$

donde  $\mathbf{K}$  es una eventual corriente de carga libre sobre la superficie de separación. En general  $\mathbf{K} = 0$ , excepto en el caso de que uno de los medios sea un conductor perfecto o un superconductor. (*No confundir la corriente de carga libre  $\mathbf{K}$  con la corriente de carga ligada  $\mathbf{K}_m$  definida en (278), que en general no se anula*). La condición de contorno para  $\mathbf{B}$  se deduce de (281):

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (283)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario perpendicular a la interfaz y dirigido del medio 1 al 2.

**Ejercicio:** *Demostrar que el momento magnético total de las corrientes de carga ligada (277) y (278) de un cuerpo viene dado por:*

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}_m d\mathcal{V} + \oint \mathbf{r} \times \mathbf{K}_m d\mathcal{S} \right\} = \int \mathbf{M} d\mathcal{V} \quad (284)$$

*Sugerencia: descomponer  $\mathbf{r}$  en la primera integral en componentes cartesianas  $x_i$  y utilizar la identidad vectorial*

$$\int \nabla \times (x_i \mathbf{M}) d\mathcal{V} \equiv \oint \mathbf{n} \times (x_i \mathbf{M}) d\mathcal{S} \quad (285)$$

*válida para cualquier función escalar y cualquier campo vectorial.*

Del resultado del ejercicio precedente se deduce que  $\mathbf{M}$  puede interpretarse como el momento magnético por unidad de volumen del cuerpo (**Nota:** De hecho, si consideramos (277) como la definición de  $\mathbf{M}$ , quedaría por determinar su divergencia. Esta queda fijada al asignar a  $\mathbf{M}$  el significado de “magnetización por unidad de volumen” del cuerpo).

**Ejercicio:** *Consideremos un cuerpo con una magnetización por unidad de volumen  $\delta\mathbf{m} = \mathbf{M}d\mathcal{V}$ . Demostrar, a partir de la expresión del potencial vector creado por un dipolo magnético (ver tema IV), que el potencial vector creado por el cuerpo puede escribirse como:*

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int \frac{\mathbf{J}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{V} + \oint \frac{\mathbf{K}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{S} \right\} \quad (286)$$

donde  $\mathbf{J}_m$  y  $\mathbf{K}_m$  vienen dadas por (277) y (278).

2. **Uso del potencial escalar. Polos magnéticos:** Si la corriente de carga libre se anula  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  y podemos hacer derivar  $\mathbf{H}$  de un “potencial escalar magnético”  $\phi_m$ :

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m \quad (287)$$

en general, salvo para campos generados por imanes permanentes (ver más adelante), esto sólo será cierto en parte del espacio. La ecuación para  $\phi_m$  podemos derivarla de  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  con  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ :

$$\nabla^2\phi_m = -\rho_M ; \quad \rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (288)$$

donde  $\rho_M$  es la “densidad de polo magnético”. Las condiciones de contorno para  $\mathbf{H}$  se deducen de (282) y (283). En particular las condiciones de contorno para  $\mathbf{H}$  en la

frontera entre un medio (medio 1) con magnetización  $\mathbf{M}_1$  y otro medio (medio 2) con magnetización  $\mathbf{M}_2$  son:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (289)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la interfaz que apunta del medio 1 al vacío (medio 2), y:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \sigma_M = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \quad (290)$$

donde  $\sigma_M$  es la “densidad superficial de polo magnético”.

**Ejercicio:** *Demostrar que la cantidad total de polo magnético (o carga magnética) de un cuerpo se anula. Partir de las definiciones en (288) y (290).*

Las ecuaciones (287) – (290) conforman un problema de potencial en todo análogo al electrostático, en presencia de medios polarizables.

**Ejercicio:** *Calcular el potencial  $\phi_m$  en el interior y el exterior de una esfera de radio  $R$  de magnetización uniforme  $\mathbf{M}$ . Demostrar que, en el interior de la esfera es  $\mathbf{H} = -(1/3)\mathbf{M}$  y  $\mathbf{B} = (2/3)\mathbf{M}$ .*

3. **Trabajo necesario para crear un campo magnético en presencia de cuerpos magnetizables:** Dado que las fuerzas magnéticas no realizan trabajo sobre las cargas, el trabajo necesario para provocar un variación  $\delta\mathbf{B}$  en un campo magnetostático vendrá dado por:

$$\delta W = \left\{ - \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathcal{V} \right\} \delta t \quad (291)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo generado por la variación de  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (292)$$

y  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente de carga libre que crea el campo.

Utilizando (292), junto con  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ , así como la identidad:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad (293)$$

se demuestra finalmente que:

$$\delta W = \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} d\mathcal{V} \quad (294)$$

lo que permite definir un “trabajo por unidad de volumen”:

$$\delta w = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \quad (295)$$

4. **Relaciones constitutivas lineales: Diamagnetismo y Paramagnetismo:** Para resolver las ecuaciones (279) y (281) con las condiciones de contorno (282) y (283) necesitamos conocer la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . La relación más sencilla es la relación lineal:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} ; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} , \mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (296)$$

donde  $\chi_m$  es la "susceptibilidad magnética"  $\mu$  la "permeabilidad magnética" del medio. Los cuerpos que satisfacen esta relación se clasifican en diamagnéticos ( $\mu < \mu_0$ ) y paramagnéticos ( $\mu > \mu_0$ ) Los efectos diamagnéticos y paramagnéticos son muy débiles. Así el orden de magnitud del cociente  $\chi_m/\mu_0 = (\mu - \mu_0)/\mu_0$  para un medio diamagnético es del orden de  $-10^{-5} - -10^{-6}$  y para uno paramagnético del orden de  $-10^{-3} - -10^{-5}$ . Ésto expresa la debilidad comparativa de la interacción magnética en el nivel microscópico.

**Ejercicio:** *Por una espira plana de resistencia nula, sección  $S$  y autoinducción  $L$ , circula una intensidad  $I_0$  en ausencia de campo magnético externo aplicado. Demostrar que cuando se le aplica un campo magnético externo  $\mathbf{B}_0$ , el momento magnético de la espira se incrementa en una cantidad:*

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} S^2}{L} \mathbf{n} \quad (297)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal al plano de la espira, con el sentido definido en función de  $I_0$  según la regla de la mano derecha. La espira puede considerarse como una imagen clásica cualitativa de una órbita electrónica en un átomo, y el incremento del momento magnético contrario al campo aplicado como una imagen cualitativa del diamagnetismo. El paramagnetismo se explica a su vez como fruto de la tendencia a orientarse en la dirección paralela al campo de los momentos magnéticos moleculares cuando éstos no son nulos. Las teorías microscópicas del diamagnetismo y del paramagnetismo se explicarán en la asignatura optativa Electromagnetismo en la Materia

**Cuestión:** *Un solenoide está arrollado en torno a un toro de permeabilidad  $\mu$ , de modo que toda la superficie del toro está cubierta por espiras. Si la autoinducción del mismo solenoide en el vacío es  $L_0$  ¿Cuanto vale la autoinducción del solenoide del problema?*

**Ejercicio:** *Un cable coaxial de radio interior  $R_1$  y exterior  $R_2$  se llena de  $R_1$  a  $R_3$ ,  $R_1 < R_3 < R_4$ , de un medio aislante de permeabilidad  $\mu_1$  y desde  $R_3$  hasta  $R_2$  de otro medio de permeabilidad  $\mu_2$ . Calcular la autoinducción por unidad de longitud del cable.*

**Ejercicio:** *Un cable coaxial de radio interior  $R_1$  y exterior  $R_2$  se llena hasta la mitad de un medio aislante de permeabilidad  $\mu_1$ , siendo las interfaces de separación son radiales. La otra mitad se llena de un medio de permeabilidad  $\mu_2$ . Calcular la autoinducción por unidad de longitud del cable.*

**Ejercicio:** *Sea un espira plana que descansa sobre la interfaz plana entre un medio semiinfinito de permeabilidad  $\mu$  y el vacío. Si la autoinducción de la espira en el vacío es  $L_0$  ¿Cuanto vale la autoinducción de la espira del problema?. Sugerencia: a partir de las condiciones de contorno, demostrar que la solución para  $\mathbf{B}$  (pero no para  $\mathbf{H}$ ) correspondiente al problema vacío, puede trasladarse al problema de dos medios.*

**Ejercicio:** *Una espira circular de autoinducción en el vacío  $L_0$ , está incrustada hasta la mitad en un medio semiinfinito de permeabilidad  $\mu$ , de modo que la otra mitad quede en el vacío. La espira se mantiene en el plano perpendicular a la interfaz entre el vacío y el medio semiinfinito. ¿Cuanto vale ahora la autoinducción de la espira? Sugerencia: a*

partir de las condiciones de contorno, demostrar que la solución para  $\mathbf{H}$  (pero no para  $\mathbf{B}$ ) correspondiente al problema vacío, puede trasladarse al problema de dos medios.

**Ejercicio:** Un cable coaxial de radio interior  $R_1$  y exterior  $R_2$  se llena de  $R_1$  a  $R_3$ ,  $R_1 < R_3 < R_4$ , de un medio aislante de permeabilidad  $\mu_1$  y desde  $R_3$  hasta  $R_2$  de otro medio de permeabilidad  $\mu_2$ . Calcular la autoinducción por unidad de longitud del cable.

**Ejercicio:** Un cable coaxial de radio interior  $R_1$  y exterior  $R_2$  se llena hasta la mitad de un medio aislante de permeabilidad  $\mu_1$ , siendo las interfaces de separación son radiales. La otra mitad se llena de un medio de permeabilidad  $\mu_2$ . Calcular la autoinducción por unidad de longitud del cable.

5. **La física clásica no da ni paramagnetismo ni diamagnetismo. Teorema de Bohr**

– **Van Leuven:** Las interpretaciones anteriores del diamagnetismo y el paramagnetismo son semi-clásicas. En el caso del diamagnetismo suponemos que los electrones se mueven en órbitas de radio medio cuantizado. En la segunda suponemos que las moléculas tienen momento magnético intrínseco. Ambas suposiciones tienen que ver con la mecánica cuántica. El teorema de Van Leuven establece que no puede haber una explicación puramente clásica de ninguno de estos fenómenos: un cuerpo compuesto de partículas “clásicas” cargadas no es ni diamagnético ni paramagnético. En efecto, la energía de un microestado de dicho cuerpo no puede depender del campo magnético aplicado, ya que la energía de una partícula cargada es:

$$U_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + q_i \phi_i \quad (298)$$

donde  $\phi_i$  es el potencial eléctrico creado en la posición de la partícula por las demás cargas del sistema. En la expresión precedente de  $U_i$  no aparece ningún término relacionado con el campo magnético, ya que las fuerzas magnéticas sobre cargas en movimiento no realizan trabajo sobre ellas (ver tema IV). De ese modo, la probabilidad de un microestado dado (un estado caracterizado por un punto en el espacio de las fases de coordenadas  $-\mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i$ ) no depende del campo magnético aplicado. Por tanto, según la estadística clásica, la distribución de microestados en el macroestado de equilibrio es idéntica con y sin campo magnético aplicado.

6. **Diamagnetismo perfecto de los superconductores:** En el interior de los cuerpos con conductividad  $\sigma \rightarrow \infty$  (conductores perfectos), debe ser  $\mathbf{E} = 0$ , ya que en caso contrario se generarían corrientes infinitas en su interior. Ello implica que el campo magnético  $\mathbf{B}$  deben ser constante en su interior, pues un campo variable con el tiempo crearía un campo  $\mathbf{E}$  inducido, según la ley de Faraday  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ .

Consideremos un cuerpo superconductor en presencia de un campo  $\mathbf{B}$  constante y una temperatura superior a la de transición a la superconductividad. Dado que a esa temperatura el cuerpo no presenta todavía propiedades superconductoras, el campo magnetostático  $\mathbf{B}$  penetra en el interior del cuerpo y es distinto de cero. Si hacemos descender la temperatura hasta que el cuerpo adquiera propiedades superconductoras, es decir

$\sigma \rightarrow \infty$ , cabe esperar que el campo magnetostático  $\mathbf{B}$  en su interior no varíe y permanezca con ese valor constante, independientemente de las variaciones de  $\mathbf{B}$  en el exterior del cuerpo. Ello sería así si la superconductividad consistiese simplemente en la aparición de una  $\sigma \rightarrow \infty$ . No obstante, la aparición de la superconductividad implica que  $\mathbf{B}$  se hace cero en el interior del superconductor. Este fenómeno es conocido como diamagnetismo perfecto de los superconductores, ya que puede describirse mediante la aparición de una permeabilidad magnética  $\mu \rightarrow 0$ . Así pues la superconductividad implica  $\sigma \rightarrow \infty$  y  $\mu \rightarrow 0$ .

Del hecho anterior y de (283) se deduce que la condición de contorno en la superficie de un medio superconductor es:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (299)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie, con independencia de que  $\mathbf{B}$  sea o no variable con el tiempo. Precisamente es este comportamiento observable de los superconductores el que permite deducir su diamagnetismo perfecto. Una descripción mas completa del comportamiento electromagnético de los superconductores se estudiará en la asignatura optativa "Electromagnetismo en la Materia".

7. **Relaciones constitutivas no lineales. Ferri- y ferromagnetismo:** El ferromagnetismo es un fenómeno colectivo que no puede ser explicado a partir de la interacción magnética en el nivel microscópico. Las fuerzas que dan lugar a la orientación de los momentos magnéticos moleculares en el ferro- y el ferrimagnetismo magnetismo no son de origen electromagnético, sino cuántico, y corresponden a la "interacción de intercambio" entre los spines atómicos (la interacción de intercambio tiene que ver con el principio de exclusión de Pauli y tiende a orientar los espines de partículas adyacentes en direcciones opuestas). No entraremos a analizar el efecto de esta fuerza. Sí diremos que es mucho más intensa que la magnética y que se manifiesta en elementos de transición con espines electrónicos no compensados (Fe, Ni, Co, etc.), así como en óxidos y compuestos cerámicos de dichos metales (ferrimagnetismo), dando lugar a la aparición de una intensa magnetización, incluso en ausencia de campo aplicado. Aquí no daremos una explicación detallada de esos fenómenos, limitándonos a dar un listado de las principales propiedades macroscópicas de los ferri- y ferromagnéticos (desde el punto de vista macroscópico la principal diferencia entre ellos es la baja conductividad de los ferrimagnéticos). Una descripción mas detallada de estos fenómenos se da en la asignatura optativa "Electromagnetismo en la Materia".

Propiedades de los materiales ferri- y ferromagnéticos:

- **Histéresis:** la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  no solamente es no lineal, sino que depende de la historia anterior del material.
- **Saturación:** a partir de un campo dado, el material alcanza un valor máximo de la magnetización, que corresponde a que todos los momentos magnéticos elementales están alineados (salvo una pequeña agitación térmica). Este valor de la magnetización se llama "magnetización de saturación"  $M_s$ . Para valores superiores del campo

las relaciones constitutivas son simplemente:  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_s)$ . El valor del campo  $H$  para el que se alcanza la saturación se llama "campo de saturación"  $H_s$ .

- **Ciclos de histéresis:** cuando el material se somete a un campo  $\mathbf{H}$  externo que varía con el tiempo de forma cíclica, el campo  $\mathbf{B}$  describe una curva cerrada en el plano  $H-B$ . Esta curva recibe el nombre de "ciclo de histéresis". El ciclo máximo corresponde al ciclo descrito cuando el material se lleva hasta la saturación en ambos extremos del ciclo, de modo que la magnetización varía entre  $M_s$  y  $-M_s$ . Existen no obstante infinitos ciclos de histéresis posibles.
- **Pérdidas de histéresis:** a partir de (295) se deduce que el trabajo que es necesario realizar por unidad de volumen para que el material describa un ciclo de histéresis viene dado por la integral a lo largo del ciclo:

$$w = \oint_C \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} = \Delta q > 0 \quad (300)$$

Esta cantidad debe ser positiva y el trabajo realizado se transforma en calor, constituyendo las denominadas "pérdidas por histéresis". **Nota:** No confundir con las pérdidas óhmicas que aparecen en los ferromagnéticos (que son conductores) como consecuencia de las f.e.m. internas originadas por la Ley de Faraday. Estas corrientes denominadas "corrientes de Foucault" se estudiarán en la asignatura optativa "Electromagnetismo en la Materia".

- **Remanencia:** como consecuencia de la existencia de ciclos de histéresis, ocurre que tanto  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{M}$  en el material no son nulos, incluso cuando  $\mathbf{H} = 0$  en su interior. Este fenómeno se llama remanencia y la magnetización correspondiente a la situación  $\mathbf{H} = 0$  en el ciclo máximo de histéresis, se denomina magnetización de remanencia  $M_r$ .
- **Coercitividad, campo coercitivo:** Del mismo modo, que  $\mathbf{B}$  sea nulo no implica que  $\mathbf{H}$  lo sea. El valor  $H_c$  del campo magnético para el cual  $B = 0$  en el ciclo máximo se denomina "campo coercitivo".
- **Campo de demagnetización:** en ausencia de un campo aplicado y salvo configuraciones excepcionales, el campo  $\mathbf{H}$  tampoco es cero en el interior del ferromagnético (ver algunos ejercicios mas adelante). Este campo interno se denomina "campo de demagnetización" porque su sentido es siempre contrario a  $\mathbf{M}$  y tiende a reducir la magnetización. En imanes permanente este campo de demagnetización tiende a reducir la imanación del imán con el tiempo.
- **Temperatura de Curie:** las propiedades de los ferri- y de los ferromagnéticos dependen de la temperatura, convirtiéndose en paramagnéticos por encima de cierta temperatura denominada temperatura de Curie  $T_c$ . Para el hierro  $T_c = 770^\circ C$ .

**Ejercicio:** *Demostrar (300) a partir de (295).*

8. **Linealización de los ciclos de histéresis, materiales "duros" "blandos". Imanes permanentes:** Los medios que presentan ciclos de histéresis máximos delgados, es decir

pocas pérdidas y valores pequeños de  $M_r$  y  $H_c$ , se denominan "blandos" aquellos que poseen ciclos de histéresis anchos, con valores altos de  $M_r$  y  $H_c$  "duros". Los ciclos de histéresis de ambos tipos de material pueden aproximarse hasta que se obtiene una relación lineal entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ .

En el caso de materiales "blandos" desprecian las pérdidas por histéresis hasta obtener un ciclo de área nula. Luego éste se aproxima por una región "paramagnética", para  $|\mathbf{H}| < H_s$ , en la que

$$\mathbf{B} \simeq \mu_{ef}\mathbf{H} \quad (301)$$

donde  $\mu_{ef}/\mu_0 \gg 1$  (del orden de  $10^3$  a  $10^5$ ) y otra, para  $|\mathbf{H}| > H_s$  en la que:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_s) \quad \text{ó} \quad \Delta\mathbf{B} = \mu_0\Delta\mathbf{H} \quad (302)$$

por haberse alcanzado la magnetización de saturación  $M_s$ .

En la linealización de un ciclo de histéresis de un material "duro" Se supone que el material pasa bruscamente de un valor a otro de la magnetización (de  $+M_r$  a  $-M_r$ ), siendo la relación entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  una relación del tipo:

$$\mathbf{B} \simeq \mu_0(\mathbf{H} \pm \mathbf{M}_r) \quad (303)$$

donde el signo  $+$  o  $-$  se elige dependiendo de en que lugar del ciclo de histéresis nos hallamos.

El hierro "dulce." de fundición es un ejemplo de ferromagnético "blando", con  $\mu_{ef}/\mu_0 \sim 5,500$  y el acero lo es de ferromagnético "duro", con una magnetización de saturación  $M_s \sim 10^6 \text{ Amp/m}$ . Los ferromagnéticos "blandos", especialmente las ferritas, se usan en transformadores y autoinducciones por sus pocas pérdidas. Los "duros" en la fabricación de imanes permanentes.

**Cuestión:** *A partir del resultado de un ejercicio anterior, indica cual es el campo de demagnetización de un imán permanente de forma esférica, magnetizado de modo uniforme hasta la saturación.*

**Ejercicio:** *Calcular el campo de demagnetización en el centro de un imán permanente formado por una lámina de superficie mucho mayor que su altura, magnetizada hasta la saturación en la dirección perpendicular a la lámina.*

9. **Comportamiento de ferromagnéticos "blandos" en presencia de campos externos. Medios de  $\mu \rightarrow \infty$ .** Cuando podemos linealizar el ciclo de histéresis de un ferromagnético blando, este se comporta como un medio paramagnético perfecto, con una permeabilidad efectiva  $\mu_{ef}$  mucho mayor que la del vacío:  $\mu_{ef} \rightarrow \infty$ . En el interior del material ferromagnético tenemos

$$\mathbf{H}_{int} = \mathbf{B}_{int}/\mu_{ef} \rightarrow 0 \quad (304)$$

para valores finitos de  $\mathbf{B}_{int}$ . Ello implica, de acuerdo con la condición de contorno (282) (con  $\mathbf{K} = 0$ ) que, en el exterior del ferromagnético blando las componentes tangenciales de

$\mathbf{H}$  también se anulan. Por contra, al ser  $\mathbf{B}$  finito dentro del ferromagnético, no se anulan las componentes normales (ver (283)) ni de  $\mathbf{B}$  ni de  $\mathbf{H}$  en el exterior del ferromagnético. Vemos pues que, desde el punto de vista de un observador exterior, un ferromagnético blando de alta permeabilidad se comporta frente al campo  $\mathbf{H}$  como se comporta en electrostática un conductor respecto al campo  $\mathbf{E}$ . Es decir, un cuerpo con  $\mu_{ef} \rightarrow \infty$  es una equipotencial del potencial escalar magnético  $\phi_m$ .

10. **Circuitos magnéticos:** La expresión (304) es válida siempre que en el interior del ferromagnético  $\mathbf{H}$  tome valores pequeños. Hay un caso en el que  $\mathbf{H}$  no puede despreciarse en el interior del ferromagnético. Ese caso es cuando el ferromagnético forma un circuito y por el “hueco” del circuito pasa una corriente eléctrica. En ese caso, de la ley de Ampère (279) se deduce que:

$$\oint \mathbf{H}_{int} d\mathbf{l} = I \quad (305)$$

Haciendo discurrir el camino de integración íntegramente por el interior del ferromagnético, vemos que  $\mathbf{H}_{int} \neq 0$  en éste (por tanto  $\mathbf{B} = \mu_{ef} \mathbf{H}$  se hace muy grande). Por otro lado, de (283) con  $\mu_{ef}/\mu_0 \gg 1$ , se deduce que, en el interior del ferromagnético:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_{int} = 0 \quad (306)$$

es decir que el campo  $\mathbf{H}_{int}$  es tangente a la interfaz entre el ferromagnético y el exterior. De aquí se deduce que las líneas de campo no pueden salir del ferromagnético. Es decir que el flujo magnético que atraviesa cualquier sección  $S$  del circuito ferromagnético es constante:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \mu_{ef} \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \text{Constante} \quad (307)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie de la sección  $S$ .

**Ejercicio:** *Un hilo de corriente  $I$  pasa por el hueco de un toro de material ferromagnético de permeabilidad  $\mu_{ef}$ , radio  $R$  y radio de su sección  $a \ll R$ . ¿Cuanto vale el campo  $\mathbf{H}$  en el interior del toro? ¿Y el flujo magnético  $\Phi$  que atraviesa una sección cualquiera del toro?. ¿Dependen estos valores de la forma en que el hilo de corriente atraviese el toro?*

**Cuestión:** *Responder al ejercicio anterior cuando el hilo de corriente pasa por las proximidades del toro, pero sin atravesarlo.*

**Ejercicio:** *Responder al ejercicio anterior cuando en lugar del hilo tenemos a un solenoide de  $N$  vueltas arrollado al toro. ¿Cuanto vale ahora la autoinducción del solenoide?. Indicar una posible utilidad de este dispositivo.*

**Cuestión:** *Calcular la inducción mutua entre el hilo y el solenoide de los ejercicios anteriores (ambos se suponen en interacción con el mismo toroide ferromagnético).*

11. **Entrehierros, electroimanes.** Una pequeña apertura en un circuito magnético que impida cerrarse a éste se denomina entrehierro. Según (307) el flujo que atraviesa el circuito magnético debe ser constante y, si el espesor del entrehierro es considerablemente

menor que su sección, el mismo flujo debe atravesar el entrehierro. Entonces, dado que la permeabilidad del entrehierro es mucho menor que la del ferromagnético, sucede que casi todo el campo  $\mathbf{H}$  se concentra en el entrehierro, generándose una zona de alto campo magnético (desde el punto de vista de la teoría de los circuitos magnéticos, un entrehierro es el equivalente a un condensador en un circuito eléctrico).

**Ejercicio:** *Supóngase que en el toroide ferromagnético de la sección anterior se practica un corte de espesor  $\delta \ll a$ . Demostrar que, en el caso del hilo de corriente, el campo  $H$  en el entrehierro vale aproximadamente  $H = I/\delta$  y en el caso del solenoide  $H = NI/\delta$ . Hacer la aproximación:  $\mu_{ef}/\mu_0 \rightarrow \infty$ .*

**Ejercicio:** *Calcular ahora la autoinducción del hilo y del solenoide, así como la inducción mutua entre ellos en la nueva configuración.*

**Ejercicio:** *Calcular la densidad de polo magnético en las paredes del entrehierro en los casos estudiados en los ejercicios anteriores.*

Un electroimán es una barra ferromagnética en forma de  $\ddot{U}$  similar, sobre la que se arrolla una bobina por la que se hace circular una intensidad  $I$ . Cuando los extremos de la  $\ddot{U}$  se acercan a un material ferromagnético, se forma un circuito magnético a través de la  $\ddot{Z}$  del ferromagnético, generándose un campo  $H$  intenso en el entrehierro entre los extremos de la  $\ddot{Z}$  el material ferromagnético que se pretende atraer. Este campo es el que atrae al material ferromagnético hacia el electroimán. La fuerza puede calcularse aplicando el principio de los trabajos virtuales (ver mas adelante).

## 12. Circuitos magnéticos en régimen variable con el tiempo. Transformadores.

Una bobina de  $N$  vueltas por la que circula una corriente  $I$  se arrolla a una sección de un circuito magnético. Si la intensidad  $I$  es variable con el tiempo, entonces la diferencia de potencial a la entrada de la bobina es:

$$V = -\mathcal{E} = N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad (308)$$

donde  $\Phi$  es el flujo magnético que atraviesa una sección del circuito magnético y  $L$  la autoinducción que, a consecuencia de los altos valores que alcanza  $\mathbf{B} = \mu_{ef}\mathbf{H}$  en el circuito, puede ser muy alta.

Si, en lugar de una bobina, tenemos  $m$  bobinas, la relación (308) se convierte en una relación matricial entre las tensiones  $V_i$  en cada bobina y las derivadas temporales de las intensidades  $dI/dt$ .

El caso con dos bobinas se conoce como transformador. Los signos de las intensidades en cada arrollamiento se eligen convencionalmente de modo que los flujos se restan cuando ambas intensidades son positivas. En estas condiciones la ecuación del transformador es:

$$V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad ; \quad V_2 = -M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (309)$$

donde  $L_i$  y  $M$  son coeficientes que dependen de las características del transformador. Si no hay pérdidas de flujo (o éstas pueden despreciarse), estamos ante un "transformador

ideal”, en el que se cumplirá que

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (310)$$

**Ejercicio:** *Demostrar (310). Sugerencia: téngase en cuenta que el flujo a través del circuito magnético debido a una intensidad dada  $I$  que lo atraviese, es independiente de por cual de las bobinas circule esa intensidad.*

**Ejercicio:** *Sobre un toroide ferromagnético de radio  $R$  y sección  $a \ll R$  se arrollan dos bobinas de  $N_1$  y  $N_2$  vueltas respectivamente. Demostrar que para el transformador así creado:*

$$L_i = (\mu_{ef} N_i^2 a^2) / (2R) \quad ; \quad M = \sqrt{L_1 L_2} \quad (311)$$

**Ejercicio:** *En muchos transformadores comerciales las bobinas están arrolladas en torno a un núcleo ferromagnético central, cerrándose el circuito mediante dos bucles laterales simétricos. Supóngase que el bloque central tiene longitud  $l$  y sección  $S$  y que los dos bucles laterales simétricos tienen longitud  $l'$  y sección  $S'$  cada uno, estando todos formados por materiales con la misma  $\mu_{ef}$ . Si en el núcleo central se arrollan dos bobinas de  $N_1$  y  $N_2$  vueltas, calcular  $L_i$  y  $M$  suponiendo que no hay pérdidas de flujo en el circuito.*

Los resultados de los ejercicios anteriores pueden generalizarse y, en general, para cualquier transformador ideal:

$$L_i = K N_i^2 \quad : \quad M = K N_1 N_2 \quad (312)$$

donde  $K$  es una constante característica del dispositivo. En ese caso, se cumplirá que:

$$V_1 N_2 + V_2 N_1 = 0 \quad (313)$$

**Ejercicio:** *Demostrar (313) a partir de (309) y (312).*

El caso del transformador ideal, en el que no hay pérdidas de flujo, solo puede darse cuando  $\mu_{ef} \gg \mu_0$ . Si hacemos la aproximación  $\mu_{ef} \rightarrow \infty$ , entonces  $K \rightarrow \infty$  en (312) y para obtener valores finitos de  $V_i$  en (309) debe cumplirse que:

$$N_1 \frac{dI_1}{dt} = N_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (314)$$

de donde:

$$I_1 N_1 = I_2 N_2 \quad (315)$$

siempre que se excluya el nivel de continua. Esta es la ecuación que define al transformador ideal en la teoría de circuitos.

**Ejercicio:** *Demostrar que si, a la salida del transformador ideal caracterizado por (313) y (315), se conecta una impedancia  $Z$ , se cumple que:*

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{I}_1} = \frac{N_1^2}{N_2^2} Z \quad (316)$$

es decir, la impedancia “vista” desde la entrada es  $Z_{ef} = (N_1/N_2)^2 Z$ .

Las expresiones anteriores son válidas cuando no hay pérdidas de flujo por las paredes del núcleo ferromagnético. Para tener en cuenta las pérdidas de flujo por las paredes del núcleo se sustituye en (309)  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$  con  $0 < k < 1$ . Además, los transformadores reales tienen pérdidas de potencia de dos tipos: pérdidas de histéresis y pérdidas por corrientes de Foucault (los ferromagnéticos suelen ser también conductores de la electricidad). Para tenerlas en cuenta se introduce una parte imaginaria en  $L_i$  y en  $M$ .

13. **Circuitos magnéticos que contienen imanes permanentes:** A veces es conveniente combinar imanes permanentes, aproximadamente descritos por la relación (303) con ferromagnéticos “blandos”, descritos por (301). Combinando la ley de Ampère (305) con la ley de la constancia del flujo a través del circuito (307) y las relaciones constitutivas (303) y (301) en las diferentes regiones del circuito, se pueden obtener entonces los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en el circuito.

**Ejercicio:** *En un circuito magnético se inserta un imán permanente. Demostrar que en la aproximación  $\mu_{ef} \rightarrow \infty$  para el ferromagnético “blando”, el campo de demagnetización en el imán permanente se anula, así como la densidad de polo magnético total sobre el mismo.*

**Ejercicio:** *Calcular ahora el campo de demagnetización en el imán para  $\mu_{ef}$  grande pero finita. Suponer que el imán tiene sección  $S$ , longitud  $l$  y magnetización  $M_s$  y que el resto del circuito tiene sección  $S'$ , longitud  $l'$  y  $\mu_{ef}$  homogénea. Suponer que no hay pérdidas de flujo en el circuito. Calcular el potencial escalar magnético y la densidad de polo magnético a lo largo del circuito y discutir la validez de la aproximación de flujo constante en las diferentes partes del mismo.*

Aparte de para reducir el campo de demagnetización en el imán, alargando así su vida, estas configuraciones son útiles para crear campos  $\mathbf{H}$  intensos a partir de imanes permanentes de forma arbitraria

**Ejercicio:** *Un imán permanente recto de longitud  $l$ , sección  $S$  y magnetización  $M_s$  se conecta a dos brazos ferromagnéticos “blandos” de  $\mu_{ef} \rightarrow \infty$  que dejan entre ellos un entrehierro de espesor  $\delta$  y sección  $S'$ . Calcular el campo  $\mathbf{H}$  en el entrehierro. Obsérvese que si  $\delta$  es pequeña y  $S' < S$ , el campo en el entrehierro puede llegar a ser muy alto. Calcular el potencial escalar magnético y la densidad de polo magnético a lo largo del circuito del ejercicio anterior. Discutir la validez de la aproximación utilizada (constancia del flujo) en función de los parámetros del sistema.*

**Ejercicio:** *Un imán permanente cilíndrico de radio  $R$ , altura  $l$  y magnetización  $M_s$  se coloca entre dos brazos ferromagnéticos blandos de  $\mu_{ef}$  grande pero finita, que dejan un entrehierro de sección circular de radio  $R' < R$ . Los brazos tienen una sección cilíndrica constante igual a la del imán de radio  $R$  y longitud  $l'$ , excepto en las proximidades del entrehierro, donde tienen secciones troncocónicas con el radio de la base igual a  $R$  y finalizando con radio igual al del entrehierro  $R'$ . La longitud de estas secciones troncocónicas es  $h$  y el espesor del entrehierro  $\delta$ . Suponiendo que no hay pérdidas de*

flujo a lo largo del circuito, calcular el campo  $\mathbf{H}$  a lo largo de las diferentes secciones de éste. Calcular el potencial escalar magnético y la densidad de polo magnético a lo largo del circuito del ejercicio anterior. Discutir la validez de la aproximación utilizada (constancia del flujo) en función de los parámetros del sistema.

14. **Energía en presencia de medios lineales:** Consideremos un medio que satisfaga la relación lineal mas general posible:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_r \quad (317)$$

que incluye tanto (296) (ó (301)) como (303). Entonces la expresión (294) puede integrarse entre el valor inicial  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{ini}$  y el valor final, siempre que ni  $\mu$  ni  $\mathbf{M}_s$  varíen durante el proceso, obteniéndose la energía magnética almacenada en el sistema:

$$U_M = \frac{1}{2} \int \mu(\mathbf{r})\mathbf{H} \cdot \mathbf{H} d\mathcal{V} - \frac{1}{2} \int \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}_{ini} \cdot \mathbf{H}_{ini} d\mathcal{V} \quad (318)$$

donde se ha utilizado que  $\delta\mathbf{B} = \mu\delta\mathbf{H}$ , de acuerdo con (317), siendo:

$$\delta u_M = \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H} \quad (319)$$

**Nota I:** Aquí pueden hacerse las mismas consideraciones que para  $U_E$  en el tema III, deduciéndose que (317) es, en realidad, el incremento de energía libre del sistema debido al campo magnético. Sólo cuando se desprecian las variaciones de  $\mu$  y  $\mathbf{M}_r$  con la densidad y la temperatura puede hablarse de energía magnética sin mas.

**Nota II:** En la deducción de (317) se ha supuesto que  $\mathbf{M}_s$  es constante. Es decir se han despreciado las posibles variaciones de la magnetización del cuerpo a consecuencia del campo aplicado. Esta aproximación solo es realista en el caso de imanes permanentes y supone despreciar las pérdidas por histéresis en el proceso de creación del campo. Si estas pérdidas no se desprecian el proceso resulta ser irreversible y el trabajo realizado a no coincide con la energía almacenada, por lo que no es posible deducir (318) de (294). Dicho de otro modo, la expresión (318) considera a  $\mathbf{M}_r$  como una propiedad del material, al igual que  $\mu$ , y no contiene la energía necesaria para magnetizar el material hasta obtener  $\mathbf{M}_s$ .

15. **Energía y fuerzas en un sistema de espiras en un medio lineal  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ :** En un medio de tales características  $\mathbf{H}_{ini} = 0$ . La expresión (318) es entonces del todo análoga a (237), excepto en el cambio de  $\mu_0$  por  $\mu(\mathbf{r})$  que entra en la integral. De ese modo todas las expresiones obtenidas en el Tema V, (249) – (259), se generalizan de inmediato para esta nueva situación.

**Ejercicio:** *Un electroimán está formado por una barra ferromagnética de  $\mu_{ef} \rightarrow \infty$  doblada en forma de “U”, sobre la que se arrolla una bobina de  $N$  vueltas por la que circula una intensidad  $I$ . Dicha “U” se acerca a una pieza de hierro cuya permeabilidad efectiva supondremos también infinita, de modo que entre los brazos de la “U” la pieza*

de hierro se forman dos entrehierros de sección  $S$  y espesor  $\delta$ . Calcular la fuerza con que el electroimán atrae a la pieza de hierro.

**Ejercicio:** Sobre un circuito magnético de permeabilidad  $\mu \rightarrow \infty$  se arrolla una bobina de  $N$  vueltas por la que circula una intensidad  $I$ . En el circuito hay un entrehierro de forma rectangular, de lados  $a$  y  $b$ , y espesor  $\delta$ . Una lámina paramagnética rectangular de lados  $a$  y  $b$ , permeabilidad  $\mu_1 > \mu_0$  y espesor  $\delta$  se introduce en el entrehierro hasta la mitad de éste, de modo que ocupa todo el lado  $b$  y llena el  $a$  hasta  $a/2$ . La placa puede deslizarse en la dirección del lado  $a$ . ¿Es atraída o repelida del interior del entrehierro? ¿Con que fuerza? Repetir el ejercicio para una lámina diamagnética de  $\mu_2 < \mu_0$ .

**Ejercicio:** Dos electrodos cilíndricos concéntricos de radios  $R_1$  y  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$  se sumergen en un líquido paramagnético y aislante de permeabilidad  $\mu$ . Una intensidad  $I$  se hace circular entre los electrodos, de modo que baje por uno de ellos y suba por el otro (ambos electrodos están interconectados en sus extremos). Despreciando los posibles fenómenos de tensión superficial ¿Hasta que altura media subirá el líquido entre los electrodos?.

**Ejercicio:** Calcular la fuerza que ejerce sobre un pistón anular conductor una corriente  $I$  circulando por unos electrodos coaxiales de radios  $R_1$  y  $R_2$  (el pistón cierra el circuito eléctrico).

16. **Energía de interacción y fuerza sobre un imán permanente en un campo externo:** Consideremos un imán permanente de magnetización uniforme  $\mathbf{M}_r$ , en cuyo interior se cumple

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_r) \quad (320)$$

colocado en un campo externo que supondremos creado por un sistema de espiras por las que circula una intensidad constante en un medio homogéneo de permeabilidad  $\mu_0$ . Aplicando el principio de los trabajos virtuales:

$$\mathbf{F}_\xi = -\frac{\delta W_{mec}}{\delta \xi} \quad (321)$$

donde  $\delta W_{mec}$  es el trabajo mecánico necesario para provocar el desplazamiento. Según el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que el desplazamiento se realiza manteniendo constante la intensidad en las espiras que generan el campo externo:

$$\delta U_M = \delta W_{total} = \delta W_{mec} + \delta W_G \quad (322)$$

donde  $\delta U_M$  es el incremento de la energía magnética  $\delta W_G$  el trabajo realizado por los generadores de corriente para mantener constante la intensidad de las espiras.

Para  $U_M$  podemos utilizar (318) (con  $\mu = \mu_0$ ). Ya que el segundo término en (318) es una constante que no cambia con el desplazamiento del imán:

$$\delta U_M = \frac{1}{2} \mu_0 \delta \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dV = \mu_0 \delta \int \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{H}_{iman} dV \quad (323)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{ext} + \mathbf{H}_{iman}$  y que tanto  $\mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{H}_{ext}$  como  $\mathbf{H}_{iman} \cdot \mathbf{H}_{iman}$  no varían con el movimiento del imán.

Pero dado que en imán no hay corrientes libres  $\mathbf{H}_{iman} = -\nabla\phi_{iman}$ , lo que introducido en (323), teniendo en cuenta que  $\mu_0\nabla \cdot \mathbf{H}_{ext} = \nabla \cdot \mathbf{B}_{ext} = 0$  da finalmente:

$$\delta U_M = \frac{1}{2}\mu_0\delta \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} d\mathcal{V} = 0 \quad (324)$$

de donde

$$W_{mec} = -W_G \quad (325)$$

En cuanto al trabajo de los generadores, éste viene dado por (256) que, teniendo en cuenta que el proceso es a intensidad constante puede escribirse también como:

$$\delta W_G = \delta \left( \sum_i I_i \Phi_i \right) \quad (326)$$

Utilizando (198) junto con la ley de Ampère (279) se pueden demostrar las igualdades:

$$\sum_i I_i \Phi_i = \sum_i I_i \oint_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d\mathcal{V} = \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\mathcal{V} \quad (327)$$

**Ejercicio:** *Demostrar (327). Sugerencia: utilizar la relación  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$ .*

Sustituyendo ahora (317) con  $\mu = \mu_0$  y usando (324) obtenemos

$$\delta W_G = \mu_0\delta \int (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}_r) d\mathcal{V} = \mu_0\delta \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}_r d\mathcal{V} \quad (328)$$

y dividiendo de nuevo el campo magnético en campo del imán y campo externo,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{iman} + \mathbf{H}_{ext}$ . obtenemos:

$$\delta W_G = \mu_0\delta \int \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{M}_r d\mathcal{V} \quad (329)$$

donde se ha tenido en cuenta que la variación de  $\mathbf{H}_{iman} \cdot \mathbf{M}_r$  durante el desplazamiento del imán se anula, pues éste arrastra su propio campo. De donde, usando (325) obtenemos finalmente:

$$\delta W_{mec} = -\mu_0\delta \int \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{M}_r d\mathcal{V} = \delta U_{int} \quad (330)$$

donde hemos llamado "energía de interacción",  $U_{int}$ , a la integral

$$U_{int} = -\mu_0 \int \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{M}_r d\mathcal{V} \quad (331)$$

y sustituyendo (330) en (321):

$$\mathbf{F}_\xi = -\frac{\partial U_{int}}{\partial \xi} \quad (332)$$

Aunque las expresiones (331) y (332) se han obtenido para un campo externo obtenido de determinada forma, son de validez general, pues evidentemente la fuerza (332) no va a depender del origen del campo externo.

Obsérvese como las expresiones (214) – (216) que describen la interacción de un dipolo magnético con un campo externo pueden considerarse un caso particular de (331) – (332).

**Ejercicio:** *Sobre un circuito magnético de permeabilidad  $\mu \rightarrow \infty$  se arrolla una bobina de  $N$  vueltas por la que circula una intensidad  $I$ . En el circuito hay un entrehierro de forma rectangular, de lados  $a$  y  $b$ , y espesor  $\delta$ . Un imán permanente en forma de lámina rectangular de lados  $a$  y  $b$ , magnetización  $\mathbf{M}_r$  perpendicular a la lámina y espesor  $\delta$  se introduce en el entrehierro hasta la mitad de éste, de modo que ocupa todo el lado  $b$  y llena el  $a$  hasta  $a/2$ . La placa puede deslizarse en la dirección del lado  $a$ . Calcular la fuerza con que el imán es atraído o repelido hacia dentro del entrehierro, indicando cuando es atraído y cuando repelido (en función del signo de  $\mathbf{M}_r$ )?*

17. **Fuerzas entre polos magnéticos. Analogía con la electrostática:** Las ecuaciones diferenciales que relacionan  $\mathbf{H}$ ,  $\phi_m$ ,  $\rho_M$  y  $\sigma_M$  (287) y (288) en un sistema libre de corrientes son en todo análogas a las ecuaciones de la electrostática. Esta analogía puede llevarse aún mas lejos si tenemos en cuenta que la integral de (331) puede expresarse también en función de las densidades de polo magnético. Teniendo en cuenta que, en un sistema libre de corrientes,  $\mathbf{H}_{ext} = -\nabla\phi_{ext}$ , la integral (331) se escribe también como:

$$U_{int} = -\mu_0 \int \rho_M \phi_{ext} dV + \oint \sigma_M \phi_{ext} dS \quad (333)$$

donde se a tenido en cuenta que  $\mathbf{M}_s \cdot \mathbf{H}_{ext} = -\mathbf{M}_s \cdot \nabla\phi_m = -\nabla \cdot (\mathbf{M}_0 \phi_{ext}) + \phi_{ext} \nabla \cdot \mathbf{M}_0$

La expresión (333) es en todo análoga a la que expresa la energía de interacción de una distribución de carga con un campo externo.

Para un sistema formado exclusivamente por imanes, ésta expresión puede finalmente transformarse, usando el teorema de reciprocidad (71) (que debe ser válido también aquí, en virtud de la analogía con (287) y (288)) en:

$$U_{imanes} = \frac{\mu_0}{2} \sum_i \left\{ \int_i \rho_M \phi_m dV + \oint_i \sigma_M \phi_m dS \right\} \quad (334)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los imanes del sistema. Esta integral expresa la energía de un sistema de imanes, que permite hallar las fuerzas mediante (332). La expresión (334) establece el nexo entre la primitiva teoría de los polos magnéticos y el electromagnetismo de Faraday–Maxwell.

## Tema VII: Ecuaciones de Maxwell

1. **Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell:** Tomando la divergencia de la ecuación de la ley de Ampère (279) y teniendo en cuenta que la divergencia del rotacional es idénticamente nula, tenemos que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , lo que está en contradicción con la ley de conservación de la carga en sistemas variables con el tiempo (17). Vemos pues que la Ley de Ampère, como toda la cuasimagnetostática, debe considerarse como una aproximación válida en el límite  $\partial\rho/\partial t \rightarrow 0$ . En caso contrario, la ley de Ampère debe sustituirse por la ecuación

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (335)$$

que, para el caso particular del vacío, se transforma en (235). El término  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , introducido por Maxwell, recibe el nombre de *corriente de desplazamiento*.

**Ejercicio:** *Demostrar que tomando la divergencia de (335) se obtiene la ley de conservación de la carga en forma diferencial.*

La ecuación (335) se combina ahora con el resto de las ecuaciones del campo electromagnético:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (336)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (337)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (338)$$

dando lugar a las “Ecuaciones de Maxwell” para el campo electromagnético, una de cuyas mas importantes características es que dan lugar a ondas electromagnéticas, que se propagan a la velocidad de la luz en cada medio.

**Ejercicio:** *Demostrar que, en el caso particular de un medio isótropo, caracterizado por una permitividad dieléctrica constante  $\epsilon$  y una permeabilidad magnética constante  $\mu$ , las ecuaciones (335) – (338) dan lugar a ondas electromagnéticas que se desplazan a la velocidad  $c = (\epsilon\mu)^{-1/2}$*

**Ejercicio:** *Demostrar que la divergencia de la corriente “total”, la de carga más la de desplazamiento, se anula siempre. Esto quiere decir que las líneas de la corriente “total” son siempre cerradas.*

2. **Teorema de Poynting y conservación de la energía** El “Vector de Poynting”,  $\mathbf{S}$ , se define por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (339)$$

y, a partir de las ecuaciones de Maxwell, se demuestra la identidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (340)$$

**Ejercicio:** Demostrar (340) a partir de (335) – (338). Sugerencia: usar la identidad  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$

Si consideramos una superficie cerrada  $\Sigma$ , podemos integrar (340) en todo su volumen para obtener:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \int_{\Sigma} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (341)$$

Podemos interpretar los términos de esta igualdad del siguiente modo: la segunda integral es el trabajo por unidad de tiempo realizado por el campo electromagnético sobre las partículas que componen la materia. Si es positiva significará que hay transferencia de energía del campo a la materia (como ocurre en el “efecto Joule”) y si es negativa ocurrirá que la energía se transfiere de las partículas al campo (como ocurre en los generadores). La tercera integral corresponde a la suma del trabajo por unidad de tiempo realizado en la variación de los campos eléctricos (134) y magnéticos (294). De acuerdo con esa interpretación, el flujo del vector de Poynting corresponde al flujo de energía electromagnética, completándose así el balance energético.

Supongamos ahora que el medio es lineal en sus propiedades electromagnéticas:  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  y  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Entonces (340) puede escribirse como:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) = 0 \quad (342)$$

Si consideramos una superficie cerrada  $\Sigma$ , podemos integrar (342) en todo su volumen para obtener:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dV = 0 \quad (343)$$

Podemos interpretar la tercera integral como correspondiente a la suma de las energías eléctrica,  $U_E$  (136), y magnética,  $U_M$  (318). A esta interpretación deben hacerse, sin embargo, las siguientes observaciones:

- Esta interpretación no tiene sentido en medios no lineales (por ejemplo, en medios magnéticos con ciclos de histéresis). En ese caso la expresión (343) no es válida, aunque si lo es (341), que es de validez general.
- Como vimos en los temas III y VI las cantidades  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$  y  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/2$  sólo pueden interpretarse como densidades de energía en el caso irreal de medios no sólo lineales, sino cuyas constantes características  $\epsilon$  y  $\mu$  no dependen de la densidad ni la temperatura del medio. Sólo en el caso de que esta dependencia pueda despreciarse, estas expresiones son aproximadamente válidas.

- Finalmente, las constantes  $\epsilon$  y  $\mu$  dependen en general del modo en que los campos varíen con el tiempo, de modo que sólo para variaciones que puedan considerarse lentas o cuasiestáticas, puede considerarse  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . En otro caso, incluso para medios lineales,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  dependen de los valores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  de un modo más complejo (351). En esos casos, la expresión (343) tampoco es válida (ni las cantidades  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$  y  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/2$  pueden interpretarse como densidades de energía).

**Ejercicio:** *Considérese un cable cilíndrico de longitud  $l$ , radio  $R$  y conductividad  $\sigma$ , que se coloca entre dos electrodos circulares de radio  $R$  y conductividad  $\sigma \rightarrow \infty$ . Supóngase que entre estos electrodos se establece una diferencia de potencial  $V$ . Demostrar que la energía disipada por efecto Joule en el cable es igual al flujo del vector de Poynting hacia dentro de éste.*

**Ejercicio:** *Considérese un condensador plano de placas circulares de radio  $R$ , separadas una distancia  $d \ll R$ . El condensador se está cargando merced a una intensidad externa  $I$ . Despreciando los efectos de borde, calcular la corriente de desplazamiento en el condensador y demostrar que es igual a  $I$ . Hacer el balance energético del proceso de carga del condensador, demostrando que el incremento de energía eléctrica es igual al flujo del vector de Poynting hacia dentro del condensador.*

### 3. Tensor de tensiones electromagnético y conservación de la cantidad de movimiento:

**Ejercicio:** *Considérense dos cilindros concéntricos no conductores de radios  $a$  y  $b > a$  y altura  $l \gg b$ . Sobre dichos cilindros se distribuyen uniformemente una carga  $Q$  en el interior y otra  $-Q$  en el exterior. El dispositivo puede girar libremente en torno a su eje. Todo él se coloca dentro de un solenoide superconductor de  $n$  vueltas por unidad de longitud, por el que circula una intensidad  $I$ . Supóngase ahora que se eleva la temperatura de modo que el hilo del solenoide adquiere una conductividad finita y la corriente decae a cero. Demostrar que, durante el tiempo en que la corriente cae a cero, el dispositivo formado por los cilindros adquiere un momento angular  $\mathbf{L}$  según la ecuación:*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} dV \quad (344)$$

donde la integral se extiende al volumen entre los cilindros y  $\mathbf{g} = \epsilon_0\mu_0\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}/c^2$ . Calcular también el valor numérico del momento angular final cuando  $Q$  es tal que la diferencia de potencial entre los cilindros es 1000 voltios,  $a = 10$  cm.,  $b = 20$  cm.,  $l = 1$  m.,  $n = 1000$  vueltas/metro e  $I = 10$  amperios.

El ejercicio anterior sugiere que el campo electromagnético en el espacio libre lleva asociada una densidad de cantidad de movimiento o momento lineal dada por

$$\mathbf{g} = \epsilon_0\mu_0\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}/c^2 \quad (345)$$

También sugiere que el efecto de dicha densidad es muy pequeño para los valores habituales de las cantidades eléctricas.

**Ejercicio:** *Demostrar que (345) es coherente a la vez con la interpretación de la luz como onda electromagnética y con la interpretación de la luz como un flujo de fotones de energía  $h\omega/(2\pi)$  y momento lineal  $hk/(2\pi)$  cada uno.*

La expresión (345) para la densidad de momento lineal en el espacio libre puede obtenerse a partir del siguiente razonamiento. Consideremos la fuerza de Lorentz (177) por unidad de volumen:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (346)$$

Cuando el medio es el vacío, podemos ahora eliminar  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  por medio de las ecuaciones de Maxwell, para obtener:

$$\mathbf{f} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \epsilon_0\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \epsilon_0\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu_0\mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mu_0\mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (347)$$

El segundo miembro de (347) puede también escribirse como la divergencia de un tensor  $T_{i,j}$ ;  $i, j = 1, 2, 3$  mediante:

$$[\mathbf{f} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})]_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} T_{i,j} \quad (348)$$

donde  $T_{i,j}$  es el Tensor de Tensiones de Maxwell, dado por:

$$T_{i,j} = \epsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \frac{1}{2} (\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \delta_{i,j} \quad (349)$$

donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de Kronecker.

**Ejercicio:** *Demostrar (347) y (348) a partir de (346). Sugerencia: vaya a la biblioteca y consulte el Jackson, pp.244 y ss.*

Si integramos (348) en el interior de una superficie cerrada y aplicamos el teorema de Gauss al último término (que no es sino la divergencia de un tensor de segundo orden), obtenemos:

$$\left[ \int \mathbf{f} d\mathcal{V} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\mathcal{V} \right]_i = \oint \sum_j T_{i,j} n_j d\mathcal{S} \quad (350)$$

donde  $n_j$  es el vector normal a la superficie.

La interpretación de (350) para un sistema de cargas y corrientes en el vacío es inmediata. La integral de la fuerza es la variación en el tiempo del momento mecánico asociado a las partículas cargadas. La segunda integral del primer miembro coincide con la integral de la densidad de momento lineal del campo electromagnético (345). Mientras que la integral del segundo miembro representa el flujo de la componente  $i$  del momento lineal a través de la superficie. De ahí el nombre de “tensor de tensiones.” aplicado a  $T_{i,j}$ .

**Ejercicio:** *Calcular la fuerza entre dos cargas puntuales de igual magnitud y signo mediante la integración del tensor de tensiones en el plano medio entre ellas. Repetir el ejercicio para cargas de distinto signo.*

En medios materiales la interpretación de (350) es mas dudosa. A primera vista parecería que (350) implica una densidad de momento lineal del campo electromagnético igual a  $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$  (es decir, igual a (350) tras sustituir los valores de  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  por  $\epsilon$  y  $\mu$ ). Sin embargo esta interpretación suele discutirse y se prefiere la expresión (345) para la densidad del momento lineal (ver la discusión al respecto en los libros citados en la bibliografía, en concreto en Panofsky, Jackson, Landau – Electrodinámica de medios continuos –, Bredov y Stratton). Un argumento de peso contra la expresión  $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$  es que, en relatividad, el tensor energía–impulso debe ser simétrico. No obstante, dado que el momento lineal del campo electromagnético no es el único que aparece en el sistema, esta condición solo implica que el tensor energía–impulso total debe ser simétrico. Otro argumento de mas peso es que, en realidad, medios lineales con constantes dieléctricas iguales a  $\mu$  y  $\epsilon$  para cualquier tipo de variación temporal de los campos no existen (ver mas adelante), de modo que la sustitución sin mas de  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  por  $\epsilon$  y  $\mu$  en (350) no está justificada. La sustitución de  $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$  por (345) implica la aparición de fuerzas adicionales en (348) diferentes de las deducidas del tensor de tensiones. La magnitud de dichas fuerzas sería, de todos modos, tan pequeña, que no se ha podido determinar experimentalmente su existencia o no. El tema de cual es la expresión correcta para la densidad de momento lineal electromagnética en medios lineales es un tema abierto hoy en día.

4. **Ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia:** Las relaciones constitutivas de medios lineales se expresan mejor en el dominio de la frecuencia, es decir para fasores. Ello es así porque las relaciones en el dominio del tiempo toman la forma de una integral de convolución. Para medios lineales:

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t') \mathbf{E}(t - t') dt' \quad (351)$$

donde el principio de causalidad impone que  $\chi_e(t') = 0$  para  $t' < 0$ , de modo que la integral se extiende sólo a los instantes anteriores a  $t$ . Si consideramos un campo  $\mathbf{E}$  que varíe armónicamente con el tiempo a frecuencia  $\omega$ , la relación (351) supone la siguiente relación entre los fasores de  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e(\omega)) \mathbf{E} = \epsilon(\omega) \mathbf{E} \quad (352)$$

donde  $\chi_e(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\chi_e(t')$ :

$$\chi_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t') e^{-j\omega t'} dt' \quad (353)$$

Análogamente entre los fasores de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en un medio lineal se da la relación:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m(\omega)) \mathbf{H} = \mu(\omega) \mathbf{H} \quad (354)$$

de ese modo las relaciones lineales no locales en el tiempo (351) (y su análoga para medios magnéticos), adquieren en el dominio de la frecuencia (o fasorial) la forma mucho mas simple dada por (352) y (354).

Las ecuaciones de Maxwell para fasores toman la forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad (355)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \quad (356)$$

Nótese que las otras dos ecuaciones se deducen de (355) y (356) y de la ecuación de conservación de la carga para fasores:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega\rho = 0 \quad (357)$$

y para medios lineales se completan mediante las relaciones constitutivas (352) y (354).

Las relaciones (352) – (356) son útiles porque cualquier campo real  $\mathbf{E}(t)$  puede escribirse como una integral de Fourier (o una serie para campos periódicos en el tiempo):

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (358)$$

de los fasores  $\mathbf{E}(\omega)d\omega$  dados por:

$$\mathbf{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t)e^{-j\omega t} dt \quad (359)$$

donde hemos extendido el concepto de fasor a frecuencias negativas, pero nótese que para que  $\mathbf{E}$  sea real debe cumplirse que

$$\mathbf{E}(-\omega) = \mathbf{E}^*(\omega) \quad (360)$$

y

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}(\mathbf{E}(\omega)e^{j\omega t}) d\omega \quad (361)$$

Las ecuaciones (358) – (361) clarifican la relación entre fasores y transformadas de Fourier.

**Ejercicio:** *Demostrar que la conductividad óhmica de un medio puede tratarse, junto con su permitividad dieléctrica, como formando parte de una constante dieléctrica compleja  $\hat{\epsilon} = \epsilon - j\sigma/\omega$ . En ese caso el fasor del vector desplazamiento eléctrico incluye, en su parte imaginaria, las corrientes óhmicas de conducción:  $\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} - j\mathbf{J}_{Ohm}/\omega$ .*

5. **Teorema de Poynting complejo:** De acuerdo con la propiedad (266) de los fasores, el vector de Poynting complejo:

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (362)$$

cumple la propiedad:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \text{Re}(\hat{\mathbf{S}}) \quad (363)$$

pero las propiedades de (362) van mas allá de (363). En efecto, de (355) y (356) se deduce que:

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{S}} + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* - j\omega\frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) \quad (364)$$

**Ejercicio:** *Demostrar (364).*

Si consideramos una superficie cerrada  $\Sigma$  e integramos en su volumen interior, obtenemos:

$$\oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* d\mathcal{V} - j\omega \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) d\mathcal{V} = 0 \quad (365)$$

Para un medio lineal caracterizado por unas constantes  $\epsilon(\omega)$  y  $\mu(\omega)$ , (98) toma la forma:

$$\oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* d\mathcal{V} - j\omega \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\epsilon |\mathbf{E}|^2 - \mu |\mathbf{H}|^2) d\mathcal{V} = 0 \quad (366)$$

La interpretación de la parte real de (366) no es otra que el balance de energía promediado en el tiempo. Nótese que para campos que varían armónicamente con el tiempo, el promedio de la energía electromagnética almacenada en el interior de la superficie cerrada  $\Sigma$  es una constante, de modo que el promedio temporal del flujo de energía hacia el exterior debe ser igual al de la potencia suministrada al campo por las partículas:

$$\operatorname{Re} \left\{ \oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} \right\} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* d\mathcal{V} \right\} \quad (367)$$

cuando el medio en el interior de  $\Sigma$  es un medio óhmico, el segundo miembro incluye las pérdidas por efecto Joule.

La parte imaginaria de (366) también admite una interpretación, al menos cuando el medio en el interior de  $\Sigma$  es un medio óhmico. En ese caso la integral de  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* = \sigma |\mathbf{E}|^2$  es real y:

$$\operatorname{Im} \left\{ \oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} \right\} = \frac{1}{2} \omega \int_{\Sigma} (\epsilon |\mathbf{E}|^2 - \mu |\mathbf{H}|^2) d\mathcal{V} = 2\omega (\langle U_E \rangle - \langle U_M \rangle) \quad (368)$$

Es decir, el flujo hacia afuera de la parte imaginaria del vector de Poynting complejo, nos da la diferencia entre los promedios temporales de las energías eléctrica y magnética almacenadas dentro de la superficie  $\Sigma$ .

**Ejercicio:** *Considérese un condensador plano de placas circulares de radio  $R$ , separadas una distancia  $d \ll R$ . El condensador se está cargando merced a una intensidad externa que varía armónicamente con el tiempo a la frecuencia  $\omega$ , cuyo fasor es  $I$ . Despreciando los efectos de borde, calcular el flujo del vector de Poynting complejo hacia fuera del condensador, demostrando que es imaginario e igual a dos veces el promedio de la energía eléctrica almacenada en el condensador (ya que la energía magnética almacenada en un condensador es despreciable frente a la eléctrica).*

**Ejercicio:** *Demostrar que las interpretaciones enunciadas para la parte real y la parte imaginaria de (366) se mantienen cuando las corrientes óhmicas se incorporan a  $\mathbf{D}$  mediante la constante dieléctrica compleja  $\hat{\epsilon}$  definida en el ejercicio anterior.*

**Ejercicio:** *Discutir, a la luz del teorema de Poynting complejo (366), el significado de una posible parte imaginaria en la constante dieléctrica  $\epsilon$  definida en (352) y (353),*

*demostrando que está asociada a una corriente de polarización  $\partial\mathbf{P}/\partial t$  en fase con el campo eléctrico, que genera pérdidas de potencia de modo análogo a la corriente óhmica de conducción.*

6. **Ondas planas monocromáticas:** Las ondas planas monocromáticas son soluciones a las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia (355) y (356) dadas por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (369)$$

Puede verse que el fasor dado por (369) representa una onda propagándose en la dirección definida por  $\text{Re}(\mathbf{k})$  con velocidad de fase dada por  $\omega/|\text{Re}(\mathbf{k})|$ . Sustituyendo (369) en (355) y (356):

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (370)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = \omega \mathbf{D} \quad (371)$$

para medios lineales, caracterizados por unas constantes  $\epsilon(\omega)$  y  $\mu(\omega)$ , la solución de éstas ecuaciones es una onda plana de vector de onda dado por:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \omega^2 \epsilon(\omega) \mu(\omega) \quad (372)$$

y tal que:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (373)$$

(372) y (373) se deducen multiplicando (370) y (371) por  $\mathbf{k}$  vectorial y escalarmente respectivamente.

El caso mas simple de onda plana es aquel en el que  $\epsilon(\omega)$  y  $\mu(\omega)$  son reales (medios sin pérdidas) y  $\mathbf{k}$  se toma también real. Entonces la solución es una onda plana de constante de propagación

$$k = |\mathbf{k}| = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (374)$$

que se propaga con la velocidad de fase:

$$v_f(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}} \quad (375)$$

y velocidad de grupo  $v_g = \partial\omega/\partial k$ , que sólo coincide con la de fase en el caso en el que ni  $\epsilon$  ni  $\mu$  dependen de la frecuencia. Este caso nunca es estrictamente cierto en medios materiales, aunque en algunos casos y a ciertas frecuencias puede considerarse aproximadamente cierto. A los medios que cumplen esa condición (siempre en algún rango de frecuencias) se les denomina medios “dulces”. La relación entre los módulos de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en una onda plana homogénea viene dad por:

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (376)$$

donde  $\eta$  se mide en ohmios y se denomina la “impedancia de onda” del medio.

**Ejercicio:** *Considérese el caso mas general de onda plana propagándose en un medio “dulce”on vector de onda  $\mathbf{k}$  arbitrario. Demostrar que en el caso mas general  $\mathbf{k}$  puede ser complejo, de la forma  $\mathbf{k} = \beta\mathbf{n}_r - j\alpha\mathbf{n}_i$ , donde  $\beta$  y  $\alpha$  son números reales que satisfacen la ecuación  $\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\epsilon\mu$  y  $\mathbf{n}_r$  y  $\mathbf{n}_i$  son perpendiculares entre sí ( $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{n}_i = 0$ ), es decir se trata de ondas que se propagan en la dirección dada por  $\mathbf{n}_r$  y se atenúan en la dirección perpendicular a  $\mathbf{n}_r$  dada por  $\mathbf{n}_i$ . Estas ondas se denominan ondas planas “no homogéneas”por contraposición a las ondas con  $\mathbf{k}$  real estudiadas mas arriba, que se denominan “homogéneas”.*

**Ejercicio:** *Demostrar la “ley de Snell”para la refracción y la reflexión de ondas planas inhomogéneas en la interfaz entre dos medios dieléctricos. Demostrar que se generan ondas planas inhomogéneas en la reflexión total de ondas planas homogéneas en la interfaz entre un medio mas denso y otros menos denso. Sugerencia: utilizar la continuidad de la componente del vector  $\mathbf{k}$  paralela a la interfaz.*

**Ejercicio:** *Demostrar que en las ondas planas no homogéneas en un medio “dulce”, los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  no pueden ser ambos perpendiculares a la dirección de propagación  $\mathbf{n}_r$ , pero que las soluciones pueden clasificarse en ondas transverso eléctricas ó TE, en las que  $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{E} = 0$  y ondas transverso magnéticas ó TM, en las que  $\mathbf{n}_r \cdot \mathbf{H} = 0$ .*

**Ejercicio:** *Hallar las amplitudes relativas de la onda reflejada y la onda transmitida en la reflexión de ondas planas homogéneas en la interfaz plana entre dos medios dieléctricos. Considerar los dos casos ortogonales: campo  $\mathbf{E}$  paralelo al plano de incidencia y campo  $\mathbf{E}$  normal al plano de incidencia. Hallar el ángulo de transmisión total o “ángulo de Brewster”para polarización en el plano de incidencia. Sugerencia: las condiciones de contorno en la interfaz se deducen de (355) y (356) e implican la continuidad de las componentes de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  tangentes a la interfaz.*

**Ejercicio:** *Aplicar los resultados de los ejercicios anteriores a la reflexión de ondas planas homogéneas en la interfaz entre el aire y un buen conductor ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ). Demostrar que la onda transmitida se propaga en dirección casi perpendicular a la interfaz con una longitud de onda igual a  $2\pi\delta$ , donde  $\delta$  es la distancia de penetración. Sugerencia: usar la constante dieléctrica compleja  $\hat{\epsilon} = \epsilon + \sigma/(j\omega)$  para caracterizar el conductor.*

El vector de Poynting complejo (362) de una onda plana viene dado por (362). Para ondas planas homogéneas en un medio “dulce”,  $\mathbf{k}$  es real de modo que:

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{\omega\mu}|\mathbf{E}|^2\mathbf{k} = \frac{1}{\omega\epsilon}|\mathbf{H}|^2\mathbf{k} \quad (377)$$

$\hat{\mathbf{S}}$  es real y, de acuerdo con (368), las densidades de energía magnética y eléctrica son iguales. La parte real del vector de Poynting indica la dirección del flujo de energía, que en medios isótropos coincide con la dirección de propagación  $\mathbf{k}$ .

**Ejercicio:** *Hallar el vector de Poynting complejo para ondas planas inhomogéneas TE y TM en un medio “dulce”. Indicar la dirección del flujo de energía y si en esas ondas predomina la energía eléctrica o magnética.*

**Ejercicio:** Hallar la fuerza por unidad de superficie que ejerce una onda plana homogénea cuando incide normalmente sobre un conductor perfecto. Esta fuerza se denomina presión de radiación. Sugerencia: utilizar el tensor de tensiones (349) en el dominio de la frecuencia para calcular esa fuerza.

**Ejercicio:** Demostrar que el resultado del ejercicio anterior es coherente con la interpretación de la luz como un flujo de fotones de energía igual a  $h\omega/(2\pi)$  y momento lineal  $\omega k/(2\pi)$ .

7. **Potencia activa y reactiva en circuitos de dos terminales:** Consideremos un sistema electromagnético rodeado por una superficie  $\Sigma$  por la que asoman dos terminales, sometido a una excitación de frecuencia  $\omega$ . Supondremos que puede definirse una diferencia de potencial entre los terminales y que uno de ellos está a potencial cero (esto siempre puede hacerse, pues el potencial está indeterminado en una constante arbitraria). Consideremos la integral del vector de Poynting complejo (362) sobre la superficie  $\Sigma$ . Dado que sobre  $\Sigma$  hemos supuesto que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ :

$$\oint_{\Sigma} \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{ndS} = -\frac{1}{2}VI^* = -\frac{1}{2}ZII^* \quad (378)$$

donde  $V$  e  $I$  es el potencial y la intensidad entrante en el terminal activo (el que no está a tierra) y donde se ha supuesto que el sistema es lineal, de modo que puede definirse una impedancia compleja  $Z\omega = V/I$  que caracteriza al circuito.

**Ejercicio:** Demostrar (378) a partir de  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Sugerencia: usar la relación  $\nabla \times (\phi\mathbf{H}) = \nabla\phi \times \mathbf{H} + \phi\nabla \times \mathbf{H}$ .

La interpretación de (378) es clara a la luz del teorema de Poynting complejo. Si escribimos  $Z = R + jX$ , la cantidad:

$$R|I|^2 = \langle P \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(VI^*) \quad (379)$$

es la potencia promedio suministrada al elemento de circuito desde los terminales, que coincide con la potencia disipada en el mismo. Por otra parte, la cantidad:

$$X|I|^2 = \frac{1}{2}\text{Im}(VI^*) = 2\omega(\langle U_M \rangle - \langle U_E \rangle) \quad (380)$$

es la diferencia entre la energía eléctrica y magnética almacenadas en el elemento de circuito en promedio temporal. La parte imaginaria de la impedancia  $X$  se denomina “reactancia” la integral (380) “potencia reactiva”. Un circuito con  $X > 0$  se denomina “inductivo” acumula, en promedio, mas energía magnética que eléctrica. Un circuito con  $X < 0$  se denomina “capacitivo” acumula, en promedio, mas energía eléctrica que magnética.

**Cuestión:** Indicar cualitativamente si una instalación industrial compuesta mayoritariamente por motores eléctricos presentará al exterior una reactancia inductiva o capacitiva.

**Ejercicio:** *Demostrar que una fuente de potencial alterna  $V$  que suministra una intensidad de módulo dado  $|I|$ , suministra el máximo de potencia cuando  $V$  e  $I$  están en fase, es decir cuando la impedancia exterior (impedancia de carga) es real.*

**Cuestión:** *Dado que las pérdidas óhmicas en los cables que transportan la electricidad comercial son proporcionales al módulo de la intensidad, desde el punto de vista de la eficiencia energética interesa que la impedancia ofrecida a la red eléctrica por los usuarios sea real (de hecho, las compañías eléctricas penalizan a los usuarios que no cumplen este requisito). Para el caso de la instalación industrial de la cuestión anterior, indicar que podría hacerse para eliminar la reactancia ofrecida a la red.*