Etiquetado de puntos alineados

M.A. Garrido[1], C. Iturriaga[2], A. Márquez[1], J.R. Portillo[1] y P. Reyes[1]

[1] Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla (Spain).
{vizuete, almar, josera, preyes@cica.es}
[2] Computer Science Dept. Univ. of New Brunswick (Canada).
citurria@unb.ca

Resumen

Uno de los problemas fundamentales en cartografía es la de situar etiquetas asociadas a elementos distinguidos de los mapas. Este planteamiento da lugar a numerosos problemas, entre otros ha merecido especial atención la de situar etiquetas asociadas a puntos. La mayoría de las variantes de este problema son NP-completas. En este trabajo analizamos la mayoría de las variantes consideradas en la literatura cuando los puntos están situados sobre una línea horizontal.

1 Introducción.

Una de las tareas fundamentales en cartografía es la de situar etiquetas asociando textos a los distintos accidentes geográficos (etiquetado de mapas o map labeling en inglés). Incluso dicho problema ha sido identificado como uno de los problemas claves por la ACM Computational Geometry Impact Task Force [1]. Wolff y Strijk proporcionan una buena bibliografía sobre la materia [7].

Sin embargo mucho de los problemas asociados al etiquetado de mapas son computacionalmente muy complejos y aunque se consiguen simplificar algo los problemas cuando las etiquetas están asociadas a puntos (tales como ciudades en un mapa de un país o edificios en un plano de una ciudad), aún en dicho caso suelen ser muy complejos. Normalmente el problema que refleja mejor la mayoría de los problemas que se plantean etiquetando puntos es el siguiente:

LPWR: dado un conjunto de n puntos en el plano y rectángulos con lados paralelos a los ejes, asociados a cada punto, situar cada rectángulo de tal forma que su punto ocupe una de las cuatro esquinas y que no se solapen.

Se sabe que el problema LPWR es NP-completo [2, 4, 5, 6] y sólo se conocen hasta la fecha soluciones exactas polinomiales para el caso en el que cada punto pueda estar en dos esquinas prefijadas de su rectángulo y no en cuatro [2].

Aunque el problema LPWR es ya en sí suficientemente complicado, existe diversas generalizaciones de él que tratan de modelar situaciones que se plantean en cartografía como el LPWSR, en esta variante el punto no tiene porqué ser un vértice del rectángulo y puede ocupar cualquier lugar en su borde (o sólo en sus lados horizontales–LPWHSR– o verticales– LPWVSR).

Existe una generalización que tiene sus aplicaciones cuando el texto a incluir no es un nombre (una palabra) sino un párrafo más amplio que contenga algún tipo de información sobre el punto que estamos etiquetando. En dicha variante, que es conocida como de rectángulos elásticos, las dimensiones de los rectángulos no están prefijadas, sino sólo su área (y una anchura y altura mínimas) y así habrá que determinar, además de la posición de cada rectángulo, su ancho y altura.

En este trabajo estudiamos todas las variantes indicadas en el caso de que los puntos iniciales estén sobre la misma línea horizontal obteniéndose los siguientes resultados:

Rectángulos\Puntos sobre:	esquinas	lados vert.	lados hor.	borde
No elásticos	O(n)	O(n)	NP	NP
Elásticos	O(n)	O(n)	NP	NP

Estos tiempos son válidos si los puntos vienen ordenados, en otro caso habría que sumarles el coste $O(nlogn)$ correspondiente a la ordenación. Obsérvese que, por primera vez, se consigue resolver un problema de etiquetado en el que las cuatro esquinas son válidas, en tiempo polinomial.

2 Problemas polinomiales

Si no se permite deslizamiento horizontal todas las variantes se pueden resolver en tiempo lineal. Para ilustrar el procedimiento seguido, veamos el caso más sencillo, el del propio Lpwr:
Recuérdese que tenemos una colección de n puntos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ ordenados de izquierda a derecha sobre una línea horizontal; el procedimiento seguido será mediante el método incremental, así se añadirá un rectángulo cada vez, empezando por el correspondiente a p_1. Para cada *realización* $\mathcal{R}_k$ de los k primeros rectángulos, definimos su *hueco* como el par (t_k, b_k) donde t_k (respectivamente b_k) es la coordenada más a la derecha alcanzada por algún rectángulo sobre (respectivamente, bajo) la línea horizontal de la configuración $\mathcal{R}_k$. Dados dos pares (t_k, b_k) y (t'_k, b'_k) correspondientes a dos configuraciones, decimos que $(t_k, b_k) \leq (t'_k, b'_k)$ si 1) $t_k \leq t'_k$ y $b_k \leq b'_k$ ó 2) $t_k \leq b'_k$ y $b_k \leq t'_k$. Entre todas las realizaciones de los k primeros rectángulos, llamamos *mínimas* a aquellas que su hueco es minimal con la relación de orden definida anteriormente. Se puede probar:

Lema 1 *Si existe una realización de los $k+1$ primeros rectángulos, entonces existe una realización donde los k primeros forman una realización mínima.*

Por lo tanto el Lema 1 nos dice que basta con llevar el control de las realizaciones mínimas, pero surge un problema ya que cada realización de k rectángulos admite, en principio un nuevo rectángulo en cuatro posiciones, dos de las cuales son mínimas en principio. Sin embargo es posible demostrar que el número de realizaciones mínimas permanece siempre estable e igual a dos. Por lo tanto el mantenimiento de dichas realizaciones se puede hacer en tiempo lineal.

3 Problemas NP-completos

Al permitir deslizamientos horizontales, el mantenimiento de los huecos máximos que hicimos anteriormente conlleva a que en cada paso se añadan nuevas realizaciones minimales, no quedando éstas reducidas a dos como en los casos considerados en la sección anterior. Por lo tanto la heurística utilizada previamente deja de ser válida. En realidad, no sólo dicha heurística no es válida sino que cualquier otra está condenada al fracaso, puesto que es posible hacer una reducción polinomial de uno de los problemas NP-completos enunciados en [3] a Lpwhsr y por tanto se tiene:

Teorema 2 Lpwhsr *es NP-completo.*

Referencias

[1] B. Chazelle *et al.* *Application challenges to computational geometry: CG impact task force report.* Technical Report TR–521–96, Princeton Univ., Abril (1996).

[2] M. Formann y F. Wagner. *A packing problem with applications in lettering of maps.* En Proc. 7th. ACM Symp. on Comp. Geom. (1991), pag. 281–288.

[3] M. R. Garey y D. S. Johnson. *Computers and Intractability: a guide to the theory of NP–completeness.* Freeman, 1979.

[4] T. Kato y H. Imai. *The NP–completeness of the character placement problem of 2 or 3 degrees of freedom.* Record of Joint Conference of Electrical and Electronic engineers in Kyushu. (1988), pag. 11–18. En japonés.

[5] D. Knuth y A. Raghunathan. *The problem of compatible representatives.* SIAM Disc. Math. **5**(3) (1992), pag. 422-427.

[6] J. Marks y S. Shieber. *The computational complexity of cartographic label placement.* Technical Report CRCT–05–91. Harvard University, 1991.

[7] A. Wolff y T. Strijk. *A map labeling bibliography,* 1996. http://www.inf.fu-berlin.de/map-labeling/papers.html.