

Complejidad computacional para problemas de etiquetado y conexiones ortogonales ^{*}

M. A. Garrido, A. Márquez, J. R. Portillo y P. Reyes

Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Sevilla (España)

vizuite@us.es, almar@us.es, josera@us.es, preyes@us.es

Resumen

Presentamos con este trabajo la línea de investigación que estamos desarrollando en la actualidad, exponiendo resultados ya obtenidos así como problemas abiertos a tratar a corto plazo. La ortogonalidad es el ingrediente principal de nuestro estudio, particularizada en problemas de etiquetado y conexiones ortogonales. La importancia de este tipo de problemas radica en su aplicación a sistemas de información o al diseño de circuitos impresos.

Además del tipo de problema tratado, la diferente complejidad computacional obtenida delimita las dos secciones principales de este trabajo. En la primera se exponen algoritmos eficientes para distintas variantes del etiquetado de puntos alineados, situación que posee aplicación directa al etiquetado de redes de metro. La segunda sección se dedica al estudio de diferentes problemas de optimización sobre conexiones ortogonales y etiquetado, los cuales tienen en común su naturaleza NP-dura, la cual puede ser débil o fuerte, hecho que, conjuntamente con la complejidad de los problemas de decisión asociados, diferencia a los casos estudiados. La intratabilidad obtenida conduce a la aplicación de diferentes heurísticas para la aproximación de los problemas tratados. Actualmente estamos trabajando en el diseño de algoritmos genéticos, aplicación de la búsqueda tabú, programación dinámica, etc.

1 Introducción

La ortogonalidad es una característica de numerosas situaciones que surgen en diferentes áreas. El estudio presentado en este trabajo trata diversos problemas en los que la ortogonalidad está presente, pero que podemos enmarcar, más particularmente, dentro del campo del *etiquetado y conexiones ortogonales* de puntos.

Es obvia la necesidad de situar etiquetas sobre los diferentes sistemas de información (mapas geográficos, de ciudades, redes de metro, etc.) de manera que ordenen y permitan una clara visualización del contenido a exponer. La trascendencia de los problemas de etiquetado queda demostrada al ser calificada por la ACM Computational Geometry Impact Task Report [2] como área importante de investigación. Se puede encontrar una extensa bibliografía sobre etiquetado en [7].

También debemos destacar la importancia de los problemas sobre conexiones ortogonales de puntos, los cuales aparecen en multitud de aplicaciones de Electrónica-Informática, como el trazado de circuitos VLSI o el diseño de bases de datos [1, 5].

Con este trabajo presentamos los temas estudiados recientemente en los campos anteriormente mencionados, así como la línea de investigación a seguir en los problemas que permanecen abiertos. No presentaremos los resultados con todo detalle y rigor, sino que daremos una visión general de ellos.

^{*}Parcialmente financiado por el grupo de investigación FQM—0164, adscrito al proyecto PAI

La primera sección está dedicada al etiquetado de puntos alineados. Un ejemplo cercano de la necesidad de etiquetar localizaciones representadas por puntos alineados lo encontramos en las redes de metro, en las cuales las líneas pueden ser horizontales, verticales o inclinadas. Este hecho hace que distingamos en nuestro análisis el caso de puntos alineados horizontalmente (el caso vertical es análogo) y el de puntos sobre una línea oblicua, presentando los distintos algoritmos polinomiales obtenidos según la variante estudiada.

Los problemas estudiados en la última sección son de naturaleza NP-dura; uno de ellos versa sobre conexiones ortogonales de pares de puntos en el plano y los otros sobre etiquetado. Presentaremos la diferencia computacional entre ellos y la línea de investigación que seguimos en la actualidad.

2 Algoritmos eficientes para el etiquetado de puntos alineados

Dados n puntos alineados en el plano y una etiqueta rectangular (paralela a los ejes coordenados) de dimensiones dadas asociada a cada punto, abordamos el problema de localizar las etiquetas de forma que cada punto esté contenido en el borde de su etiqueta asociada y no se produzcan intersecciones entre ellas. El estudio lo clasificamos atendiendo a los siguientes elementos:

- a) Tipo de recta: horizontal o inclinada;
- b) Tipo de etiqueta: cuadrada o rectangular;
- c) Posición relativa del punto a etiquetar y de su etiqueta asociada: aquél es un vértice de ésta o es cualquier punto de su borde;
- d) Tamaño de las etiquetas: son todos iguales o diferentes.

2.1 Puntos sobre una línea horizontal

En el caso de puntos alineados horizontalmente (análogamente, verticalmente), hemos obtenido diversos resultados polinomiales [3, 4]. Se ha demostrado la naturaleza NP-completa del problema con etiquetas deslizantes (cada punto puede situarse en cualquier lugar del perímetro de su etiqueta). En la última sección de este trabajo volveremos sobre este caso para estudiarlo más profundamente.

2.2 Puntos sobre una línea inclinada

Han sido diversas las variantes abordadas cuando los n puntos se encuentran alineados bajo una recta oblicua, atendiendo al tipo de etiquetas y a la posición de los puntos sobre los rectángulos. Hemos obtenido resultados polinomiales para los problemas de decisión, así como para los de optimización, en los que se maximiza los tamaños de las etiquetas [3, 4].

Es posible consultar en la siguiente dirección los trabajos relacionados con el etiquetado de puntos alineados: <http://apollo.us.es/discrete/egc2001.ps> y <http://apollo.us.es/discrete/line.ps>

3 Heurísticas para la aproximación de problemas de optimización

Tras los resultados de naturaleza intratable que hemos obtenido en el estudio de puntos alineados, hemos encaminado nuestra línea de estudio al tratamiento de problemas de optimización, tanto en el campo de las conexiones ortogonales como del

etiquetado, cuya naturaleza NP–dura requiere la aplicación de diferentes heurísticas para su aproximación.

Nos centramos en tres problemas de decisión que se diferencian claramente en el tipo de NP–completitud que presentan. En el ámbito de las conexiones ortogonales tratamos el *emparejamiento de pares de puntos en el plano mediante conexiones ortogonales que contengan a lo más cambio de dirección*. El problema de decisión se resuelve en tiempo cuadrático y el que optimiza el número de parejas de puntos que se pueden conectar simultáneamente es NP–duro [6].

Por el contrario, los dos siguientes problemas son NP–completos en su formulación como problemas de decisión. Comentamos en la anterior sección la naturaleza intratable del *etiquetado de puntos alineados horizontalmente con etiquetas deslizantes*. Sin embargo, hemos demostrado que es posible aproximar la solución de este problema mediante un algoritmo pseudo–polinomial. Este hecho hace que la NP–completitud obtenida sea calificada de débil. Hay que destacar que es el primer problema de etiquetado que se conoce con esta naturaleza.

Por último, abordamos el estudio de la *conexión de ternas de puntos en el plano mediante trazados ortogonales con a lo más tres cambios de dirección*. Este problema se puede tratar como lazo de unión entre el campo del etiquetado y el de conexiones ortogonales, ya que permite una doble formulación. Hemos demostrado que el problema de decisión correspondiente es intratable y, aún más, a diferencia del anterior, es fuertemente NP–completo.

Ante esta situación, nos fijamos el objetivo de generar un esquema general de distintos métodos de aproximación, que permita ser aplicado a los problemas mencionados. Como heurísticas a tratar podemos decir que hemos diseñado un algoritmo genético para el primer caso y que estamos trabajando en la posibilidad de otros métodos como búsqueda tabú, programación dinámica, “simulated annealing”, etc.

Referencias

- [1] C. Batini, E. Nardelli y R. Tamassia. A Layout Algorithm for Data–Flow Diagrams. *IEEE Trans. on Software Engineering*, SE–12.4, páginas 538–546, 1986.
- [2] B. Chazelle y 36 coautores. The computational geometry impact task force report. En B. Chazelle, J. E. Goodman y R. Pollack, editores, *Advances in Discrete and Computational Geometry*, volumen 223, páginas 407–463. American Mathematical Society, Providence, 1999.
- [3] M.A. Garrido, A. Márquez, C. Iturriaga, J.R. Portillo, P. Reyes y A. Wolff. Etiquetado de puntos alineados. *IX Encuentro de Geometría Computacional*, Gerona (España), 2001.
- [4] M.A. Garrido, A. Márquez, C. Iturriaga, J.R. Portillo, P. Reyes y A. Wolff. Labeling Subway Lines. *Twelfth Annual International Symposium on Algorithms and Computation*, Christchurch, Nueva Zelanda (Australia), 2001.
- [5] T. Lengauer. *Combinatorial Algorithms for Integrated Circuit Layout*. John Wiley & Sons, 1990.
- [6] R. Raghavan, J. Cohoon y S. Sahni. Single Bend Wiring. *Journal of Algorithms*, 7, páginas 232–257, 1986.
- [7] A. Wolff y T. Strijk. The Map-Labeling Bibliography. <http://www.math-inf.uni-greifswald.de/map-labeling/bibliography/>, 1996.