Laboratorio virtual de triángulos con Cabri

Propuesta quincenal de problemas de triángulos.

Revista dirigida y editada por Ricardo Barroso Campos

TEU del Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla

Documento redactado en LaTeX por Ercole Suppa

Versión preliminar, Noviembre de 2010

Introducción

Los softwares de Geometría dinámica están permitiendo la ampliacion de propiedades y relaciones geometría del triángulo. Diez años de investigación han dado lugar a una enorme variedad de problemas en los que se analiza el tema.

A los lectores.

Internet es un vehículo de cooperación sin precedentes en el estudio de la geometría, con la creación de una comunidad de intereses comunes. La posibilidad de comunicar problemas, resultados y que puedan ser conocidos de forma inmediata por los interesados, era impensable hace tiempo.

Agradecimiento.

A todos los proponentes, resolutores, comunicantes, lectores, internautas. Por ellos, por todos, funciona la revista.

Contents

Laboratorio virtual

de triángulos con Cabri

0.1 Curso 2000

1-15 de Octubre de 2000

1. En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo *interior* divide al lado opuesto en dos segmentos aditivos directamente proporcionales a los lados de dicho ángulo.

Bruño, Tratado de Geometría, Madrid (1950)104

16-31 de Octubre de 2000

2. Demostrar que en todo triángulo la bisectriz se encuentra entre la mediana y la altura trazadas desde el mismo vértice.

Lidski, V. y otros, Problemas de Matemáticas Elementales, Mir Moscú (1978)57

1-15 de Noviembre de 2000

3. Una mediana de un triángulo es una recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas se cortan en el centroide o baricentro.

Clapham, C., Diccionario Oxford de Matemáticas, Celeste Ediciones, Madrid (1992)5
Traducción de Alfonso Carlos Casal Piga y José Manuel Vegas Montaner

4. La altura de un triángulo (correspondiente a un lado) es la recta perpendicular que pasa por el vértice opuesto. Las tres alturas de un triángulo se cortan en el ortocentro.

Clapham, C., Diccionario Oxford de Matemáticas, Celeste Ediciones, Madrid (1992)150
Traducción de Alfonso Carlos Casal Piga y José Manuel Vegas Montaner

5. El circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Es el punto O de la figura en el que se cortan las perpendiculares a los lados en su punto medio o mediatrices.

Clapham, C., Diccionario Oxford de Matemáticas, Celeste Ediciones, Madrid (1992)30
Traducción de Alfonso Carlos Casal Piga y José Manuel Vegas Montaner

6. El incentro de un triángulo es el centro de la circunferencia inscrita. Es el punto en el que coinciden las tres bisectrices interiores de los ángulos del triángulo.

Clapham, C., Diccionario Oxford de Matemáticas, Celeste Ediciones, Madrid (1992)125
Traducción de Alfonso Carlos Casal Piga y José Manuel Vegas Montaner

7. Demostrar que en un triángulo arbitrario, el punto de intersección de las alturas, el punto de intersección de las medianas y el centro de la circunferencia circunscrita, están situados en una recta. Esta recta se llama *recta de Euler*.

Nesterensko, Yu. V., Olejnik, S.N. y Potápov, M.K., Antiguos Problemas Recreativos en Rusia (1994)85, Servicio Editorial Universidad Del País Vasco.

Traducción de Elena Aparicio Cortés, revisada por Emiliano Aparico Bernardo

8. Demostrar que en un triángulo arbitrario, las bases de las medianas, las bases de las alturas, y también los puntos medios de los segmentos que unen el punto de intersección de las alturas del triángulo con sus vértices, están situados en una circunferencia. Esta maravillosa circunferencia se llama a veces *circunferencia de Euler.*

Nesterensko, Yu. V., Olejnik, S.N. y Potápov, M.K., Antiguos Problemas Recreativos en Rusia (1994)85, Servicio Editorial Universidad Del País Vasco.

Traducción de Elena Aparicio Cortés, revisada por Emiliano Aparico Bernardo

9. Demostrar que si en un triángulo un ángulo es de 120°, el triángulo formado por los pies de las bisectrices es rectángulo.

Sánchez, G., Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos, SAEM Thales, Sevilla (1996)16

16-30 de Noviembre de 2000

10. Las medianas de un triángulo se cortan en un punto que se encuentra a los dos tercios de la distancia comprendida entre un vértice y el punto medio de lado opuesto

Sánchez,M., Geometría sin esfuerzo, Círculo de Lectores. Bilbao (1983)147

11. **Teorema de la recta de Euler.** En cualquier triángulo, el circuncentro, el baricentro y el ortocentro son colineales y la distancia del baricentro al ortocentro es doble de la distancia del baricentro al circuncentro

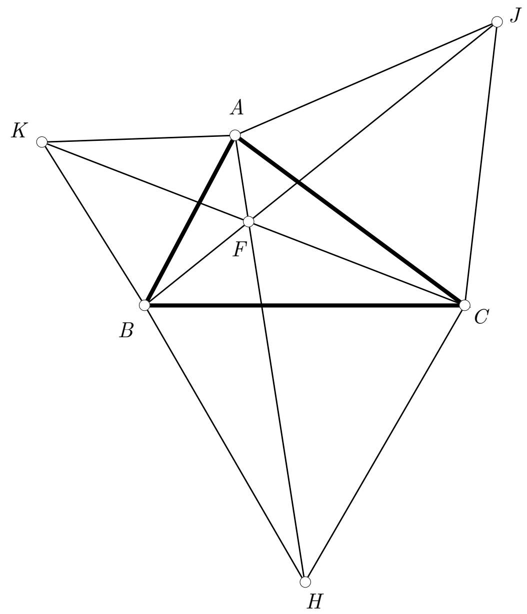
Eccles, F.M., The Euler Line and Nine-point-circle Theorems, The Mathematics Teacher. Vol. 92, n.1 (1999)50-54

12. **Teorema del círculo de los nueve puntos.** En cualquier triángulo, los puntos medios de los lados, los pies de las alturas, y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices al ortocentro, están en el círculo cuyo radio es la mitad del radio del círculo circunscrito y cuyo centro está en el punto medio del segmento que une el ortocentro al circuncentro.

Eccles, F.M., The Euler Line and Nine-point-circle Theorems, The Mathematics Teacher. Vol. 92, n.1 (1999)50-54

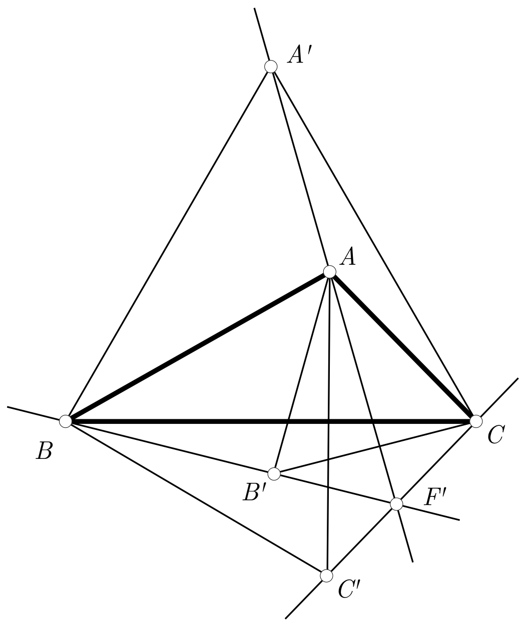
13. **El punto de Fermat.** En un triángulo cualquiera que tenga sus tres ángulos agudos se traza, sobre cada uno de sus lados, un triángulo equilátero hacia fuera del triángulo,como indica la figura. Se une A con H, B con J y C con K. Estas tres rectas concurren en un punto F, desde el que se ve cada lado con un ángulo de 120°. Además, $AH = BJ = CK$.

Guzmán, M. de, Para pensar mejor, Pirámide, Madrid (1995)164



14. **Segundo punto de Fermat,** F'**.** La construcción es muy parecida a la de F. La única diferencia es que los tres triángulos equiláteros se dirigen hacia dentro, como en la figura.

Truscott, B., A new geometry result: the Lester circle. Pythagoras, n. 43 Agosto (1997)26



1-15 de Diciembre de 2000

15. **Círculo de Lester.** En todo triángulo no isósceles ABC, los cuatro puntos: circuncentro, punto de Fermat, segundo punto de Fermat, centro del círculo de Euler todos están sobre en una circunferencia, llamada *circunferencia de Lester.*

Truscott, B. , A new geometry result: The Lester Circle, Pithagoras, August n. 43(1997)26-27

16. **Teorema de Pitágoras.** Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y c es la hipotenusa, es:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Loomis, E. S., The Pythagorean Proposition, N.C.T.M. Washington, D.C. (1968)262

17. **Propiedades del triángulo órtico.** Dado un triángulo acutángulo, inscribirle otro de perímetro mínimo. ... Le Le llamaremos triángulo órtico..

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), notable matemḟico de la Universidad de Berlín
Courant, R. y Robbins, H., ¿Qué es la matemática? Aguilar, Madrid (1971)357

Rademacher, H. y Toeplitz, O. , Números y figuras. Alianza Editorial, Madrid (1970)41

De Guzmán, M. , Mirar y ver, Editorial Alhambra, Madrid (1977)48

16-31 de Enero de 2001

18. **Las circunferencias de Apolonio. Los puntos isodinámicos.** Dado un triángulo ABC, tracemos por A sus bisectrices interior y exterior. Cortarán a la recta BC en dos puntos, B' y C'. La circunferencia de diámetro $B'C'$ se denomina *circunferencia de Apolonio.* Las tres circunferencias de Apolonio de un triángulo se cortan en los *puntos isodinámicos.*

Apolonio de Pérgamo 262 A.C. - 190 A.C.

1-15 de Febrero de 2001

19. Dado un triángulo ABC, sean F_1 y F_2 los puntos de Fermat (ver problemas 13 y 14). Sean I_1 e I_2 los puntos isodinámicos (ver problema 18). Sean G el baricentro y H el ortocentro (ver problemas 3 y 4). Los vectores $\overrightarrow{I_1F_1}$ e $\overrightarrow{I_2F_2}$ son respectivamente antiparalelos y paralelos al vector $\overrightarrow{GH}$. Si el triángulo es no isósceles, ninguna de las líneas I_1F_1 y I_2F_2 coincide con GH.

June Lester, Triangles III: Complex triangle functions, Aequationes Mathematicae, 53(1997)4-35

16-28 de Febrero de 2001

20. Dado un segmento AB y un triángulo arbitrario no equilátero JKM, construyamos sobre AB triángulos PAB, BQA y ABR semejantes a JKM. Entonces PQR es semejante a JKM.

June Lester, Triangles I: Shapes, Aequationes Mathematicae, 52(1996)30-54

1-15 de Marzo de 2001

21. Sobre cada lado de un triángulo cualquiera se construyen 3 cuadrados y se unen los vértices libres formando tres triángulos más. Las áreas de los nuevos triángulos son iguales al área del triángulo original: ¿porqué?

Monzó, O., Días 22 y 23 de Noviembre. En Gracia, F. (Coord.) Calendario matemático (1999)
Societat d'Educatió Matemática de la Comunitat Valenciana "Al-Kwarizmi"

16-31 de Marzo de 2001

22. Los lados de un triángulo cualquiera se dividen en tres partes iguales. Se une un vértice con uno de los puntos de división del lado opuesto, y los otros dos vértices con los puntos homólogos según la primera elección. De esta manera se forma un triángulo interior al dado. Su área es 1/7 de la área del original.

Oposiciones de Secundaria de la Comunidad Autónoma Andaluza, (1996)
Gardiner , A., Discovering Mathematics, The Art of Investigation, Oxford Science Publ., (1987)47

Jonhston, W.I. (Ed.), About the Cover Febrero. Mathematics Teacher (1992)

Kennedy, J., Drop the restriction, Mathematics Teacher, Marzo (1993)192

Remitido por el profesor Francisco Anillo (Centro de Profesorado de Córdoba)

1-15 de Abril de 2001

23. ABC es un triángulo cualquiera y D un punto del lado AB que divide a este en dos segmentos que están en proporción de 1 a 2. Si DE y DF son segmentos paralelos a los lados AC y BC, respectivamente, ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos DBE y FEC ?

Cobo, P. y Fortuny, JM. , Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving, en Educational Studies in Mathematics, 42(2001)125

Remitido por el profesor Josep M. Fortuny de la Universidad Autónoma de Barcelona

16-30 de Abril de 2001

24. Construir un cuadrado, si se conocen uno de sus vértices y dos puntos ubicados en los dos lados o sus continuaciones, que no pasan por el vértice dado

Lidski. V. y Otros., Problemas de matemáticas elementales. Editorial Mir. Moscú. (1978)55
Traducción al español por Luis Rodríguez

Remitido por la profesora María lluisa Fiol (Universidad Autónoma Barcelona)

1-15 de Mayo de 2001

25. Si los triángulos rectángulos isósceles ZMX e YMW tienen ángulos rectos en M, entonces YX y ZW son perpendiculares y congruentes.

Finney, R. L., Dynamic proofs of euclidean theorems,
en Mathematics Magazine, Sep.-Oct. (1970)178

26. Si Z y X son centros de cuadrados construidos hacia el exterior sobre dos lados de un triángulo ABC cualquiera, y M es el punto medio del tercer lado, entonces ZMX es isósceles y tiene un ángulo recto en M.

Finney, R. L., Dynamic proofs of euclidean theorems,
en Mathematics Magazine, Sep.-Oct. (1970)178

27. Si construimos cuadrados sobre los lados de un triángulo hacia el exterior, entonces el segmento que une dos centros de dichos cuadrados es perpendicular y congruente al segmento que une el tercer centro con el vértice opuesto al mismo.

Finney, R. L., Dynamic proofs of euclidean theorems,
en Mathematics Magazine, Sep.-Oct. (1970)180

28. Supongamos que se construyen triángulos equiláteros sobre los lados de un triángulo arbitrario, dos hacia el exterior y uno hacia el interior. Sea M el centro del triángulo equilátero interior, y Z y X los vértices exteriores de los otros dos. Entonces ZMX es un triángulo isósceles, con un ángulo de 120° en el vértice M.

Finney, R. L., Dynamic proofs of euclidean theorems,
en Mathematics Magazine, Sep.-Oct. (1970)182

16-31 de Mayo de 2001

29. El incentro y los excentros de un triángulo cualquiera forman un cuadrángulo ortocéntrico.[1]

Coxeter, HSM, Fundamentos de Geometría, Limusa-Wiley, México (1971)42-43

1-15 de Junio de 2001

30. Demostrar que en un triángulo, la recta perpendicular trazada desde un vértice al lado correspondiente del triángulo órtico pasa por el circuncentro.

Programa del taller sobre resolución de problemas geométricos usando el Cabri Géomètre II (169).
Tallerista: Profesora Martha Iglesias.

Propuesto con la autorización de la profesora venezolana Miriam Mireles, de la Universidad

Pedagógica Experimental Libertador, tutora de la tesis de Maestría de Martha Iglesias

[1] Si se unen cuatro puntos de un plano de dos en dos por medio de seis rectas distintas, se les llama vértices de un *cuadrángulo completo* y las rectas son sus seis lados. Si en un cuadrángulo completo hay dos pares de lados opuestos que son perpendiculares entre sí, los demás lados serán perpendiculares entre sí de la misma manera. Un cuadrángulo así, $ABCH$, se llama *cuadrángulo ortocéntrico*.

16-30 de Junio de 2001

31. Reducir un triángulo a cuadrado equivalente.

Cortázar, Tratado de Geometría Elemental, (1884)96

Edición veraniega 1 de Julio - 31 de Agosto de 2001

Propuestos con la autorización de la profesora venezolana Miriam Mireles, de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, tutora de la tesis de Maestría de Martha Iglesias.

32. Demostrar que en un la bisectriz interna de un ángulo y la mediatriz del lado opuesto se cortan sobre la circunferencia circunscrita.

Martha Iglesias, Anexo D-8, Tesis de maestría, pág 169

33. Demostrar que en un triángulo ABC, sean D, E y F los puntos medios de los lados del triángulo órtico y sean A', B' y C' los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Demostrar que $A'D$, $B'E$ y $C'F$ son concurrentes.

Martha Iglesias, Anexo D-8, Tesis de maestría, Sección de problemas nº 3 pág 170

34. Demostrar que en un triángulo, el incentro, un excentro y los dos vértices que forman el lado correspondiente al excentro son concíclicos y el centro de esta circunferencia está sobre la circunferencia circunscrita.

Martha Iglesias, Anexo D-8, Tesis de maestría, Sección de problemas nº 2, pág 170

35. Construir un triángulo dadas las longitudes de sus alturas.

Martha Iglesias, Anexo D-8, Tesis de maestría, Sección de problemas nº 3, pág 170

0.2 Curso 2001

1-15 de Setiembre de 2001

36. El área del triángulo se obtiene multiplicando la longitud del radio de la circunferencia inscrita r por el semiperímetro

Vázquez, R., y otros, Matemática moderna,
Segunda Enseñanza, Segundo curso, Ed. Trillas, México (1971)96

16-30 de Setiembre de 2001

37. **Teorema de Ceva.** Sean A, B, Cc, los vértices de un triángulo y tres puntos A' de BC, B' de CA, y C' de AB sobre los lados de este triángulo. Entonces las tres rectas AA', BB', y CC' son concurrentes si y sólo si se tiene:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1$$

Berger, M., Géomètrie, Nathan, LUÇON (1990)

1-15 de Octubre de 2001

38. Dado un triángulo equilátero ABC de lado a en el que tenemos un punto arbitrario P desde el cual se trazan las perpendiculares PD, PE y PF a los lados del triángulo BC, CA y AB, respectivamente, se verifica que

$$k = \frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF}$$

es constante.

Propuesto con la autorización del autor del artículo, profesor Juan-Bosco Romero Márquez
Romero, J.B., Una propiedad del triángulo isósceles, (2001)

Referenciado en Lidski y otros, Problemas de matemáticas elementales, (1978), problema 301, pág 51

16-31 de Octubre de 2001

39. Reflejemos el incentro I sobre cada uno de los lados del triángulo, llamando A' (opuesto de A), etc. Dibujemos las líneas AA', BB', CC'. Mostrar que:

(1) Estas tres líneas son concurrentes en un punto J.

(2) El segmento IJ es paralelo a la recta de Euler.

Gray, S., Math Forum (2001)
Propuesto por el profesor Ángel Gutiérrez, Universidad de Valencia

1-15 de Noviembre de 2001

40. Demuéstrese que las tres circunferencias simétricas de la circunscrita a un triángulo respecto a los lados del mismo tienen un punto común.

Marcos de Lanuza, F., Matemáticas, Curso Preuniversitario,
Gregorio del Toro Editor, Madrid (1964)235

16-30 de Noviembre de 2001

41. **Primera debilitación de la recta de Euler.** A través de cada uno de los dos puntos medios H y J de los lados de un triángulo EFG, pasan rectas arbitrarias y denominamos su intersección C_c .Construimos paralelas a estas rectas a través de los correspondientes vértices opuestos (G y F, respectivamente) y llamamos a su intersección C_a. Los puntos C_c , C_a y el baricentro están alineados. La distancia del baricentro al punto C_c es la mitad de la distancia del baricentro al punto C_a.

Goldenberg, P., Getting Euler's line to relax,
International Journal of Computers for Mathematical Learning 6 (2001)221

Propuesto con la autorización del autor del artículo, profesor Paul Goldenberg,

del Education Development Center, Inc, USA

1-15 de Diciembre de 2001

42. **Segunda Debilitación de la Recta de Euler.** Sea una paralela al lado FG de un triángulo EFG, que interseca a los lados EF y EG en H y J respectivamente. Sean dos rectas arbitrarias r y s que pasen por H y J que tengan por intersección C_c . Tomemos dos rectas t y u paralelas a r y s por los vértices opuestos correspondientes (G y F), que tendrán por intersección C_a. Sea C_m la intersección de GH y FJ. Los puntos C_c, C_a y C_m son colineales, y se tiene:

$$\frac{C_cC_m}{C_mC_a} = \frac{EH}{EF}$$

Goldenberg, P., Getting Euler's line to relax,
International Journal of Computers for Mathematical Learning 6 (2001)222

Propuesto con la autorización del autor del artículo, profesor Paul Goldenberg,

del Education Development Center, Inc, USA

16-31 de Diciembre de 2001

43. **Demostración de la fórmula de Herón.** El área de un triángulo de lados a, b y c, y semiperímetro s es:

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Heat, T. (1921-1981), A history of Greek Mathematics, Dover Publications Inc, New York

1-15 de Enero de 2002

44. Para cada una de las figuras, construye un punto C en la semirrecta [Ax, de manera que el triángulo ABC sea isósceles

Sandro Gomes, A., Developpement conceptuel consecutif a l'activite instrumentee (1999)102
These pour obtenir le grade de docteur de l'université Paris V en Sciences de L'Education

El autor da su permiso para descargar la tesis

16-31 de Enero de 2002

45. **Teorema de Menelao (sobre 70-130 dC)**. Si tres líneas formando un triángulo se cortan por una transversal, el producto de las longitudes de los tres segmentos que tienen extremidades no comunes es igual al producto de las otras tres

Smith, D.E. , (1923/1958), History of mathematics,
Dover Publications INC., New York. Vol. 1 (pag. 127)

1-15 de Febrero de 2002

46. Dado un triángulo ABC. Sea $A'B'C'$ su triángulo de puntos medios. Si designamos por G_i (baricentros), H_i (ortocentros), y C_i circuncentros $i = 1, 2, 3$ de los triángulos $AB'C'$, $BA'C'$ y $CA'B'$ respectivamente. Uniendo los puntos G_i, H_i y C_i se obtienen tres triángulos. Probar que: los tres triángulos así obtenidos son congruentes y, a su vez, semejantes al triángulo ABC.

Romero M. J.B. (2001) Comunicación personal
Propuesto por su autor, el profesor Romero Márquez J.B.,

Colaborador de la Universidad de Valladolid

16-28 de Febrero de 2002

47. Sea un triángulo ABC. Sea Q punto interior del triángulo ABC, de manera que tenemos: $\angle QAB = \angle CAQ = 10°$, $\angle ABQ = 20°$, $\angle QBC = 100°$. Calcular $\angle ACQ$.

Trucios Espinosa, A., Problemas Selectos de Geometría, Ed. AGASA, Perú
Propuesto por el profesor Julio A. Miranda Ubaldo, de la Academia San Isidro (Huaral), de Perú

1-15 de Marzo de 2002

48. Sea ABC un triángulo rectángulo en B e isósceles. Sea D un punto interior del triángulo ABC tal que $CD = CB = BA$, y tal que $\alpha = \angle DCB = \angle DAC$. Calcular α.

Trucios Espinosa, A., Problemas Selectos de Geometría, Ed. AGASA, Perú
Propuesto por el profesor Julio A. Miranda Ubaldo, de la Academia San Isidro (Huaral), de Perú

16-31 de Marzo de 2002

49. Desde los vértices A y B de un cuadrado $ABCD$ se trazan en el interior del cuadrado unas lineas rectas que forman ángulos de 15° con AB. Estas dos rectas se cortan en M. Demostrar que el triángulo DCM es equilátero.

Van Hiele (1957), El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis Doctoral. Traducción al español realizada en 1990 por el Proyecto de Investigación Diseño y Evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele (director Ángel Gutiérrez) del Concurso Nacional de Proyectos de Invetigación Educativa del C.I.D.E. (1989-91)78

1-15 de Abril de 2002

50. Demostrar que dando sólo dos *cortes rectos* a cualquier triángulo T, y dada cualquier recta r, se puede descomponer en tres figuras geométricas (dos triángulos y un cuadrilátero) que pueden ser *reagrupadas* usando sólo rotaciones y traslaciones (no simetrías) construyendo T' (triángulos simétrico de T respecto a r).

Klee, V. Y Wagon, S., Old and new unsolved problems in Plane Geometry and Number Theory, MAA Dolocian Mathematical Expositions, n^o 11 (1991)52

16-30 de Abril de 2002

51. Sea ABC un triángulo rectángulo en el vértice A. Desde el vértice B (lo mismo se haría para C) se traza el segmento BC', donde C' pertenece al lado AC. Se tienen así dos triángulos rectángulos $AC'B$ y ABC. Trazamos en ellos las alturas correspondientes a las hipotenusas BC y BC', obteniendo, respectivamente, los puntos H y H'. Probar que el cuadrilátero $AHH'B$ es inscriptible.

Romero, J. B., Comunicación personal (2002)
Propuesto por su autor , profesor Juan-Bosco Romero Márquez,

Colaborador de la Universidad de Valladolid

1-15 de Mayo de 2002

52. Construir un triángulo dados el lado A, el lado B, y la altura HA:

(1) Si se parte del lado A;

(2) Si se parte del lado B;

(2) Si se parte de la altura HA.

Santinelli R. y Siñeriz L.(1.999): Construcciones con la regla y comp'as en el entorno Cabri, comunicación presentada al Cabri World-99 de Sao Paulo, Argentina

Propuesto con autorización de las autoras de la comunicación, profesoras Raquel Santinelli y Liliana Siñeriz, del CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO BARILOCHE, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE, ARGENTINA

Aclaración del editor. Según las profesoras Liliana y Raquel, si el triángulo es de vértices abc, el lado A es bc, el lado B es ac, y la altura conocida es la que parte del vértice a. Esta aclaración la considero pertinente porque habitualmente, los vértices suelen nombrarse con mayúsculas y los lados con minúsculas. Ricardo Barroso.

16-31 de Mayo de 2002

53. Consideremos los puntos $A(x_1, y_1)$, y $B(x_2, y_2)$ dos de los tres vértices de un triángulo equilátero. Se desea conocer el tercer vértice en función de las coordenadas de A y de B.

Campos Silva, N., Comunicación personal (2002)
Propuesto por su autor, el Ingeniero Nelson Campos Silva

1-15 de Junio de 2002

54. Dado un triángulo, descomponerlo en cuatro triángulos isósceles.

Modificado de: Milauskas, G.A. (1987)
Hints: Creative geometry problems can lead to creative problems solvers

Lindquist, M.M. y Shulte, A.P., editors

Learning and teaching geometry, K-12. Yearbook. NCTM. Association Drive, Reston, Virginia

16-30 de Junio de 2002

55. Dado el triángulo ABC, construir un círculo que corta(prolongado) a las rectas BC, CA y AB en pares de puntos A' y A'', B' y B'' y C' y C'' respectivamente, tal que los ángulos $\angle A'AA''$, $\angle B'BB''$ y $\angle C'CC''$ son todos ángulos rectos.

Dou, J., Crux Mathematicorum 12(1986)79, problem 1140
Propuesta del profesor Juan Bosco Romero Márquez

Homenaje al profesor Jordi Dou con motivo de su 90 cumpleaños

Referenciado en Hyacinthos por Darij Grimberg el 23 de abri de 2004 en el mensaje 9740, así como el mensaje 5811 de Paul Yiu (26/7/2002) y el 5815 de Nikolaos Dergiades (27/7/2002) en el mismo foro.

1 de Julio - 31 de Agosto de 2002

56. Si en un triángulo rectángulo, construimos el cuadrado sobre la hipotenusa, la bisectriz del ángulo recto divide al cuadrado en dos áreas iguales

Nelsen, R.B., Proofs without words, MAA. Washington DC (1993)16

57. En un triángulo rectángulo, el radio de la circunferencia inscrita mide $\frac{a+b+c}{2}$ siendo a, b los catetos y c la hipotenusa.

Nelsen, R.B., Proofs witout words II, MAA Washington DC (2000)13

58. El triángulo formado por las medianas tiene de área las tres cuartas partes del triángulo original

Nelsen, R.B., Proofs without words II, MAA Washington, DC (2000)16

59. Sea c la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden a y b. Demostrar que $a + b \leq c\sqrt{2}$ ¿Cuándo tiene lugar la identidad?

Nelsen, R.B., Proofs without words II, MAA Washington, DC (2000)12

0.3 Curso 2002

1-15 de Setiembre de 2002

60. Construya un triángulo rectángulo con hipotenusa dada tal que la mitad de la longitud de la misma sea la media geométrica de sus catetos.

Primera Olimpíada Matemática Internacional Brasov. Rumanía 1959. Segundo día. Problema 4
Referencia en Internet del problema

16-30 de Setiembre de 2002

61. Sea el triángulo rectángulo ACB Y CD la altura trazada desde el vértice C y que cae sobre la hipotenusa.
Si los vértices están relacionados con las siguientes coordenadas: $C(0,0)$, $A(0,m)$ (m constante diferente de cero) y $B(x,0)$ (x real, x variable). Demostrar que al variar x la distancia entre el punto D y el punto $(0,m/2)$ es constante.

Edgardo Madrid Cuello, licenciado en Matemáticas en la Universidad de Sucre (Colombia)
Madrid, Edgar (2002) Comunicación personal.

61*. Sea ACB un triángulo rectángulo en C con el cateto b constante. Sea M el punto medio de AC, y D el pie de la altura del vértice C sobre la hipotenusa. Demostrar que al variar el vértice B, DM permanece constante.

Redacción del mismo problema modificada por el editor

1-15 de Octubre de 2002

62. Inscribir en un triángulo equilátero de lado 8 cm otro triángulo equilátero. Calcular el área del inscrito en en los casos en que el vértice del inscrito disten del dado en 1 cm, 2 cm, ... 7 cm. ¿Cómo varía esta área?, ¿Cuál es el triángulo inscrito de área mínima?. Trazar el gráfico.

Castelnuovo, E. , La Matematica/La Geometria, La Nuova Italia Editrice, Scandicci, Firenze (1948)78-79

16-31 de Octubre de 2002

63. Se tienen tres puntos A, B y C en una circunferencia c_1 y se trazan las tangentes por A y B que se cortan en el punto P. La tangente por C corta a la recta AB en Q. Mostrar que $PQ^2 = PB^2 + QC^2$

Referencia de Internet
Propuesto por el profesor Ignacio Larrosa Castreño, del IES Rafael Dieste, A Coruña, España

1-15 de Noviembre de 2002

64. Sea ABC un triángulo. Por los vértices B y C, por ejemplo, dibujamos las perpendiculares a los lados AB y AC hasta que corten a las prolongaciones de los lados AC y AB(si es neceario), en los puntos C' y B', respectivamente. Por los vértices A y C, trazamos las perpendiculares a los lados BA y BC hasta que corten a las prolongaciones de los lados (si es necesario) BC y BA en los puntos C'' y A'' respectivamente. Por los vértices B y A, trazamos las perpendiculares a los lados CB y CA hasta que corten a las prolongaciones de los lados (si es necesario) CA y CB en los puntos A^* y B^* respectivamente. De tal forma, que obtenemos los tres triángulos siguientes : $T(A) = AB'C'$, $T(B) = BA''C''$ y $T(C) = CA^*B^*$. Sean los puntos: $A^+ = BC \cap B'C'$, $B^+ = AC \cap A''C''$ y $C^+ = AB \cap A^*B^*$. Probar que :

(a) Los triángulos $T(A)$, $T(B)$ y $T(C)$ son semejantes al triángulo ABC, y $O(A)O(B)O(C)$ (éste formado por los ortocentros de los triángulos $T(A)$, $T(B)$ y $T(C)$), respectivamente, y estos dos últimos son congruentes, en posición de Thales.

(b) Probar si es cierto o no que los puntos A^+, B^+ y C^+ son o no colineales.

Romero Márquez, J. B. , Comunicación personal, (2002)

64*, continuación del 64. Sea ABC un triángulo. Consideremos los tres triángulos $T(A)$, $T(B)$ y $T(C)$ definidos en el problema 64. Sea el triángulo $O(A)O(B)O(C)$ cuyos vértices citados son los ortocentros de los triángulos $T(A)$, $T(B)$ y $T(C)$, respectivamente. Consideremos ahora el círculo circunscrito común a los triángulos ABC y $O(A)O(B)O(C)$. Definimos el triángulo $O'(A)O'(B)O'(C)$ cuyos vértices están situados sobre el círculo circunscrito al triángulo ABC, y se definen como los puntos simétricos de $O(A)$, $O(B)$ y $O(C)$, respecto de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Demostrar que el triángulo $O'(A)O'(B)O'(C)$ es homotético al triángulo órtico de ABC, con razón 2 y centro de homotecia, el ortocentro del triángulo, ABC.

Romero Márquez, Comunicación personal (Noviembre 2002)

16-30 de Noviembre de 2002

65. Problema 1.12.2 Dado un triángulo ABC y un punto arbitrario X, sea D el punto de intersección de la recta AX con el lado opuesto CB. Probar que la razón entre las áreas de los triángulos AXC y AXB es igual a la de las longitudes de los segmentos CD y DB.

Recio Muñiz, T. , Cálculo simbólico y geométrico (Razonamiento Matemático: Cuatro Escenarios), Editorial Síntesis, Madrid (1998)80

Con permiso de su autor, el profesor Tomás Recio de la Universidad de Cantabria

1-15 de Diciembre de 2002

66. Dado un triángulo cualquiera circunscribir en él el triángulo equilátero de área máxima.

Fernández García, F.R. , Optimización Multiobjetivo. Una perspectiva personal, En Actas del Encuentro de Matemátcos Andaluces (Vol. 1) (2001), Conferencias Plenarias y Semblanzas, Universidad de Sevilla, Fundación El Monte, Universidad de Córdoba, Sadiel, Sevilla (pág 78-79) Con permiso del profesor J.R.

Fernández, de la Universidad de Sevilla (Departamento de Estadistica e Investigacio Operativa

16 de Diciembre de 2002-15 de Enero de 2003 Edición extra

67. Si los ángulos de un triángulo son trisectados,las intersecciones de los pares de trisectores adyacentes a cada lado determinan un triángulo equilátero.

Grossman, H.D., The Morley triangle: a new geometric proof, American Mathematical Monthly, 50(1943)552 Propuesto por el editor. Agradecería que en caso de estar pubicado o referenciado, se me comunique.

68. Dado un triángulo ABC,

(a) Tracemos la recta s que contiene a la mediana AM. Tomemos P, un punto cualquiera de s. Tracemos las rectas BP, y CP, que cortarán a AC y a AB, o sus prolongaciones, en Q y T. Demostrar que TQ es paralela a BC.

(b) Sea la recta m es paralela a BC cortando a AB o su prolongación en V, y a AC o su prolongación en W. Construyamos las rectas BW y CV, que se cortarán en T. Demostrar que la recta AT contiene a la mediana al triángulo por el vértice A.

King, J.R., An Eye for Similarity Transformations En Geometry Turned On, Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research. (Edited by James King and Doris Schattschneider) (1997)
The Mathematical Association of America.

69. Se tiene un triángulo isósceles ABC con $ABC = 100°$. Se construye D en la semirrecta de origen B que contiene a A tal que $CA = BD$. Calcular el ángulo $\angle ACD$.

Gutierrez, A. , Geometry step by step, 100° *Isosceles Triangle Problem 11 (2002)*

16-31 Enero de 2003

70. Si los tres lados de un triángulo están en progresión geométrica, el triángulo formado por sus tres alturas es semejante al inicial.

F.G.M. (Frère Gabriel-Marie), Exercises de Trigonométrie (1915)308
Propuesto por el profesor Juan Bosco Romero Márquez, Colaborador de la Universidad de Valladolid.

71. En todo triángulo ABC de altura BH, al trazar las cevianas AM y CN concurrentes con BH, se establece que la altura será bisectriz del ángulo MHN.

FGM (Frère Gabriel-Marie), Exercices de Géométrie (1912)471-472
Propuesto por el profesor Julio A. Miranda Ubaldo, El mundo maravilloso de las Matemáticas), de la Academia San Isidro (Huaral), de Perú

72. Sea ABC un triángulo en el plano afín euclideo P. Sea M un punto cualquiera del plano. Suponemos que:

- la perpendicular por M a la recta AM corta a la recta BC en A';
- la perpendicular por M a la recta BM corta a la recta CA en B';
- la perpendicular por M a la recta CM corta a la recta AB en C'.

Demostrar que los puntos A', B', C' están alineados.

F.G.M. (Frère Gabriel-Marie), Cours de Géomètrie, Editions Mame (1922)
Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7

16-31 Febrero de 2003

73. Dado un triángulo de lados 7 cm, 5 cm, y 3 cm, inscribir un rectángulo de base 4 cm.

Sánchez, G. , Conferencia en las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales, De la Fuente, M. y Torralbo, M. (Eds.), Cultura y Matemáticas,

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, SAEM Thales, (1995)38

74. Dado un triángulo de lados 7 cm, 5 cm, y 3 cm, inscribir un rectángulo de perímetro 8 cm.

Sánchez, G. , Conferencia en las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales, De la Fuente, M. y Torralbo, M. (Eds.), Cultura y Matemáticas,

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, SAEM Thales, (1995)38

75. Dado un triángulo de lados 7 cm, 5 cm, y 3 cm, inscribir un cuadrado.

Sánchez, G. , Conferencia en las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales, De la Fuente, M. y Torralbo, M. (Eds.), Cultura y Matemáticas,

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, SAEM Thales, (1995)38

76. Hallar el lugar geométrico de los centros de los rectángulos inscritos en un triángulo de lados 7 cm, 5 cm, y 3 cm.

Sánchez, G. , Conferencia en las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales, De la Fuente, M. y Torralbo, M. (Eds.), Cultura y Matemáticas,

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, SAEM Thales, (1995)38

16-28 de Febrero de 2003

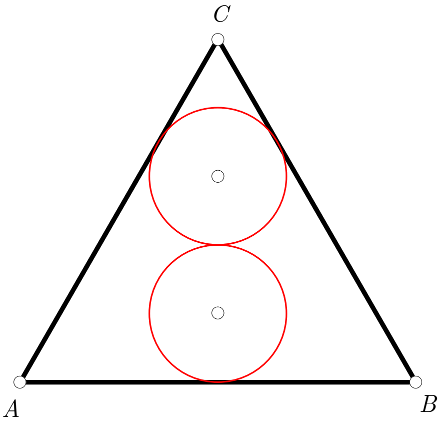
77. Por cada punto P interior de un triángulo dado ABC, puede construirse un triángulo con los segmentos PA, PB y PC. Demostrar que ABC es equilátero.

New exercises and problems in Mathematics. Komal September 2002, Problem 3566

Ampliación del editor. *Demostrar que en un triángulo equilátero ABC, si P es un punto interior cualquiera, los segmentos PA, PB y PC pueden construir un triángulo.*

Propuesta de definición. *Un triángulo es equilátero si tomado un punto interior P cualquiera, se puede construir con PA, PB y PC un triángulo.*

78. 1 Construir la siguiente figura donde el triángulo es equilátero y las dos circunferencias tienen el mismo radio.



9na Competencia de Clubes Cabri, Tercera Ronda 7 de noviembre de 1998

Ampliación del editor. *¿Cuanto mide el radio de la circunferencia si el lado del triángulo mide 10 cm?*

1-15 de Marzo de 2003

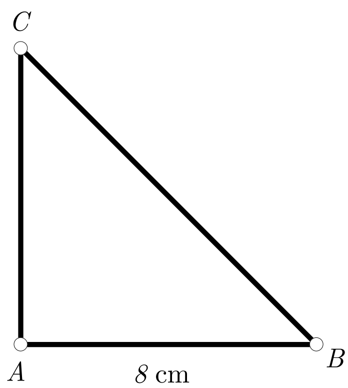
79. Dado el triángulo rectángulo ABC con los lados de 3cm, 4 cm y 5cm, calcular el valor del radio de la circunferencia inscrita.

DeVincentis, J. , Sato, N., Stigant, D., Hennessy, D.y Rutherford, H.

80. Sea un triángulo ABC rectángulo en A de lados 3cm, 4 cm y 5cm. Construyamos el triángulo EDF formado por sus puntos medios. Demostrar que el incentro de ABC está en la cicunferencia inscrita a EDF

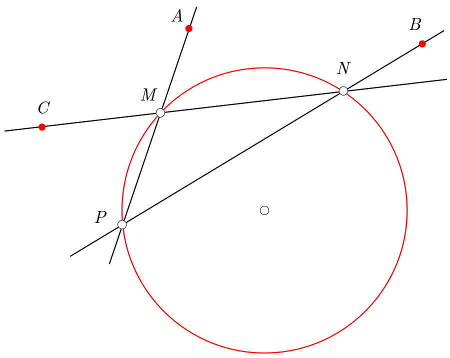
De Vincentis, J., Sato, N., Stigant, D., Hennessy, D.y Rutherford, H.

81. Sea T un triángulo rectángulo isósceles. Sea S el círculo tal que la diferencia entre las areas de T unión con S y de T intersección con S es mínima. Demostrar que el centro de S divide a la altura sobre la hipotenusa de T en el número de oro. Para fijar datos, el triángulo puede ser:



Jordi Dou, American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 7, Aug-Sep (1980)577
Propuesto por el profesor Juan-Bosco Romero Márquez, Colaborador de la Universidad de Valladolid.

82. **Problema de Castillon.** Dada una circunferencia T y tres puntos A, B, C, construir con regla y compás un triángulo MNP inscrito en T cuyos lados respectivamente pasen por A, B y C.



Carrega, JC.Théorie des corps, la règle et le compas, Edition Hermann, (1989)98
Formation des enseignants et formation continue

Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7, y

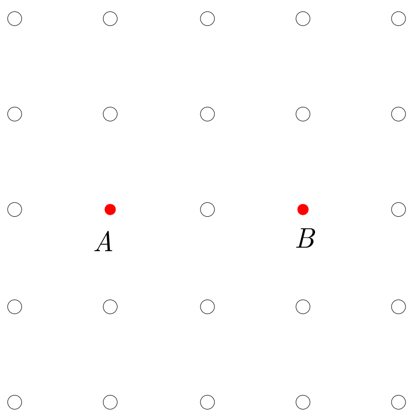
por Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S. Fray Luis de León (Salamanca)

16-31 de Marzo de 2003

83. Se tiene un polígono regular de n lados. Hallar la suma de las perpendiculares desde un punto interior cualquiera a todos los lados del polígono

Propuesto por el profesor Nicolás Rosillo, Departemento de Matemáticas, IES Máximo Laguna (Santa Cruz de Mudela, Ciudad Real) Tomado de un curso de Formación del Profesorado.

84. Busca un tercer punto C de manera que forme con A y B un triángulo rectángulo. Hazlo de todas las maneras posibles.



Hernán P., Salar A., Soler M., Es posible/Grupo Cero. ICE de la Universidad de Valencia (1983)24

1-15 de Abril de 2003

85. Se designa por I el incentro de un triángulo. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? Razona las respuestas:

(a) No existe ningún triángulo en el que I esté en el exterior.

(b) El incentro siempre está en la altura del triángulo.

(c) Existe un triángulo tal que I está en una de sus alturas.

(d) Existe un triángulo tal que I está en las tres alturas.

(e) El incentro siempre está en una mediatriz del triángulo.

(f) Existe un triángulo tal que I está en una de sus mediatrices.

(g) No existe ningún triángulo tal que I esté en todas sus mediatrices.

Arriero, C. y García I., Descubrir la Geometría del entorno con Cabri, Narcea-MEC, Madrid, (2000)48

86. Los vértices de un triángulo ABC dividen a la circunferencia circunscrita en tres arcos, que están en relación 3:4:5. Construye el triángulo con Cabri. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo?

Arriero, C. y García I., Descubrir la Geometría del entorno con Cabri, Narcea-MEC, Madrid, (2000)48

87. Dado un triángulo ABC, y un punto A' sobre el lado BC. Tomemos los puntos B' y C' sobre AC y AB respectivamente de forma que $AA' = BB' = CC'$. Demuestra que si $BA' = CB' = AC'$ entonces ABC es equilátero.

Olimpiadas Prueba de clasificación segunda ronda, Alemania (1999)
Propuesto por la alumna Maite Peña Alcaraz, del Colegio Porta Celi de Sevilla

16-30 de Abril de 2003

88. En un triángulo ABC supongamos que AD es una altura. Supongamos además que las perpendiculares trazadas desde D cortan a los lados AB y AC en E y F, respectivamente. Supongamos en fin que G y H son los puntos de AB y AC, respectivamente, tales que $DG \parallel AC$ (paralelos) y $DH \parallel AB$. Demostrar que

(a) EF y GH se cortan en A^* sobre BC.

(b) Definiendo B^* y C^* de manera análoga, demostrar que A^*, B^* y C^* son colineales.

Romero Marquez, J.B M. Crux Mathematicorum N.28, N.8, December (2002), Problema 2797, pag. 535
Homenaje del profesor colaborador honorario de la Universidad de Valladolid Juan Bosco Romero Márquez,
in Memorian del gran Matemático, Prof. (Festcrif) H.S.M.Coxeter

89. Demostrar que en un triángulo BAC, rectángulo en A, el producto de las distancias del centro I del círculo inscrito a los vértices B y C, es igual al producto de la hipotenusa BC por la distancia de I al vértice del ángulo recto.

Revista de Matemática Elemental N.39, 4^a Serie (1941), Tomo I, pag. 156-157
Propuesto por J.B. Romero Márquez, profesor colaborador honorario de la Universidad de Valladolid

90. ABC es un triángulo isósceles. Es $\angle B = \angle C = 80°$. F está sobre AB tal que $\angle ACF = 30°$, E está sobre AC tal que $\angle ABE = 20°$. Demostrar que $\angle BEF = 30°$.

J.W. Mercer et al, Solutions to Langley's Adventitious Angles Problem, Mathematical Gazette, 11, (1923)321-323

Propuesto por Juan Carlos Salazar,

Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz

91. Dado un triángulo ABC, $a = BC$,(lado mayor), $b = AC$, $c = AB$ (no equilátero). Tomando el vértice A, por ejemplo, trazamos la altura desde A, y las bisectrices a los ángulos B y C, respectivamente hasta que corten a los lados opuestos. Sobre su lado opuesto BC, llevamos los puntos B', C', tal que $BB' = BA$, y $CC' = CA$. Probar que las tres rectas dadas, la altura y las dos bisectrices se cortan dos a dos para formar un triángulo (que puede ser un punto, en su caso límite) semejante al triángulo $AB'C'$. Se determinará el centro y la razón de la semejanza. Calcular los lados del triángulo $AB'C'$, en función de los lados del triángulo ABC. La misma construcción se pueden hacer para los otros dos vértices. ¿ Qué relación geométrica hay entre los tres triángulos así construidos?

Propuesto por el profesor colaborador honorario de la Universidad de Valladolid J. B. Romero Márquez, conjuntamente con el profesor Florentino Damián Aranda Ballesteros, del IES Blas Infante de Córdoba

92. En un triángulo ABC se traza la ceviana BD (D en AC) de tal forma que $AD = BC$. Si $\angle A = 30°$ y $\angle C = 40°$, hallar $\angle DBC$.

Salazar, J. C., Comunicación personal, Abril de 2003

93. Dado un triángulo ABC, se inscribe en él un cuadrado uno de cuyos lados se apoye en el lado BC. Sea A_1 el centro de este cuadrado. De igual modo se construyen cuadrados con lados apoyados en AC y en AB y cuyos centros son los puntos B_1 y C_1 respectivamente. Probar que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 son concurrentes.

Enunciado tomado del artículo Otros problemas de la I.M.O. de Washington, 2001 publicado en la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, pág. 708-709, sep. dic. de 2002

Propuesto por Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S. Fray Luis de León, Salamanca

1-15 de Mayo de 2003

94. De un triángulo ABC rectángulo en A se conocen el cateto AC y la distancia de B al incentro. Construir el triángulo.

Vagas Corzo, I., El temario de geometría III 2003, problema 151
Propuesto por Francisco Reina, licenciado en matemáicas por la UNED y

preparando oposiciones a secundaria. Empleado en Telefónica

16-31 de Mayo de 2003

95. Dado ABC con I como incentro, a través de un punto H de la circunferencia inscrita del arco más pequeño cercano a A, se traza una tangente t a la circunferencia inscrita. Desde A, B y C se trazan perpendiculares a t, que la cortarán en M, L y K respectivamente. Sean $AM = a_1$, $BL = b_1$, $CK = c_1$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, y S el área de ABC. Demostrar que:

$$S = \frac{-a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1}{2}$$

F. G.-M., Exercices de GéométrieEditor, Jacques Gabay, Paris (2003)750
Propuesto por Juan Carlos Salazar,

Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela,(Puerto Ordaz)

96. Las bisectrices exteriores de los tres ángulos de un triángulo escaleno cortan a sus tres lados opuestos en tres puntos que están alineados.

Coxeter, H.S.M. y Greitzer, S.L., Retorno a la Geometría, (1993)
Traducción de Pedro Gómez y Joaquín Hernández. (La tortuga de Aquiles), pag, 67

97. Las biesctrices internas de dos ángulos de un triángulo escaleno y la exterior del tercer ángulo cortan a sus respectivos lados opuestos en tres puntos que están alineados.

Coxeter, H.S.M. y Greitzer, S.L., Retorno a la Geometría, (1993)
Traducción de Pedro Gómez y Joaquín Hernández. (La tortuga de Aquiles), pag, 67

1-15 de Junio de 2003

98. Demostrar sin palabras las siguientes desigualdades para un triángulo rectángulo: $c\sqrt{2} \leq a \leq b\sqrt{2}$.

A. Laisant, Problémes, 1921, (Mc. Alister, Mathesis, 171) (Bejot, 86, 21)
Propuesto por el profesor colaborador honorario de la Universidad de Valladolid J.B. Romero Márquez

99. Construir un triángulo cuyos vértices están en tres paralelas dadas y que sea semejante a otro triángulo dado.

García Ardura, Problemas gráficos y numéricos de geometría (Originales en su mayor parte), Madrid (1948)135, problema 1240

Propuesto por la profesora M^a Luisa Fiol, de la Universidad Autónoma de Barcelona

16-30 de Junio de 2003

100. Dado un lado ℓ, la altura correspondiente h y el radio de la circunferencia inscrita, r, construir el triángulo.

Rey Pastor, J., Revista Trimestral de Matemáticas, Zaragoza, Tomo V (1905)239

101. Dado un triángulo ABC. Desde un punto S tracemos las rectas SA, SB y SC. Cortan a la circunferencia circunscrita en A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Se tiene que A_1, B_1, C_1 y ABC son iguales (es decir, hay una permutación P de los puntos A, B, C tal que $P(A)P(B)P(C)$ y $A_1B_1C_1$ son isométricos). Demostrar que no hay más de ocho de tales puntos P en el plano.

Rideau, F., Petit essai de théologie circulaire, Quadrature 48(2003)29
En Internet: Pertsel, V.A. The 18-th competition, Ashkhabad, 1984, problema 381

Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7

102. Sea ABC un triángulo no equilátero. Sea T su circunferencia circunscrita y O su centro. Las tangentes en A, B, C a la misma forman un triángulo $A'B'C'$. Sea $A''B''C''$ el homotético de $A'B'C'$ de centro O y razón $-1/2$.

(1) Demostrar que ABC y $A''B''C''$ son homólgicos[2], cuyo centro D de homología está sobre T.

(2) Demostrar que cada uno de los puntos A, B, C, D pueden ser obtenidos de la misma manera que D a partir de A, B, C.

Rideau, Le probléme de Dobbs, Documento de trabajo (2003)
Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7

103. Transformar un triángulo dado en otro equivalente y de altura dada h.

Fourrey, E., Curiosités Géomètriques, Vuibert, Paris (2001)268
Propuesto por el profesor Romero Márquez J.B., Colaborador de la Universidad de Valladolid

104. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos homotéticos en posición de Thales (lados homólogos paralelos). Definimos los puntos A^*, B^*, C^* como los de intersección de los pares de rectas BC' y $B'C$, AC' y $A'C$, y AB' y $A'B$ respectivamente. Demostrar que el triángulo $A^*B^*C^*$ es homotético a los dos triángulos anteriores y que los centros de gravedad o baricentros de los tres triángulos son colineales, es decir, están alineados.

Crux Mathematicorum, Problem 1480
Propuesto por el profesor Romero Márquez J.B., Colaborador de la Universidad de Valladolid

105. En el desierto del Sahara y en tres puntos A, B, C, que forman los vértices de un triángulo equilátero de 700 km de lado, se encuentran tres vehículos cuyas velocidades respectivas son de 20 km/h, 40 km/h y 60 km/h, comunicados por radio con el centro de operaciones, reciben la orden de partir a reunirse lo antes posible. ¿Dónde está situado el punto de la reunión? [3]

Calendario Matemático, 31 de Marzo 1999, Selección por Germán Bernabeu Soria, del CEP de ELDA.
Propuesto por la profesora Carmen Arriero Villacorta, profesora de Matemáticas del

IES Ramón y Cajal de Madrid, y asesora de Nuevas Tecnologías de la Informacaión y Comunicación

en el Centro de Apoyo al Profesorado de Hortaleza-Barajas de la Comunidad de Madrid

106. **El triángulo de oro.** Se llama triángulo de oro a un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual mide 36°. Constuye con Cabri dicho triángulo y a partir de él encuentra el valor de los tres primeros términos de la sucesión de Fibonacci: 1, φ, φ^2, donde el valor del número de oro es 1,61803.

Arriero, C., Comunicación personal (2003)

[2] *Homólogicos* en el sentido de Desargues: sus vértices dos a dos se encuentran sobre tres rectas que tienen un punto de concurrencia.

[3] Las motos siempre están en movimiento, precisión del editor

107. En el triángulo ABC, sean: D un punto de BC, E de AB, F de AC y M de AD. Si M es de EF, es:

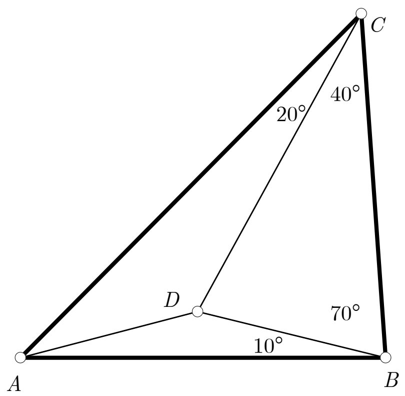
$$DC \cdot \frac{EB}{EA} + BD \cdot \frac{BF}{FA} = BC \cdot \frac{MD}{MA}$$

Bellot, F, El teorema de las transversales y algunas consecuencias (1996)
Conferencia pronunciada durante la VIII olimpiada nacional de Costa Rica, San Carlos.

Propuesto por el profesor F. B. Rosado, catedrático del IES Emilio Ferrari de Valladolid

y Premio Internacional Paul Erdos.

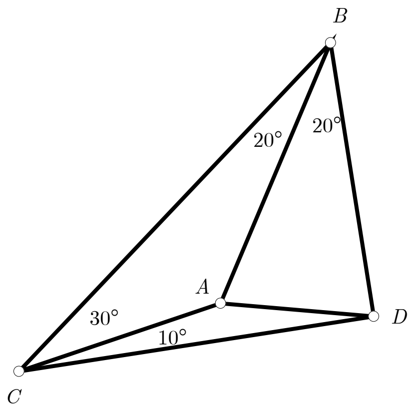
108. En la figura:



Se tiene ABC con D interior de manera que $\angle ACD = 20°$, $\angle DCB = 40°$, $\angle CBD = 70°$, $\angle DBA = 10°$. Demostrar que AD es perpendicular a BC.

Olimpiada Matemática de Canadá 1998
Propuesto por J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz

109. En la figura:



En el triángulo BCD, con A en el interior tal que: $\angle CBA = \angle ABD = 20°$, $\angle BCA = 30°$, $\angle DCA = 10°$. Calcular $\angle BDA$, y demostrar que $AB = BD$.

Salazar, J.C., Comunicación personal (2003)
Propuesto por J.C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela,

Puerto Ordaz, autor del problema

110. **Teorema de Feuerbach.** El círculo de los nueve puntos es tangente al inscrito y a cada uno de los exinscritos al triángulo ABC.

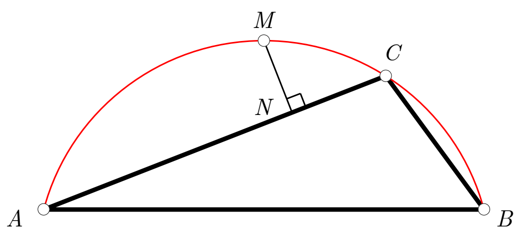
Bruño, Geometría, Curso Superior, con el enunciado de 1286 ejercicios de aplicación, Novena edición, Paterna, Valencia (1958)671

0.4 Curso 2003

1-15 de Setiembre de 2003

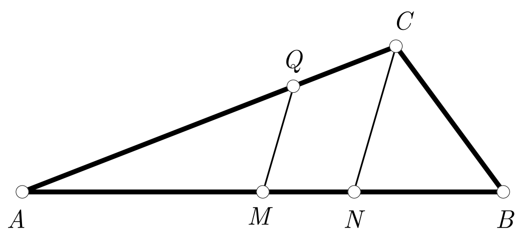
111. Los ruptores (Imágenes tomadas del artículo).

(a) Si por el punto medio M de un arco de circunferencia que subtiende un triángulo ACB bajamos una perpendicular MN a la cuerda que comprenda el arco donde esté M (en este caso AC), demostrar que $AN = NC + CB$.



(b) Dado un triángulo ABC, sea M el punto medio de CA. El segmento MQ tal que divide en dos mitades el perímetro del triángulo ABC, se denomina *ruptor*. Construir Q, punto ruptor.

(c) Demostrar que QM es paralela a BN, bisectriz del ángulo B.



(d) Demostrar que los tres ruptores se encuentran en un punto, centro ruptor del triángulo.

Avishalom D., Perimeter-bisector in a triangle, Riveon Lematematica, vol 13 (1959), en hebreo.
El editor agradece a María Victoria Puy Moreno de la Biblioteca General de la Universidad de Sevilla la búsqueda del artículo original, y a Dov Rubin, argentino afincado en el Kibutz Dan de Israel, a través del Grupo alt.usage.spanish de Google su traducción al español.

16-30 de setiembre de 2003

112. Sobre los lados de un triángulo arbitrario ABC se construyen hacia el exterior cuadrados. Se tiene:

(1) Los vértices A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 de los cuadrados diferentes de los del triángulo ABC forman un hexágono; las mediatrices de sus lados pasan alternativamente por el circuncentro U de ABC y por un segundo punto K.

(2) Los puntos medios de los segmentos cuyas mediatrices se intersecan en K, H_a, H_b y H_c, forman un triángulo cuyo baricentro es S, coincidente con el baricentro de ABC.

(3) Los triángulos $H_aH_bH_c$ y ABC son homológicos en el sentido de Desargues, y su centro de homología es H, ortocentro de ABC.

(4) Las mediatrices H_aK, H_bK y H_cK son paralelas a las medianas AS, BS y CS de ABC.

Weiss, G., Remarkable right angles, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 93/5(1993)173.
Documento presentado a la 6ª Conferencia Internacional de Geometría,

Haifa 29 Marzo - 5 Abril 1992. Con permiso de Gunter Weiss.

1-15 de Octubre de 2003

113. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos pares de lados, que comprenden ángulos desiguales, el ángulo mayor está opuesto al lado mayor.

Severi, F., Elementos de Geometría I, Con 220 figuras, Labor, S.A. Barcelona (1952)110

114. Dado un triángulo ABC, se tiene que los tres ángulos $\angle ACO$, $\angle OCP$ y $\angle PCB$ son iguales, siendo CO la mediana, CP la altura del triángulo ABC, y O, P puntos del segmento AB. Indagar

(a) ¿qué tipo de triángulo es ACO?

(b) ¿qué tipo de triángulo es COB?

(c) ¿qué tipo de triángulo es ACB?

Kurina, F., Geometry - The resource of opportunities (2003), Documento presentado a
Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education

28 February - 3 March 2003 in Bellaria, Italy (CERME, 2003) (Modificado por el editor)

Con permiso de su autor, Frantisek Kurina Univerzita Hradec Králové CZECH REPUBLIC

115. Calcular los ángulos de un triángulo en los casos siguientes:

(1) $\angle B = 2\angle A$ y $\angle C = 3\angle A$;

(2) $\angle A = 3\angle B$ y $\angle C = 45°$;

(3) $\angle A + \angle B = 90°$ y $\angle C - \angle B = 30°$;

(4) $\angle A - \angle B = 45°$ y $\angle A - \angle C = 30°$.

Bruño, Geometría. Curso Superior. Solucionario, Editorial Bruño, Madrid (1958)

116. Se tiene un triángulo ABC. Consideremos su circunferencia circunscrita y sea D un punto de la misma. Con centro en A y radio AD se traza una circunferencia C_a. Con centro en B y radio BD se traza una circunferencia C_b. Con centro en C y radio CD se traza una circunferencia C_c. C_a y C_b se cortan en D y X; C_a y C_c se cortan en D e Y; C_b y C_c se cortan en D y Z. Demostrar que los puntos X, Y y Z están alineados.

Problema propuesto por el profesor esloveno Matija Pretnar,
Olimpiada Canguro, verano 2003, en la concentración de Francia).

Propuesto por la alumna Maite Peña Alcaraz del Colegio Portaceli de Sevilla

Equilátero y rectángulo	Equilátero y obtusángulo
Obtusángulo e isósceles	Acutángulo e isósceles
Rectángulo y escaleno	Acutángulo y escaleno

1-15 de noviembre de 2003

117. Tacha las parejas de triángulos que no puedan darse:

Gil, J., Mascaró, J., Matemáticas 4, Santillana, Madrid (1987)

118. Si en un triángulo cualesquiera ABC se trazan las bisectrices exteriores e interiores de los ángulos B y C, y luego se bajan desde el vértice A del triángulo las perpendiculares AF y AG a las exteriores y AE y AD a las interiores, demuéstrese que si unimos F con G, la recta resultante pasará por los puntos E y D.

Bruño, Geometría. Curso superior. Solucionario, Editorial Bruño, Madrid (1963)64

119. Sea ABC un triángulo equilátero. Tracemos la circunferencia circunscrita. Sean L y M los puntos medios de AB y AC. La recta LM corta a la circunferencia en X e Y. Demostrar que $LM/MY=$ número de oro

Rigby, J. F., Equilateral triangles and the golden ratio, Mathematical Gazette marzo (1988)27-30
Propuesto por el profesor Juan Bosco Romero Márquez, colaborador de la Universidad de Valladolid

16-30 de noviembre de 2003

120. Construir un triangulo conociendo las 3 bisectrices[4].

Comunicación personal por e-mail de fpastre@adinet.com.uy

121. Cualesquiera dos exincetros en un triangulo quedan alineados con el vértice que existe entre ellos. También estan alineados con dicho vértice el incentro y el otro exincentro. Estas rectas son perpendiculares.

Rosillo, N., Comunicación personal (2003)

122. Construir un triángulo isósceles conocido el lado igual y el radio de la circunferencia inscrita.

Propuesto por Ignacio Pardo, profesor del IES Elviña de A Coruña

1-15 de diciembre de 2003

123. Sea ABC un triángulo escaleno de lados conocidos, $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Tomando como referencia por ejemplo, el vértice A, la misma construcción se harían por los vértices B y C, se hace la siguiente construcción :
Con centro en los vértices B y C, respectivamente, trazamos circunferencias que pasan por A, y cortan en los puntos M y N, respectivamente sobre la recta BC, siendo M el punto más cercano a C, y N el más cercano a B. Por M dibujamos la paralela MD al lado AB, y de iguallongitud; lo mismo por el punto N dibujamos la paralela NE al lado AC y de igual longitud. De esta forma hemos obtenido los paralelogramos, $AMDB$, $MD = AB$, y, $ANEC$, $ND = AC$. Probar:

[4]El editor agradece la colaboración del profesor Francisco Bellot Rosado, catedrático del IES Emilio Ferrari de Valladolid y Premio Internacional Paul Erdos la referencia del artículo:
La existencia de un triángulo con longitudes de las bisectrices prescritas, American Mathematical Monthly Vol 101, N 1 (Jan, 19949, 58-60), de los profesores Laurentiu Panaitopol, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Bucarest, Rumanía.

(a) Los puntos $F(A) = MD\cap$, $A' = CE \cap BD$, y A, son colineales siendo la recta que los contiene la bisectriz interior del ángulo, A.

(b) ¿ Qué relación geométrica existe entre los triángulos $A'B'C'$ y $F(A)F(B)F(C)$, con respecto al triángulo ABC ?

Propuesta de Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

124. Sea el triángulo ABC y su circunferencia inscrita C de radio r. Sean las rectas tangentes a la circunferencia C paralelas a los lados del triángulo, que determinan con los vértices los triangulos PQC, RSB, TUA. En cada triángulo, construimos la circunferencia inscrita de radios r_1, r_2, r_3, respectivamente. Entonces: $r = r_1 + r_2 + r_3$.

Peiró i Estruch, R., Comunicación personal (2003)

125. Sea P un punto del arco menor AB de la circunferencia circunscrita del triángulo equilátero ABC. Se tiene que, $CP = AP + BP$.

Yiu P., Euclidean Geometry (1998)150
Propuesta del profesor Ricard Peiró, del IES 1 de Cheste

126. Sea P un punto de la circunferencia inscrita al triángulo equilátero ABC de lado a. Se tiene que[5] $AP^2 + BP^2 + CP^2 = \frac{5}{4}a^2$.

Yiu P., Euclidean Geometry (1998)150
Propuesta del profesor Ricard Peiró, del IES 1 de Cheste

127. Dado un triangulo arbitrario OAB, se forma un triangulo en los lados que generan a AB de vectores $toverrightarrowOA$, $soverrightarrowAB$ y $roverrightarrowOB$ con origen en O, A y O respectivamente. La razón entre las áreas del triangulo inicial y el nuevo es

$$\frac{1}{|s(t-r) - tr + r|}$$

Propuesta del profesor Nicolás Rosillo, del IES Máximo Laguna de Santa Cruz de Mudela

128. Demostrar que cada lado de un triángulo es menor que el semiperímetro.

Ruiz Tapiador, A., Nociones y ejercicios de aritmética y geometría (1926)

16 de diciembre de 2003 - 15 de enero de 2004

129. Resolver los triángulos rectángulos definidos como sigue:

(1) $A = 90°$, $a = 8$, $C = 45°$;

(2) $A = 90°$, $b = 11$, $32°45'$;

(3) $A = 90°$, $a = 15$, $c = 9$;

(4) $B = 90°$, $a = 15$, $b = 9$.

Carranza, E.P., Matemáticas Tercer Curso del Bachillerato, Editorial Summa, S.L. Madrid (1962)182

130. Resolver un triángulo dado un ángulo, el lado opuesto y la razón de los otros dos lados.

Rey Pastor, J., Curso Cíclico de Matemáticas, Tomo I, Las Magnitudes y las funciones elementales, con aplicación a la mecánica, física, química, ingeniería, etc.(2ª Edición)Madrid- Buenos Aires (1930)137

[5] Sugerencia del editor. *Si P es de la circunferencia circunscrita, se tiene que $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2a^2$*

16-31 de enero de 2004

131. Dividir el perímetro de un triángulo en dos triángulos con el mismo perímetro por una ceviana. Tal ceviana se denomina *escisor*. Los tres escisores de un triángulo se cortan en un *punto* llamado *de Nagel*.

Honsberger, R., Episodes in 19 & 20 C Euclidean Geomtry, MAA (1995)5

132. Dividir un triángulo en dos triángulos con la misma área por una ceviana.

Propuesto por el editor Barroso, R.

133. Dividir un triángulo en dos figuras, un cuadrilátero y un triángulo de la misma área por un punto que no sea vértice ni punto medio de un lado.

Propuesto por el editor Barroso, R.

134. Dividir un triángulo en dos figuras, un cuadrilátero y un triángulo del mismo perímetro por un segmento que pase por un punto que no sea un vértice.

Propuesto por el editor Barroso, R.

135. **Todos los triángulos son isósceles. Sofisma tercero.**
Demostrar que todos los triángulos son isósceles. Sea ABC un triángulo cualquiera. Tomemos el punto medio D del lado BC considerándolo como base, y tomemos por D la perpendicular a BC. Tracemos ahora la bisectriz del ángulo opuesto A.

(1) Si esta bisectriz no se encuentra a la perpendicular a BC por D, siendo por tanto paralela a ella y, por consiguiente, es perpendicular a BC, en ese caso el triángulo ABC es isósceles.

(2) Si la bisectriz del ángulo se encuentra con la perpendicular a BC por D, el punto de encuentro O está en el interior o en el exterior del triángulo.

Supongamos en primer lugar que está en el interior, desde este punto O, tracemos las perpendiculares OE, y OF sobre AC y BC, y después tracemos OB y OC.
El punto O está en la bisectriz del ángulo A, por lo que las dos perpendiculares OE y OF sin iguales y los dos triángulos rectángulos OAE y OAF son iguales, por lo tanto (I) $AE = AF$. De igual manera $OB = OC$, y los dos triángulos rectángulos OCE y PBF son también iguales, de donde: (II) $EC = BF$.
Sumando miembro a miembro (I) y (II), tenemos: $AE + EC = AF + BF$ de donde $AC = AB$, de donde se tiene la conclusión de que el triángulo ABC es isósceles.
Supongamos en segundo lugar que el punto O esté en el exterior del triángulo ABC. Hagamos la misma construcción: Los dos triángulos rectángulos OAE, OAF son iguales y (1) $AE = AF$. Del mismo modo, la igualdad de los dos triángulos rectángulos OCE, OBF nos da (2) $CE = BF$.
Restando miembro a miembro (1) de (2), queda: $AE - CE = AF - BF$, de donde $AC = BC$.
Así pues, el triángulo ABC es isósceles en todos los casos posibles, resultado evidentemente absurdo.

Ball, W.R., Recreaciones Matemáticas y problemas de los tiempos antiguos y modernos. Segunda edición francesa (1908)5, tratada después de la cuarta inglesa con numerosas adiciones,

Librairie Scientifique A. Hermann, París

En The Open University, Lógica II. Curso básico de Matemáticas, McGraw-Hill, México (1974)23, está referenciado el primer "caso", (Traducción de Hernando Alfonso, Universidad Pedagógica Nacional).

1-15 de febrero de 2004

136. Si se toman dos números desiguales cualesquiera, el doble de su producto, y la diferencia de sus cuadrados, serán los dos lados de un triángulo rectángulo, y la suma de los mismos cuadrados será la hipotenusa.

Frenicle, Tratado de los triángulos rectángulos en números, en los que varias propiedades bellas de estos triángulos son demostradas por nuevos principios, (1676)23, Proposición X.

137. Sea ABC un triángulo. Sea P un punto que no pertenezca al mismo. Trazar por P una recta de manera que corte al triángulo en dos figuras geométricas de la misma área.

Propuesto por José Nogareda Villar,
profesor de matemáticas del IES "Ramón Olleros de Béjar", Salamanca

138. Dado un triángulo ABC trazar una secante que corte a AB en M y a BC en N, de manera que el cuadrilátero AMNC y el triángulo BMN tengan el mismo perímetro y la misma área.

Preparación de Olimpíadas.
Propuesto por Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero, Priego de Córdoba

139. Dado un triángulo equilátero ABC se construyen los segmentos $AD = DC = CE = EB = AF = BF$. Calcular la medida del ángulo DEF.

Quinto Consurso Nacional de Perú de la Academia Cesar Vallejo (2003)
Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor de la Academia San Isidro, Huaral, de Perú.

140. Sea G el baricentro del triángulo. Sea M un punto cualquiera del plano. Entonces, $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3MG^2$.

Rouché-Comberousse, Traité de Géomètrie. Gautier-Villars, París (1929)3
Propuesto por Ricard Peiró i Estruch, profesor de Matemáticas del IES 1 de Xest, València

141. Proyectamos los vértices de un triángulo ABC sobre los puntos A', B', C' de una recta m cualquiera del plano de ABC. Trazamos las rectas $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ perpendiculares a BC, CA y AB, respectivamente. Entonces: Las tres rectas se cortan en un punto M . (J. Neuberg)
Cuando la recta m pasa por el centro de O de la circunferencia ABC, el punto M está sobre la circunferencia de los nueve puntos de ABC. (Soons, profesor en Tirlemont)

F.G.M., Exercices de géométrie, comprenant l'esposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues,5 ed. (1912)632

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero, Priego de Córdoba

142. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, de hipotenusa a, y catetos b y c. En la forma que es usual de demostrar el teorema de Pitágoras, hacemos las siguientes construcciones.

(1) Cuadrado $ADFH$ de lado $b+c$, con la copia de cuatro triángulos, ABC, en su interior, y el cuadrado $BEGC$, de lado a.

(2) Por los vértices consecutivos A y H del cuadrado, construimos para cada uno los rectángulos $LBCK$, $CGIJ$, tal que $KL \parallel BC$ y $CG \parallel IJ$, respectivamente, de área, $bc = ah$, donde h es la altura de la hipotenusa.

(3) Por último, sean los puntos X, Y, y Z, los puntos de intersección de las diagonales de los trapecios $ICBE$, $JGEB$, $GEBK$, respectivamente.

Demostrar que:

(a) El triángulo XYZ, es rectángulo e isósceles, y, encontrar todas las propiedades geométricas del mismo.

(b) De toda la figura antes descrita encontrar una nueva demostración del Teorema de Pitágoras.

(c) Si con los vértices F y D del cuadrado se procede por simetría de la misma forma, en todas las construcciones hechas, demostrar que el cuadrilátero obtenido es un cuadrado semejante al cuadrado $BEGC$. Hallar el centro y la razón de la semejanza.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

143. Por el vértice B de un triángulo, trazar una recta tal que las perpendiculares AP y CQ a ella determinen dos triangulos ABP y CBQ cuyas superficies estén en una razón dada. Se lleva ABP a la posición CBP_1, variando al mismo tiempo su tamaño, y con BC como diámetro se traza un círculo. La cuerda P_1Q tiene entonces una posición determinada y BC la corta según una razón conocida.

Petersen, J., Méthodes et théories pour la résolution des problémes de constructions géomètriques, Gauthier-Villars, (1901)64, problema 330

Propuesto por José María Pedret, Ingeniero Naval, Esplugas de Llobregat, Barcelona

144. Dadas dos rectas r y r' y un punto P que pertenece al plano que determinan las rectas pero no pertenece a ninguna de ellas, determinar un triángulo equilátero que tenga por vértice el punto P y los otros dos vértices cada uno sobre una recta.

Olimpiadas
Propuesto por Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero, Priego de Córdoba

16-29 de febrero de 2004

145. Por cualquier punto de la base BC de un triángulo isósceles ABC se levanta una perpendicular que corte a los otros dos lados (o sus prolongaciones) en F y G. Demostrar que el triángulo AFG es un triángulo isósceles[6].

Velasco, G., Tratado de Geometría, Limusa, México, (1983)104

146. Sea ABC un triángulo cualquiera[7]. Sean los puntos: L sobre AB tal que $2 \cdot AL = AB$, M sobre BC tal que $3 \cdot BM = BC$, N sobre AC tal que $4 \cdot AN = AC$. Si P es la intersección de AM con BN, demostrar que LP es paralela a BC.

Velasco, G., Tratado de Geometría, Limusa, México, (1983)105

[6] Nota del editor. Salvando el punto medio de BC, a no ser que se considere el triángulo degenerado AFG donde $A = F = G$.
[7] Nota del editor. Redacción literal, levemente *alterada*, sin cambiar el contenido geométrico.

1-15 de marzo de 2004

147. Sean: un triángulo equilátero ABC de lado a, una circunferencia de centro el incentro de ABC y de radio r. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia. Demostrar que: $PA^2 + PB^2 + PC^2 = a^2 + 3r^2$.

Propuesto por el editor Barroso, R.

148. Hallar el área del triángulo $O(0,0)$, $P(4,7)$, $Q(-3,5)$.

Segura, S., Matemáticas Sexto Curso, ECIR, Valencia (1969)75, Ejemplo 1.

149. **Teorema de E. Catalan (1814-1894) o circumferència de Taylor.**
Si los pies de las alturas de un triángulo se proyectan sobre los otros lados (o rectas que contienen los lados) se obtienen 6 puntos que forman un hexágono inscrito en una circumferencia[8].

Coolidge, J. L., A Treatise on the Geometry of the Circle and Sphere, New York, Chelsea (1971)71-73
Propuesta del profesor Ricard Peiró del IES número 1 de Cheste

150. Sea el triángulo ABC, donde AD y CE son bisectrices interiores. En la prolongación de ED se toma el punto P, desde el cual trazamos las perpendiculares PJ, PK y PL sobre AB, BC y AC respectivamente. Probar que $PK = PJ + PL$.

Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.

151. En un triángulo acutángulo ABC, AA_1, BB_1 y CC_1 son alturas, A_1B_1 corta a CC_1 en E, AA_1 corta a B_1C_1 en D. La recta DE corta a AB y BC en P y Q. Probar que $\angle PB_1C_1 = \angle QB_1A_1$ y además que AQ, CP y BB_1 son concurrentes.

Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.

16-31 de marzo de 2004

152. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9} = 10 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$$

siendo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, resolviéndolo geométricamente.

Propuesto por el profesor Ricard Peiró del IES número 1 de Cheste

153. El área de un triángulo rectángulo és igual al producto de los segmentos determinados en la hipotenusa por la circunferencia inscrita.

Levi S. Shively, PH.D., Introducción a la Geometría Moderna,
Compañia editorial continental, Mèxico (1972)171

Bruño, Geometría Curso Superior (1963)250, problema 523

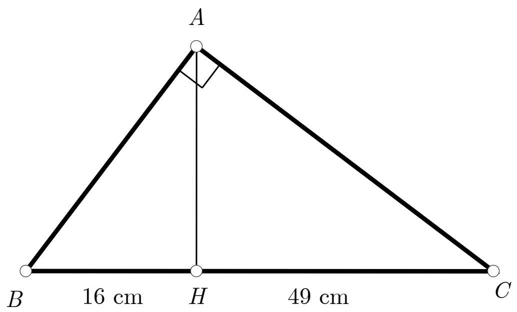
[8]Añadido por el editor. Tres lados del hexágono son paralelos a los lados del triángulo, Lidski, V. y otros, Problemas de Matemáticas elementales (1978)58, Problema 366.

154. Dado un triángulo isósceles con sus ángulos iguales de 75°, descomponerlo en cinco triángulos isósceles y uno equilátero de tal manera que se pueda construir con los seis un cuadrado.

Kurina, F., Geometry-The resource of opportunities (2003), documento presentado a Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education,

28 February - 3 March 2003 in Bellaria, Italy (CERME, 2003) (Modificado por el editor).

155. ¿Tendrá dinero suficiente un albañil con 6.000 euros para colocar una tapia a un solar de forma triángulo rectángulo si el metro de tapia importa 30 euros? ¿Qué dinero le sobrará o le faltará? Las medidas del solar son las del dibujo, es decir, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 16 m y 49 m.[9]



Berenguer, L. y otros, Problemas propuestos en los 10 años de la olimpiada matemática Thales, SAEM Thales, Proyecto Sur de Ediciones, Granada, (1995)58, III Olimpiada Thales

156. Sean $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera, P y Q los puntos medios de los lados opuestos DC y AB respectivamente. Sea X la intersección de los segmentos DQ y AP e Y la intersección de QC y PB. ¿Qué relación hay entre las áreas del cuadrilátero $PXQY$ y la de los triángulos ADX y BCY?

Propuesto por los profesores Jesús Murillo Ramón y Jose Francisco Martín Olarte Departamento to de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja

1-15 de abril de 2004

157. En un cuadrilátero[10] convexo $ABCD$, las prolongaciones de AB y DC se cortan en P. Si los puntos medios de AC y BD son M y N respectivamente, demostrar que el área del triángulo MNP es 1/4 del área de $ABCD$.

Posible autor Th. Caronnet
Coxeter, H.S.M. y Greitzer, S.L., Retorno a la Geometría, La tortuga de Aquiles,

Traducción de P. G. y J. Hernández (1993)54

Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.

158. Sea el triángulo ABC inscrito en un circulo (O). El Circulo (K_1) está dentro de $\angle A$ del triángulo y es tangente a los lados AB, AC en M_1, N_1 y también es tangente al círculo (O) en P_1. Los puntos M_2, N_2, P_2 y M_3, N_3, P_3 son definidos similarmente para los ángulos B y C respectivamente. Probar que M_1N_1, M_2N_2 y M_3N_3 se intersecan entre ellos en sus puntos medios.

Foro de Internet Hyacinthos
Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.

[9] Nota del editor. Los valores iniciales (100.000 pts y 500 pts, del año 1987, se han actualizado)
[10] El editor y el proponente del problema agradece a Darij Grinberg de Karlsruhe (Germany) la referencia de este problema.

159. Complete el siguiente cuadro clasificando los triángulos cuyos lados tienen los valores que se indican:

a	b	c	Tipo de triángulo
9	5	6	
14	7	12	
11	7	8	
5	4	5	
8	7	6	

Sánchez, M., Geometría sin esfuerzo, Editorial Playor (1983)178

160. En un triángulo isósceles el ortocentro está en la circunferencia inscrita. Determina los ángulos.

V. Gúsiev y otros, Prácticas para resolver Problemas matemáticos, Geometría, Ed. Mir. (1989)45
Propuesto por el profesor Ricard Peiró del IES número 1 de Cheste

161. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, que tiene la siguiente propiedad: Si AA' es la bisectriz del ángulo A, donde A' es su pie sobre la hipotenusa de ABC, y si se verifica que, $A'B = 2r$, caracterizar el triángulo que verifica esta propiedad.

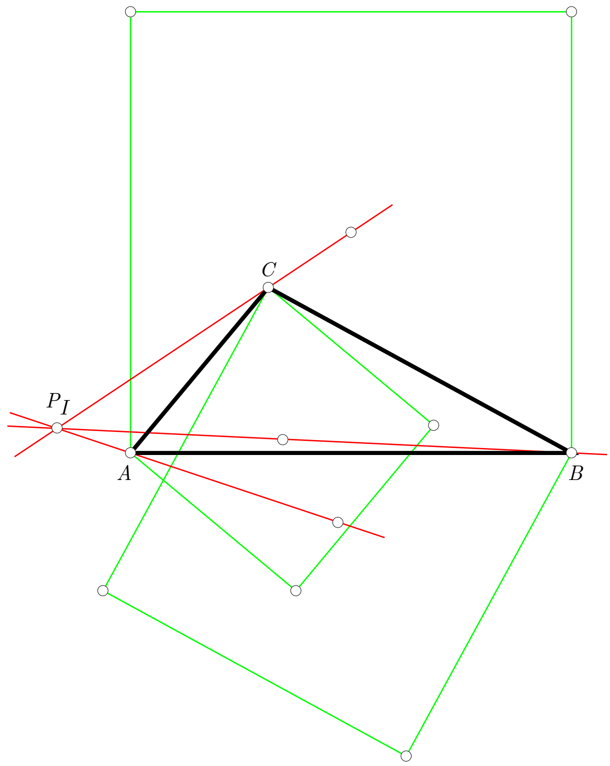
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

162. Sean ABC y $A_1B_1C_1$ dos triángulos con loa lados paralelos, uno en el interior del otro. Si DEF es un triángulo circunscrito a uno e inscrito al otro, demostrar que: $[DEF]^2 = [ABC][A_1B_1C_1]$.

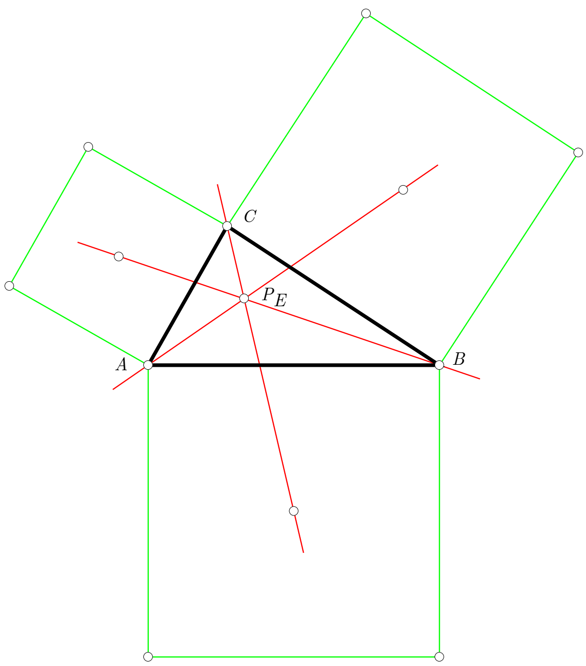
F.G.-M., Exercises de Géométrie, 6th Edition (1920)765-766, J. Gabay reprint, Paris 1991
Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.

16-30 de abril de 2004

163. De forma análoga a como se obtienen los dos puntos de Fermat, construimos un cuadrado sobre cada uno de los lados de un triángulo y unimos cada centro de estos cuadrados con el vértice opuesto (del lado sobre el que está el cuadrado) del triángulo.

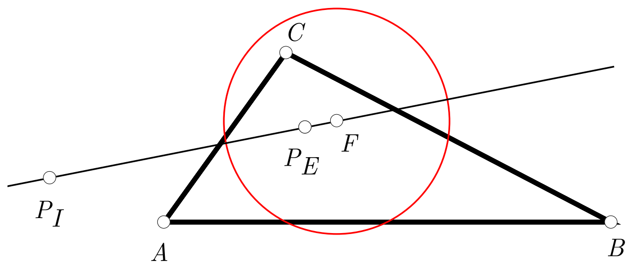


Así, se obtiene P_I cuando los cuadrados se construyen por el interior de los lados del triángulo:
Éste es el llamado INNER VECTEN POINT X(486) de la lista de Kimberling[11].
Cuando los cuadrados se construyen por el lado exterior, se obtiene el punto P_E:



[11]Ver el problema 93 de esta colección, con soluciones de F. Damián Aranda Ballesteros, Juan Carlos Salazar, con generalización, y de Saturnino Campo Ruiz (16-30 de abril de 2003)

Este es el llamado Vecten Point $X(485)$. Pues bien P_I, P_E y el centro de la circunferencia de los nueve puntos F[12] siempre están alineados[13].



Propuesto por José Montes Valderrama, profesor del Centro Público de Adultos "Triana", Sevilla.

164. Relaciones en un triángulo rectángulo: $b = a \sin B$, $c = a \sin C$. Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo oblicuángulo: $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$.

Sánchez, E., Tablas de logaritmos, trigonométricas y de cálculos de intereses[14]*, Madrid (1901)LXVIII*
Propuesto por Eusebio Sánchez Ramos, Catedrático de Matemáticas del Instituto de Logroño.

1-15 de mayo de 2004

165. Para el triángulo $A(1,3)$, $B(-2,1)$, $C(0,-4)$, encontrar:

(a) Distancia BC.

(b) Pendiente de AB.

(c) Pendiente de la perpendicular a AB.

(d) Punto medio de AC.

(e) Coordenadas del baricentro

(f) Cosenos directores de AC.

(g) Pendiente de una paralela a AC.

(h) Ángulo ABC.

(i) Área de ABC.

[12] ver problema 8 con soluciones de Saturnino Campo Ruiz y del editor (1-15 noviembre 2000), problema 12, con solución del editor (16-30 noviembre 2000), problema 15 sin resolver, 1-15 de diciembre de 2000), problema 110 con Estudio de José Manuel Arranz San José, demostración según de Sortais, Y, R, (1997-2002), traducida por el editor, solución de Saturnino Campo Ruiz y traducción del profesor Francisco Javier García Capitán

[13] El editor agradece a Darij Grinberg de Karlsruhe (Germany) que comunicara a Juan Carlos Salazar la ampliación de esta recta de Montes al punto de Lemoine.

[14] Obra aprobada por la Real Academia de Ciencias. Comprende esta obra una tablas de logaritmos vulgares, con seis decimales..., Cuarta edicion estereotipada de nuevo al galvanismo y considerablemente aumentada. Madrid Librería de Hernando y Compañía, calle del Arenal, núm 11.

Oakley, C. O., Analytic Geometry with review questions and answers, Barnes & Noble College outline, Inc. New York. (1949-1970),26-27

166. Sean el círculo circunscrito a un triángulo ABC y H el punto de encuentro de las alturas. Si se prolonga la altura CG hasta F se tendrá: $HG = GF$[15]

André, M. Ph., Éléments de GÉOMÉTRIE Conformes aux programmes de baccalauréats (1re partie) de l'enseignement secondaire classique et de l'enseignement secondaire moderne, Contenant plus de mille problémés résolus et a resoudre. (Treinte-quatriéme edition). Paris (1920), Librairie classique de FE André Guédon. E. Andre Fils Succeseur, 6 rue Casimir-Delavigne (près l'Odeon), (p. 83)

Teorema 254. *El segmento de una altura desde el ortocentro al lado es igual en su extensión del lado al cincuncírculo; si A_1H se extiende hasta encontrarse con el circuncírculo en H_1' entonces es $H_1H_1' = HH_1$. Johnson, R. A. (1929, 1960): Advanced euclidean geometry (formalmente titulada: Geometría moderna). Un tratado elemental sobre la geometría del triángulo y del círculo, Dover, New York.*

167. Se da el triángulo ABC. Se trazan cevianas cualesquiera AA', BB' y CC' que concurren en D. Se quiere que el triángulo homológico sea equilátero y que el punto homólogo del D sea el ortocentro[16].

Olabarrieta L.(S.J.), Geometría y Trigonometría, Bilbao (1945)449
Propuesta del profesor Saturnino Campo Ruiz, del IES Fray Luis de León de Salamanca

168. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo O. El punto de corte de sus diagonales AC y BD es P, las prolongaciones de AB, DC y CB, DA se cortan en Q y S respectivamente. Probar que O es el ortocentro del triángulo PQS.

Levi Shively PhD, Introducción a la Geometría Moderna, Editorial CECSA, México (1972)112
Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.

16-31 de mayo de 2004

169. Dado un triángulo ABC se trazan sus circunferencias inscrita y exinscritas. Por los puntos de tangencia A_0, B_0, C_0 de la inscrita con el triángulo ABC se traza un triángulo de área S_0. Por los puntos de tangencia de cada circunferencia exinscrita con los lados se trazan tres triángulos $A_1B_1C_1$ de área S_1, $A_2B_2C_2$ de área S_2, $A_3B_3C_3$ de área S_3. Demostrar que

$$\frac{1}{S_0} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}$$

[15]**Traducción literal del editor.** Se precisa que G es el punto de corte de la altura desde C con el lado AB o su prolongación. F es el punto de corte de la altura con la circunferencia circunscrita.

[16]Nota del editor. A consultas el profesor Campo señala que es cita literal. Entendemos que quizá sea necesario precisar que D', el homologo de D en la homología buscada de centro M, es el ortocentro del nuevo equilátero. Además, es importante reseñar, a jucio del editor, que UWV, el triángulo equilátero buscado, homólogo de ABC, por la homología de centro M, tiene sus vértices sobre AA', BB' y CC', o sus prolongaciones, no necesariamente en ese orden. Este último juicio no es cierto. El editor lamenta profundamente la confusión que ha podido originar esta visión.

Por el contrario sí es cierto que $A'B'$ y AB se cortan sobre una recta límite de la homología, $A'C'$ y AC también se cortan sobre la misma recta límite, al igual que $B'C'$ y BC.

El editor agradece al Profesor Campo la aclaración. El profesor Saturnino Campo propone esta nueva redacción para el problema:
Sea ABC un triángulo y D un punto del plano no situado en ningún lado (ni en sus prolongaciones). Probar que existe alguna homología que transforma el triángulo ABC en un triángulo equilátero y el punto D en el centro de ese triángulo. Si se elige un punto A^* como homólogo del vértice A, la homología es única. Determinarla.

Autor desconocido

170.

(A) En un triángulo ABC, trazar una transversal que corta a AB en X y a CA en Y de manera que $BX = YX = YC$. Indicación: Inténtese predeterminar la forma de $BXYC$.

(B) Por medio de lo anterior: construir un triángulo ABC, conociendo el ángulo en A, la suma de lados $a+b$ y la suma de lados $a+c$, donde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Petersen, J., Métodos y Teorías para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas. Gauthier-Villars (1880), Gabay, J. (1990), problema 179 , pag. 33.

Propuesto por José María Pedret, Ingeniero Naval, Esplugas de Llobregat, Barcelona

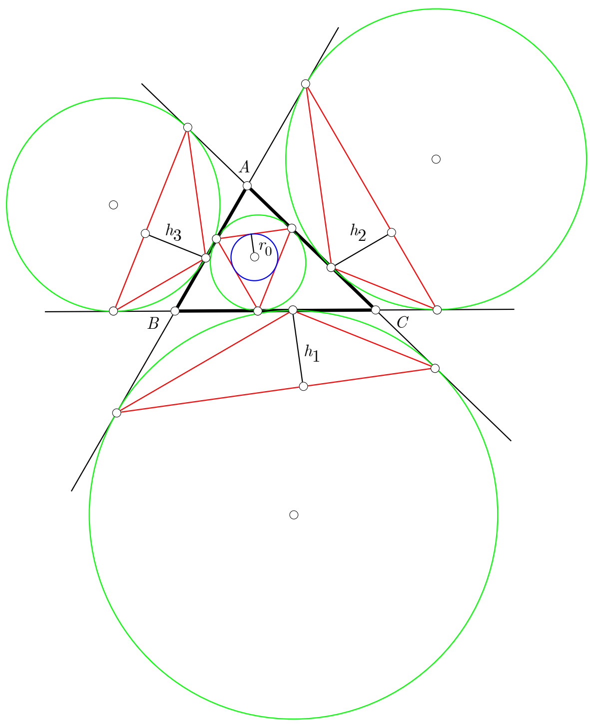
171. En un triángulo ABC, con triángulos tangenciales externos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ y triángulo tangencial interno $A_0B_0C_0$. Demostrar que:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

donde h_1, h_2 y h_3 son alturas[17] y r_0 es el inradio del triángulo $A_0B_0C_0$.

Salazar, J.C., Propuesta personal (2004)

Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.



172. Sea el triángulo ABC, M_a, M_b, M_c, los puntos medios de sus lados y H_a, H_b, H_c, los puntos de intersección de las semirectas bisectrices de cada lado que cortan a la circunferencia circunscrita, y no cortan a ninguno de los otros dos lados
Siendo I el incentro de ABC, el triángulo $H_aH_bH_c$ corta a los segmentos AI, BI y CI en los puntos A', B', y C'.

[17] Por consulta del profesor Ricard Peiró, se aclara que: h_i es una altura de $A_iB_iC_i$, la que parte del vértice que está situado en el triángulo ABC. El editor agradece el interés por el enunciado.

(1) El hexágono $A'M_cB'M_aC'M_b$ tiene la mitad de área que el triángulo ABC.

(2) Las diagonales $A'M_a$, y $B'M_b$ se cortan en J. Demostrar que J pertenece a $C'M_c$.

(3) J está en la recta que une el incentro I y el baricentro G del triángulo ABC, verificándose la relación: $IJ = 3 \cdot JG$.

Propuesto por José Montes Valderrama, profesor del Centro Público de Adultos "Triana", Sevilla.

173. **Relaciones entre los lados y los ángulos de un polígono.** Principiando por el triángulo designaremos por a, b, c las magnitudes absolutas de los lados, por A, B, C los ángulos opuestos, según se acostumbra en trigonometría; tomemos por origen el vértice del ángulo C y por eje el lado CB, suponiendo que el vértice del ángulo A está á la parte superior.... dos fórmulas conocidas:

$$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C \qquad , \qquad c \cdot \sin B = b \cdot \sin C$$

que pueden servir para determinar dos de las cinco cantidades que entran en ellas cuando las otras tres sean conocidas, determinándose el sexto elemento del triángulo por la ecuación $A + B + C = \pi$.

Domínguez, M., Elementos de Geometría Analítica, Edición del autor, Madrid, (1879)29

1-15 de junio de 2004

174. El triángulo ABC tiene $AB = AC$, D sobre BC y $\angle BAD = 30°$, E sobre AC tal que $AE = AD$. Hallar la medida del ángulo EDC. Nota del editor: $\angle BAC$ mayor que $30°$.

Goldin G.A. y McClintock, C.E., Task variables in mathematical problem solving, Franklin Intitute Press (1984)

175. En un triángulo ABC es $AB = AC$. D es el punto medio de BC, E es el pie de la perpendicular trazada por D a AC, F es el punto medio de DE. Demostrar que AF es perpendicular a BE.

Larson, L.C., Problem-solving through problems, PBM, Edited by P.R. Halmos, Springer Verlag (1990)27
Gúsiev V. y otros, Problemas Matemáticos. Geometría, Ed. Mir Moscou, (1989)90, Problema 455[18]

In memoriam. Homenaje del profesor Juan Bosco Romero Márquez a Miguel de Guzmán Ozámiz(1936-2004)

176. Sea un triángulo ABC, rectángulo en A y no isósceles. Sean los puntos B' y C' los simétricos de B y C, respectivamente, según el eje AH siendo H el pie de la perpendicular trazada desde A al lado BC. Construimos los triángulos ABB' y $A'CC'$ siendo A' tal que AB' sea paralelo a $A'C$, y A' sobre la recta AH. Sean BF y $C'F'$ las alturas de los vértices B y C' en BAB' y $C'AC$. Por F y F' tracemos FG y $F'G'$ perpendiculares de F y F' sobre BC. Probar que AH es media aritmética de los segmentos FG y $F'G'$.

Romero, J.B., Comunicación personal (2004)

[18]Referencia ofrecida por Ricard Peiró i Estruch profesor de Matemáticas del IES 1 de Xest (València), a quien el editor agradece la cita.

16-30 de junio de 2004

177. Tenemos los triángulos de ángulos

- $30°$, $90°$, $60°$;
- $45°$, $90°$, $45°$.

¿Cuánto miden en ambos casos los ángulos exteriores?
¿Cuánto mide la suma en cada caso de los exteriores?

Modificado de: Saá, M.D. y otros, Los ángulos: Un recurso para su aprendizaje, Secretariado de publicaciones, Universidad de Murcia, (1990)110

178. Tenemos un triángulo ABC con D sobre CB, tal que $AC = CD$, y $\angle CAB - \angle ABC = 30°$. Hallar la medida del ángulo BAD.

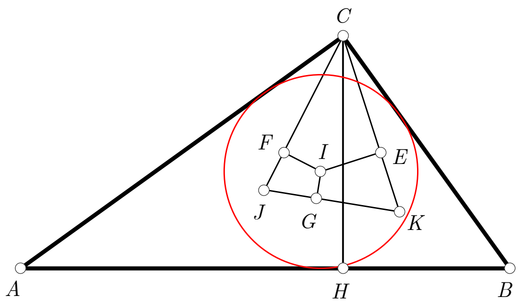
Goldin G.A. y McClintock, C.E., Task variables in mathematical problem solving, Franklin Intitute Press (1984)232

179. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Por un punto O del cateto AB tracemos la perpendicular OH a la hipotenusa BC. Sea D el punto de intersección de la recta OH con la recta AC. Tracemos BD. Sea E el punto de intersección de la recta BD con la CO. Hallar el lugar geométrico de E cuando O recorre AB.

André, M. Ph., Éléments de GÉOMÉTRIE Conformes aux programmes de baccalauréats (1re partie) de l'enseignement secondaire classique et de l'enseignement secondaire moderne. Contenant plus de mille problémés résolus et a resoudre.(Treinte-quatriéme edition), Paris, (1920)82 Librairie classique de FE André Guédon, E. Andre Fils Succeseur, 6 rue Casimir-Delavigne (près l'Odeon).

Edición veraniega del 1 de julio de 2004 al 31 de agosto de 2004

180. El triángulo ABC es recto en C, CH es altura, I, J y K son incentros de los triángulos ABC, AHC y BHC. Si $x = IF$, $y = IE$, $z = IG$ son las distancias desde I hacia JC, KC y JK, respectivamente. Demostrar que: $r = \frac{xy}{z}$, donde r es inradio de ABC. Ver figura:



Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.

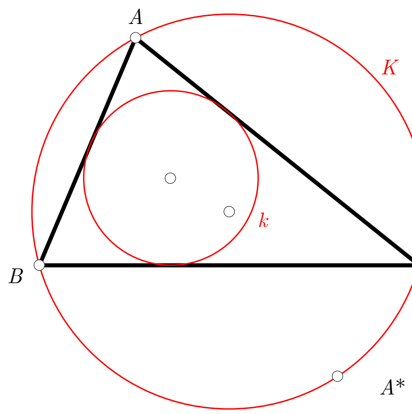
181. El lado AB en el triángulo ABC es mayor que AC, y D es el punto medio de BC. Desde C dibujamos dos perpendiculares a la bisectrices interior y exterior en el ángulo A encontrando a aquellas en F y G respectivamente. Probar que :

(i) $DF = \dfrac{1}{2}(AB - AC)$;

(ii) $DG = \frac{1}{2}(AB + AC)$

Aref, M.N., Wernick, W., Problems and Solutions in Euclidean Geometry, Dover, New York, (1968)9-10
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

182. **El teorema de los polígonos cerrados de Poncelet.** Se tienen dos circunferencias una k dentro de otra K. Supongamos que desde un punto A de K (la exterior) sucede lo siguiente: trazamos por A una tangente a k que vuelve a cortar a K en B; por B trazamos la otra tangente a k, que vuelve a cortar a K en C; por C trazamos la otra tangente a k, que resulta que vuelve a cortar a K en A (es decir, se cierra la sucesión de tres tangentes). Entonces eso mismo pasa (es decir el triángulo también se cierra) cuando hacemos la misma operación partiendo de cualquier otro punto A^* de K. ¡Demostrarlo![19]



Guzmán, M. de, La experiencia de descubrir en Geometría, Nivola Libros (2002)102
Propuesto por Saturnino Campo Ruiz, profesor del IES Fray Luis de León, de Salamanca

183. Dado un triángulo ABC y una transversal t, se toma un punto cualquiera de ella V y se trazan rectas VA, VB y VC. Se toman después rectas VA', VB' y VC' simétricas de las primeras respecto de la transversal t, siendo A', B' y C' los puntos de intersección con los lados BC, CA y AB del triángulo. Demostrar que A', B' y C' están alineados.

Campo, S., Comunicación personal (2004)
Propuesto por Saturnino Campo Ruiz, profesor del IES Fray Luis de León, de Salamanca

184. En todo triángulo, el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados y la mediana del tercer lado se dividen mutuamente por la mitad.

Velasco de Sotomayor, G., Tratado de Geometría, Limusa (1983)97

185. Dado un triángulo ABC, sean T y T' los puntos de tangencia de las circunferencia inscrita y exinscrita con BC. Demostrar que $|TT'| = |b - c|$.

Propuesto por José Montes Valderrama, profesor del Centro Público de Adultos "Triana", Sevilla.

186. En un triángulo ABC, L, M y N son los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente. D es el pie de la altura correspondiente al vértice A. Demostrar que $\angle NDM = \angle NLM$.

Velasco de Sotomayor, G., Tratado de Geometría, Limusa, (1983)97

[19] En el enunciado anterior puede sustituirse la palabra circunferencia(s) por cónica(s) y el enunciado subsiste.

187. Supongamos que las cevianas AD, BE y CF tienen un punto P común en el interior de ABC. Demostrar que

$$\frac{DP}{AD}+\frac{EP}{BE}+\frac{FP}{CF}=1$$

Rike, T., Perennial roblems from geometry, Berkeley math circle (2003)

188. **Punto de Clawson.** Dado un triángulo acutángulo ABC, consideremos dos triángulos:

(a) El órtico, $H_aH_bH_c$;

(b) El triángulo MNP, formado por las tangentes exteriores al conjunto de los tres círculos exinscritos al triángulo ABC.

(c) Los triángulos $H_aH_bH_c$ y MNP son homotéticos y su centro de homotecia es el punto de Clawson.

http://mathworld.wolfram.com/ClawsonPoint.html
Propuesta de J. C. Salazar, Profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, Puerto Ordaz.

189. Dado el triángulo ABC trazar una paralela a AB tal que divida el perímetro por la mitad.

Propuesto por el editor Barroso, R.

190. Dado el triángulo ABC se traza una paralela a AB tal que divida el perímetro por la mitad. Se traza otras paralelas a BC y CA con la misma condición. Estas tres paralelas conforman el triángulo MNP. Demostrar:

(a) MNP es homotético a ABC.

(b) Estudiar el centro de homotecia U en en la ETC de Clark Kimberling. Es decir, hallar con diez decimales la "altura" de U sobre el triángulo de lados 6 cm (horizontal) 9 cm (derecho) 13 cm (izquierdo) de Clark Kimberling, y catalogarlo entre sus 2445 puntos del triángulo.

Propuesto por el editor Barroso, R.(2004)[20]

[20]Con permiso de Clark Kimberling, a quien se agradece su gentileza.

0.5 Curso 2004

1-15 de Setiembre de 2004

191. En un triángulo ABC, tomemos P tal que B y P estén en el mismo semiplano respecto a la recta AB y tal que AP sea bisectriz exterior del ángulo en A. Sean $\angle PAB = x$, $\angle BCA = x - 10°$, y $\angle ABC = 40°$. Calcular las medidas de los ángulos $\angle A$, $\angle C$ y el exterior de $\angle A$ del triángulo.

Rojo, A., Sánchez S.C., Greco, M., Matemática 1, Editorial El Ateneo, Buenos Aires (1973)246

192. Supongamos que el punto P se encuentra sobre la circunferencia K descrita alrededor del triángulo ABC y que P_1, P_2 y P_3 son los puntos simétricos con el punto P respecto a los lados del triángulo ABC. Demostrar que los puntos P_1, P_2 y P_3 están sobre una recta que pasa por el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC.

Lyúbich, Y.I., Shor, L.A., Método cinemático en problemas geométricos. Lecciones populares de matemáticas, Editorial Mir, Moscú, (1978)51

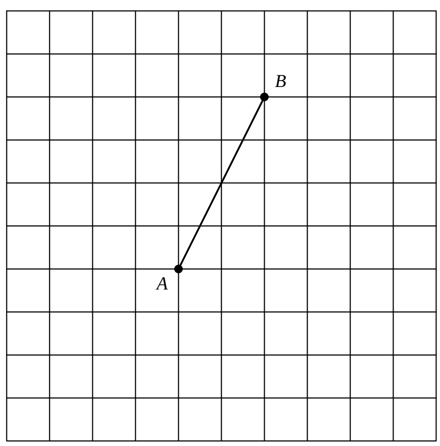
Traducción de Lozhkin, G.A. Original ruso (1976), edición en español (1978).

16-30 de setiembre de 2004

193. Dado un triángulo ABC, hallar el lugar geométrico del ortocentro cuando A recorre la recta paralela al segmento BC.

Martel, J., Lugares geométricos relacionados con un triángulo cuyos vértices son puntos de una curva plana cualquiera (2001)154, En Socas, M., Camacho, M, Morales, A. (Eds). Formación del profesorado e investigación en educación matemática III, Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna.

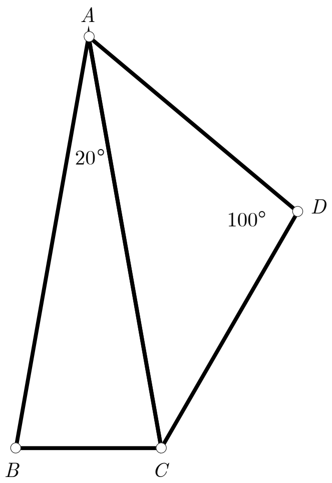
194. AB es uno de los lados iguales de un triángulo isósceles que tiene los tres vértices sobre las intersecciones de las líneas del papel. Completa el triángulo. ¿Cuántos hay diferentes?



Vighi, P., The geometry of squared paper. ICME 10 (2004)

1-15 de Octubre de 2004

195. La figura que se adjunta está formada por dos triángulos isósceles, con al ángulo en A de 20° y el de D de 100°. Demostrar que $AB = BC + CD$.



Giornalino del Gruppo Tutor

196. En el triángulo rectángulo ABC, recto en C sea CD una altura. Los círculos de centros P y Q están inscritos en los triángulos ACD y BCD respectivamente. Si $AC = 15$ y $BC = 20$ determine la medida de PQ.

Propuesto en la Olimpiada de Costa Rica

16-31 de Octubre de 2004

197. En un triángulo rectángulo la diferencia de dos ángulos agudos es igual al ángulo comprendido entre la altura y la mediana relativa a la hipoenusa.

Severi, F., Elementos de geometría I, Editorial Labor (1952)199

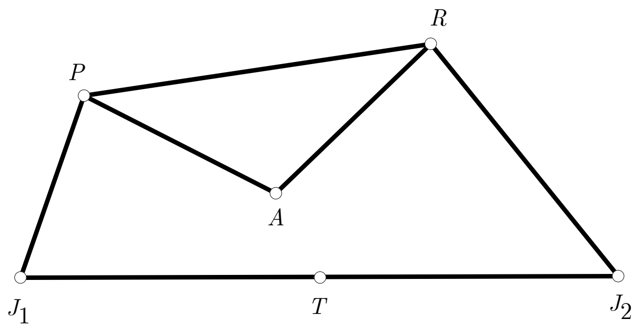
198. Construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 12 cm , sabiendo que dos de sus medianas son perpendiculares.

García Capitán, F. , Propuesta personal (2004)

1-15 de noviembre de 2004

199. Cierta persona se enteró de que en el lugar donde hay enterrado un tesoro crecen solamente tres árboles: un roble, un pino y un abedul. Para encontrar el tesoro hay que situarse debajo del abedul, (A), volviéndose de cara a la línea recta que pasa a través del roble y el pino (R y P). En este caso el roble ha de estar a la derecha y el pino a la izquierda. Luego es necesario dirigirse al roble contando los pasos. Al llegar al roble se vira en ángulo recto hacia la derecha y se da la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el roble. En este punto es necesario detenerse y clavar un jalón (J_1).
Después hay que regresar al abedul y dirigirse desde este hacia el pino, contando los pasos. Al llegar al pino se vira en ángulo recto hacia la izquierda y se da la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el pino. En este punto es preciso detenerse y calvar otro jalón (J_2). El tesoro está enterrado precisamente en el centro entre los jalones (en la figura, T). En presencia de una instrucción tan detallada, las búsquedas

no pudieron provocar dificultades. Sin embargo, éstas a pesar de todo surgieron. Resultó que cuando el buscador del tesoro llegó al terreno indicado sólo encontró el roble y el pino. No había ni señal del abedul. Pero con todo, encontró el tesoro. Surge la pregunta, ¿cómo logró hacerlo?.



Lyúbich, Y.I., Shor, L.A., Método cinemático en problemas geométricos. Lecciones populares de matemáticas, Editorial Mir, Moscú, (1978)9-10

Traducción de Lozhkin, G.A. Original ruso (1976), edición en español (1978).

200. Sea H el pie de la perpendicular trazada desde el vértice A sobre el lado BC del triángulo ABC que es rectángulo en A. Por H trazamos las perpendiculares sobre los lados AB y AC, obteniendo los pies sobre estos lados que denotamos por F y G, respectivamente. Por último, desde F y G dibujamos las perpendiculares sobre el lado BC, obteniendo los puntos K y L respectivamente. Supongamos que el cateto $b = AC$ sea mayor que el $c = AB$. Llamemos $k = FK$, $\ell = GL$ y $h = AH$. Caracterizar y construir todos los triángulos rectángulos tales que

1. ℓ sea media armónica de k y h,
2. ℓ sea media geométrica de k y h,
3. ℓ sea media aritmética de k y h,
4. ℓ sea media cuadrática de k y h,

Romero Márquez, J.B., Comunicación personal (2004).

200a. **El Problema de Castillon.** Inscribir en un círculo un triángulo cuyos tres lados deben pasar por tres puntos dados.

José María Pedret, Ingeniero Naval, Esplugues de Llobregat, Barcelona

201. Construir un triángulo isósceles, sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita es de 4 cm.

Aguirre, A. y otros, Vertex 1. Dibujo técnico. Bachillerato. Editorial Casals (2002)65
Publicado con permiso de la editorial.

202. Sea el triángulo ABC, cuyos excírculos (I_b), (I_c) tienen como puntos de tangencia a (D, E) y (F, G) con (AC, BC) y (AB, BC) respectivamente. Demostrar que FG y DE se cortan en la altura ha del triángulo ABC.

Salazar, J. C., Propuesta personal (2004)

16-30 de noviembre de 2004

203. Sea ABC un triángulo en el que $\angle C = 60°$, $\angle B = 75°$, $\angle A = 45°$. Sea H el pie de la altura trazada desde B sobre el lado AC. Los puntos K y J son los puntos medios del lado AB y del segmento HK respectivamente. El punto L se obtiene como intersección de la recta que pasando por J es paralela al lado AB al cortar al lado BC. Probar que:

1. El triángulo HKL es equilátero inscrito en el ABC.
2. $[ABC]/[HKL] = 4\frac{\sqrt{3}+1}{3}$
3. $[KBL] = [HAK]/2$
4. $[ABC]/[HLC] = 4$

Juan Bosco Romero Márquez, Comunicación personal (2004).

204. **El Poblema de Apolonio.** Trazar el círculo tangente a tres círculos dados.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2004)

205. Construid un triángulo dado un lado ($a = 7$ cm), otro lado ($b = 5$ cm) y la altura del tercer lado ($h_c = 4$ cm).

Aguirre, A. y otros, Vertex 1. Dibujo técnico. Bachillerato. Editorial Casals (2002)65
Publicado con permiso de la editorial.

1-15 de diciembre de 2004

206. ABC es un triángulo isósceles en el que $A = 120°$. Si BC es trisecado en D y E, demostrar que ADE es un triángulo equilátero.

Aref, M.N. y Wernick, W., Problems & solutions in euclidean geometry,
Dover publications, Inc. New York. (1968)18

207. Es bien conocido que las bisectrices de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos que son proporcionales a los correspondientes lados adjuntos. Generalizando, consideremos el caso en que los dos segmentos sean proporcionales a los cuadrados de los lados adjuntos. Tal es el caso de la simediana, que es el simétrico de la mediana resepcto a la bisectriz correspondiente al mismo vértice. Demostrarlo, y una vez demostrado, utilizar tal resultado para obtener el punto de Lemoine, intersección de las tres simedianas.

Yevdokimov, O., Skills of generalization in learning geometry. Are the students ready to use them? (2004) Con permiso de su autor, OleksiyYevdokimov que es profesor de la Kharkov State Pedagogical University,

Ukraine.

16 de diciembre de 2004 - 15 de enero de 2005

208. Dado un triángulo, mostrar cómo se construyen tres puntos, uno en cada lado, de manera que formen los vértices de un triángulo equilátero.

Bryant, V.W. y Austin, A.K., Reading in Mathematical Education. Geometry (1083). Seleccionado por Marion Walter. Association of Teachers of Mathematics. Los profesores Bryant y Austin estaban en la Universidad de Scheffield. Traducción de Ricardo Barroso Campos.(Didáctica de las Matemáticas) Universidad de Sevilla.

209. Si en un triángulo ABC, la mediana AM es perpendicular al lado BC, dicho triángulo es isósceles.

Bruño, Geometría. Curso Superior, con el enunciado de 1286 ejercicios de aplicación (1960)172

16-31 de enero de 2005

210. Dado un triángulo ABC y un triángulo MNP, hallar el triángulo XYZ cuyos vértices se apoyen en los lados de ABC y cuyos lados pasen por los vértices de MNP.

Pedret, J.M. , Propuesta personal (2004).

211. Hallar el lado de un triángulo equilátero conociendo su área.

Terry y Rivas, A., Ejercicios de trigonometría, Pedro Abienzo, Impresor del Ministerio de Marina (1881).

1-14 de febrero de 2005

212. Sea el triángulo ABC rectángulo en A, tracemos los círculos inscrito y cincunscrito. Sean M y N los puntos de tangencia del primero con los lados AB y AC. Tracemos la tangente al circunscrito en el punto A. Esta tangente y la recta MN se cortan en un punto K. Hallar la distancia AK, siendo los catetos $AB = 4$m y $AC = 3$m.

A. M. De Ingenieros Aeronáuticos, Ejercicios Propuestos de la Gaceta Matemática 1^a Serie, Tomo 1 Madrid (7 de Abril)(1949) Instituto Jorge Juan de matemáticas y Real Sociedad Matemática Española. Consejo Superios De Investigaciones Científicas, Patronato Alfonso el Sabio, Madrid

213. Construir un triángulo rectángulo conocidos un cateto y la diferencia de la hipotenusa con el otro cateto..

González, O. , Comunicación personal (2005)

214. Dado un triángulo ABC, hallar el lugar geométrico del ortocentro cuando A recorre una recta no paralela al segmento BC.

Martel, J., Lugares geométricos relacionados con un triángulo cuyos vértices son puntos de una curva plana cualquiera (2001). En Socas, M., Camacho, M, Morales, A. (Eds). Formación del profesorado e investigación en educación matemática III. Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. (154)

215. Sea AD una ceviana cualquiera del triángulo ABC donde D está en el lado BC. Con centro en D, se construyen las dos circunferencias de radios respectivos, DB, y DC, que denotamos por C_1 y C_2, respectivamente. Sean E y F, los puntos donde las circunferencias C_1 y C_2 intersecan con la circuninscrita C, respectivamente. Probar que :

1. Los puntos E, F y D están alineados.
2. Hallar el lugar geométrico descrito por los puntos E y F, respectivamente, cuando D, varía a lo largo del lado BC.

Juan Bosco Romero Márquez, Comunicación personal (2005).

216. Dados dos triángulos homológicos, los puntos de intersección de los lados no homólogos están sobre una misma cónica.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2005).

15-28 de febrero de 2005

217. Si ABC es rectángulo y G su baricentro calcular la relación PG/GC.

Rodríguez, W., Comunicación personal (2005).

218. Sea ABC un triángulo. Por el pie A' de la altura por A, se trazan las perpendiculares a los lados AB y CA que cortan a las perpendiculares a BC desde ByC en P y Q. Demostrar que los puntos P y Q están alineados con el ortocentro H del triángulo ABC.

Sidler, J.C., Geometrie projective, 2ª Edition, Dunod, Paris (2000)

219. En un triángulo ABC se verifica que $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ y $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ y se sabe que ABC es equivalente a otro triángulo MNP tal que $p = 87$cm, $n = 72$cm, $M = 35°18'46''$. Calcula el lado c del triángulo ABC.

Ejercicios Resueltos, Gaceta Matemática 1ª Serie, Tomo 1. 7 de Abril (1949), Madrid, Instituto ,Jorge Juan, de matemáticas y Real Sociedad Matemática Española. Consejo Superior De Investigaciones Científicas, Patronato ,Alfonso el Sabio,.

1-15 de marzo de 2005

220. Una recta d corta los lados AB, BC, CA de un triángulo ABC en C', A', B' respectivamente. Sean L la intersección de AA' con BB', M la intersección de BB' con CC' y N la intersección de CC' con AA'. Demostrar que las rectas AM, BN y CL son concurrentes.

Sidler, J.C., Geometrie projective 2ª Edition, Dunod, Paris, (2000), Exercise 2.7

221. El área de un triángulo es 1,25dm cuadrados. La semisuma de un lado y su altura respectiva es 2,75 dm. Hallar el valor de dicha altura.

Matematica Elemental, Revista publicada por el instituto Jorge Juan de matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española 4ª Serie, Tomo VII nº1 (1947)

222. En la hipotenusa de un triángulo rectángulo, como sobre un lado, se ha construido un cuadrado (fuera del triángulo). El centro del cuadrado está unido con el vértice del ángulo recto del triángulo. ¿En qué segmentos se divide la hipotenusa si los catetos son iguales a 21 y 28 cm?

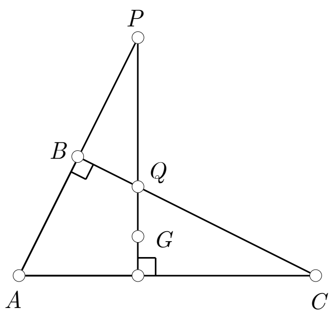
Gúsiev, V. y otros, Prácticas para resolver Problemas matemáticos, Geometría, Ed. Mir Problema 185 (1989)47

223. Consideremos un triángulo ABC cualquiera. Sean D y E puntos sobre el lado BC, F y G puntos sobre el lado CA y H y I puntos sobre el lado AB, tal que $BD : DE : EC = CF : FG : GA = AH : HI : IB = p : q : r$ con $p + q + r = 1$, $p, q, r > 0$. Sean K, L y M los puntos de intersección de las diagonales DG y EH, FI y DG, y EH y FI. Probar que :

1. El área de los cuadriláteros $DEFG$, $FGHI$, y $HIDE$ es igual a q veces el área de ABC.
2. Las áreas de los triángulos GHK, IDL y EFM son iguales a k-se hallará-veces el área de ABC.
3. Las áreas de los triángulos DEK, FGL y HIM son iguales a h veces-se hallará- el área de ABC.
4. El área del triángulo KLM es igual a 1-se hallará-, veces al área de ABC.

Gerdes, P., Dividing the sides of a triangle in proportional parts.
Visual Mathematics, Volume 5, No. 2, (2003)

224. En la siguiente gráfica se cumple que: $PQ : QG = 3 : 1$, y ABC es rectángulo y G es su baricentro, calcular el ángulo $\angle ACB$.



Rodríguez, W. , Comunicación personal (2005).

16-31 de marzo de 2005

225. Dado un triángulo ABC, diseñar un procedimiento con regla y compás para construir una terna de puntos que cumplan con las siguientes características:

(a) La terna de puntos debe estar alineada.

(b) La recta que pase por ellos debe ser perpendicular a la recta de Euler del triángulo original.

Benítez, D., Comunicación personal (2005)

226. Calcular el área de un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia de radio 30dm y base 10dm.

Ejercicios elementales propuestos: Matematica Elemental, 4ª Serie, Tomo VIII nº1 (1948), Revista publicada por el instituto Jorge Juan de matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española.

227. Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y la bisectriz del ángulo recto.

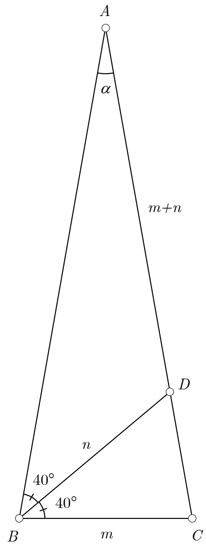
Sapiña, J., Problemas Gráficos de Geometría, Litograf, Madrid (1955).

228. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Sea $a > b \geq c$. Hallar x real tal que si tomamos $a + x$, $b + x$, $c + x$, prolongando una longitud x a a desde B, y obteniendo C', prolongando una longitud x a b desde C y obteniendo A', y prolongando una longitud x a c desde A y obteniendo B', el triángulo $A'B'C'$ es rectángulo en B'.

Juan Bosco Romero Márquez, Comunicación personal (2005).

1-15 de abril de 2005

229. Se tiene un triángulo ABC y se sabe que $BC = m$, la bisectriz $BD = n$, $DA = m + n$, $\angle ABD = \angle DBC = 40°$. Calcular $\angle BAC$.



*Del sitio turco **KULUBU** : http://www.matematik.kulubu.com/ (2005)*

230. Calcular la hipotenusa y cateto de un triángulo rectángulo de perímetro 60 cms y tal que la altura del ángulo recto mide 12 cms.

Matematica Elemental, Ejercicios Elementales Resueltos (1947)
Revista publicada por el instituto Jorge Juan de matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española

Propuesto por Maite Peña Alcaraz, estudiante de Industriales en la Universidad de Comillas (Madrid)

231. Construir un triángulo conociendo los pies de las tres alturas.

Sapiña, J., Problemas Gráficos de Geometría, Litograf. Madrid (1955)
Propuesto por José María Pedret, ingeniero naval (Esplugues de Llobregat, Barcelona)

232. Sea ABC un triángulo isósceles siendo $AB = AC$. Hallar x real tal que si tomamos $a + x$, $b + x$, $c + x$, prolongando una longitud x a a desde B, y obteniendo C', prolongando una longitud x a b desde C y obteniendo A', y prolongando una longitud x a c desde A y obteniendo B', el triángulo $A'B'C'$ sea isósceles, siendo $B'C' = B'A'$.

Romero, J.B., Comunicación personal (2005).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

16-30 de abril de 2005

233. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio del lado BC. Sea X el punto en que la recta HM interseca el arco BC (que no contiene a A) de la circunferencia circunscrita a ABC. Sea Y el punto de intersección de la recta BH con la circunferencia distinto de B. Demostrar que $XY = BC$.

Eureka 2, Sociedade Brasileira de Matemática (1998)229, http://www.obm.org.br/eureka/eureka2.pdf
Publicado con permiso de la Olimpiada Brasileira de Matematica

234. Demostrar que si las longitudes de los lados de un triángulo forman una progresión aritmética, el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo y el baricentro de éste están situados en una recta paralela al lado de la longitud intermedia.

Gúsiev , V.y otros, Prácticas para resolver Problemas matemáticos. Geometría, Ed. Mir (1989)31 (50)
Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES 1 de Xest (València)

235. La base de un triángulo isósceles ABC es el segmento que une los puntos $B(3,-1)$, $C(-2,3)$ y el vértice A está sobre el eje coordenado yy'. Calcular las ecuaciones de los tres lados del triángulo.

Matematica Elemental. Ejercicios Elementale Propuestos,
Revista publicada por el instituto Jorge Juan de matemáticas y

la Real Sociedad Matemática Española 4^a Serie, Tomo VIII n^{o}7 y 8 (1948)

Propuesto por Maite Peña Alcaraz, estudiante de Industriales en la Universidad de Comillas (Madrid)

236. Construir un triángulo rectángulo conociendo los pies de las tres bisectrices.

Sapiña, J., Problemas Gráficos de Geometría,Litograf. Madrid (1955)
Propuesto por José María Pedret, ingeniero naval (Esplugues de Llobregat, Barcelona)

237. Sea el triángulo ABC, por su incentro I se traza una perpendicular a AC que corta en M y N a BC y la prolongación de AB respectivamente. Si además se cumple que:

$$\frac{1}{IM^2}+\frac{1}{IN^2}=\frac{1}{r^2}$$

donde r =inradio de ABC, probar que $\angle B = 90°$.

Salazar, J.C., Comunicación personal (2005)
Propuesto por J.C. Salazar, profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, (Puerto Ordaz)

1-15 de mayo de 2005

238. Sean M y N los puntos medios tomados sobre dos lados cualesquiera del triángulo, ABC. Sea X un punto variable elegido en el otro lado. Se pide:

(a) Demostrar que el triángulo XMN tiene un área que no depende del punto X, y, que es, 1/4 del área del triángulo ABC.

(b) Lugar geométrico descrito por los baricentros y los circuncentros, respectivamente, cuando X se mueve sobre el lado en que está situado.

Romero J.B., Comunicación personal (2005)

239. En el triángulo ABC con incirculo (I,r) y circuncirculo (O,R). Un circulo tangente externamente opuesto al vertice A, es tangente al circuncirculo y AB, AC en A_1, D, E, de manera similar para el vértice B tenemos puntos de tangencia B_1, F, G con el circuncirculo y AB, BC, para el vértice C tenemos puntos de tangencia C_1, M, N con el circuncirculo y AC, BC. Ademas las rectas DE, FG, MN conforman el triángulo XYZ. Probar que:

1. I es el circuncentro de XYZ.

2. $[XYZ]/[ABC] = 8R/r$, donde: $[XYZ] = \text{area}(XYZ)$

Salazar, J.C., Comunicación personal (2005)

240. Los tres lados de un triángulo están expresados en metros por tres números consecutivos. Determinar el radio del círculo inscrito y el área del triángulo, sabiendo que el ángulo mayor es el doble del menor.

Matematica Elemental. Ejercicios Elementale Propuestos por Ayudantes de Telecomunicaciones., Revista publicada por el instituto Jorge Juan de matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española 4ª Serie, Tomo VII nº2 y 8 (1947)

241. Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa a y la bisectriz del ángulo B.

Sapiña, J., Problemas Gráficos de Geometría, Litograf. Madrid (1955)

16-31 de mayo de 2005

242. Sea ABC un triángulo, y AA', BB' y CC' tres cevianas arbitrarias que concurren en el punto interior del triángulo P', donde éste no puede ser el centro de gravedad del triángulo dado. A', B' y C', son sus pies sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sean los puntos A'', B'' y C'' sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente, tales que $CA' = A''B$, $AB' = B''C$ y $AC' = C''B$. Probar que:

(a) Las cevianas AA'', BB'' y CC'', concurren en un punto P''.

(b) Si definimos los puntos A^* como intersección de las rectas $C'B''$ y $C''B'$, B^* como intersección de las rectas $A'C''$ y $A''C'$ y, C^* como la intersección de las rectas $B'A''$ y $B''A'$, probar que los puntos A^*, B^*, C^* están alineados y que la recta $A^*B^*C^*$ pasa por los puntos P' y P''.

(c) Calculad el cociente de las razones dobles de los cuatro pares de puntos siguientes:

$$\frac{(A^*, B^*, C^*, P')}{(A^*, B^*, B^*, P'')}$$

(d) ¿Qué sucede si $P' = G$, centro de gravedad del triángulo?

Romero, J.B (2005), Comunicación personal.
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

243. Construir un triángulo conociendo los puntos simétricos del ortocentro respecto a sus tres lados.

Sapiña, J., Problemas Gráficos de Geometría,Litograf, Madrid (1955)
Propuesto por José María Pedret, ingeniero naval (Esplugues de Llobregat, Barcelona)

244. Se piden la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo conocidas la suma k de los catetos y la altura r correspondiente a la hipotenusa. Discusión completa del problema y aplicación de las fórmulas obtenidas para el caso $k = 3$ y $r = 1$.

Matematica Elemental, Revista publicada por el instituto Jorge Juan de matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española 4ª Serie, Tomo VIII, nº5 (1948), Ejercicios Propuestos por Escuela Especial de Ingenieros de Montes
Propuesto por Maite Peña Alcaraz, estudiante de Industriales en la Universidad de Comillas (Madrid).

245. Sea P un punto interior del triángulo ABC, siendo $A_1B_1C_1$ su triángulo ceviano. Si trazamos un círculo tangente a BC por A_1 y al circuncirculo (O) de ABC, determinamos el punto de tangencia A_2 situado en el arco que no contiene a A. De manera similar definimos los puntos B_2, C_2.

(a) Probar que AA_2, BB_2, CC_2 son concurrentes.

(b) Probar que, si P es el punto de Gergonne, A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 son concurrentes.

Cuestión (a): Salazar, J.C., Propuesta personal (2005)
Cuestión (b): Taller de Olimpiadas de Vietnam (2005)

1-15 de junio de 2005

246. Sea ABC un triángulo equilatero y Q su circunferencia inscrita. Sean D y E puntos de los lados AB y AC, respectivamente, tales que DE es tangente a Q por el arco más cercano a A. La intersección de BE y CD es U; se prolonga AU hasta cortar a BC en R. Demostrar que U es punto medio de AR.

Ramos L., Comunicación personal (2005).
Propuesto por Luis Ramos Castilla, Lima, Perú

247. Demostrar que si H es el ortocentro del triángulo ABC y AK es un diámetro de la circunferencia circunscrita, entonces $HCKB$ es un paralelogramo.

Conant, L. L., Original exercises in plane and solid geometry, American book company, NY, (1905)41
Propuesto por Francisco Javier García Capitán , profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

248. Sean M y N los puntos medios tomados sobre dos lados cualesquiera del triángulo, ABC. Sea X un punto variable elegido en el otro lado. Se pide el lugar geométrico descrito por los ortocentros cuando X se mueve sobre la recta que contiene al lado en el que se encuentra.

Romero J.B., Comunicación personal (2005).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

249. Circunscribir un triángulo a un círculo de manera que los tres vértices estén sobre tres rectas que pasan por el centro del círculo.

Sapiña, J., Problemas Gráficos de Geometría,Litograf, Madrid (1955).
Propuesto por José María Pedret, ingeniero naval, Esplugues de Llobregat, Barcelona.

250. En un triángulo ABC se toman los puntos M, N y P de contacto de los círculos exinscritos en los ángulos A, B y C con los lados BC, CA y AB respectivamente. Se une N con M y con P, cortando la recta NM a AB en D, y la NP a BC en E y se designa por I el punto de encuentro de BN y CP. Siendo a el punto común de IE y AB, y b el de intersección de ID con BC, demostrar que las rectas AN, PM, DE y ab concurren en un mismo punto.

Espeso, G., Matematica Elemental, Revista publicada por
el instituto Jorge Juan de matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española (1947)

Propuesto por Maite Peña Alcaraz, estudiante de Industriales en la Universidad de Comillas, Madrid

16-30 de junio de 2005

251. Sea ABC un triángulo. Probar que:

(a) Si la bisectriz interior del ángulo A corta a la base en D, entonces $AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC$. Enunciar el recíproco y demostrarlo. ¿ Qué ocurre si D es un punto de la base BC de un triángulo isósceles ?

(b) Si la bisectriz exterior del ángulo A de un triangulo ABC corta a BC en D', entonces $AB \cdot AC = BD' \cdot CD' - AD'^2$. Hacer las mismas consideraciones de problemas propuestos en (a).

(c) Si K es el punto en donde la bisectriz interior del ángulo A corta al círculo circunscrito al triángulo ABC, probar que:

(i) $AK \cdot DK = BK^2$.
(ii) $AB \cdot AC = AK^2 - BK^2$.

(d) ABC es un triángulo rectángulo en A intersectando la bisectriz en A a su círculo circuniscrito en K. Probar que $2AK^2 = (AB + AC)^2$.

Anjaneyulu,M.S.R., Elements of Modern Pure Geometry, Publishing House, Asia (1964).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

252. Si ABC es un triángulo equilátero, hallar el lugar geométrico de un punto D tal que $DA = DB + DC$.

Conant L.L., Original exercises in plane and solid geometry, American book company, NY, (1905)35
Propuesto por Francisco Javier García Capitán , profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

253. Los excírculos (I_a), (I_b), (I_c) determinan con el círculo de los nueve puntos (O_9) del triángulo ABC los puntos de tangencia X, Y, Z respectivamente. Además (D, E), (K, J), (M, L) son los puntos de tangencia sobre (AB, AC), (BA, BC), (CB, CA) con los excírculos (I_a), (I_b), (I_c) respectivamente. Probar que:

(a) AX, BY, CZ son concurrentes en P.

(b) La perspectriz de los triángulos ABC y XYZ es la recta de Monge de los tres excirculos. (ver en http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200304.pdf (nota del editor))

(c) P es colineal con los centros del incírculo (I) y (O_9). Además se cumple: $IP/IO_9 = r/r_9$.

(d) $XE \cdot YK \cdot ZM = XD \cdot YJ \cdot ZL$.

Salazar, J. C., Comunicación personal (2005).
Propuesto por J.C. Salazar, profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela.(Puerto Ordaz)

254. Construir un triángulo dados un lado a, el radio R de la circunferencia circunscrita y la distancia e entre el punto de intersección de sus alturas y el centro de dicha circunferencia.

Matematica Elemental. Ejercicios Elementale Propuestos, Revista publicada por el instituto Jorge Juan de matemáticas yla Real Sociedad Matemática Española 4^a Serie, Tomo VIII $n^o 5$, (1948)

Propuesto por Maite Peña Alcaraz, estudiante de Industriales en la Universidad de Comillas (Madrid).

255. Construir un triángulo conociendo, en posición, sus tres bisectrices y un punto sobre el perímetro del triángulo.

Sapiña, J., Problemas Gráficos de Geometría,Litograf. Madrid (1955).
Propuesto por José María Pedret, ingeniero naval, Esplugues de Llobregat, Barcelona

Edición veraniega del 1 de julio de 2005 al 31 de agosto de 2005

256. Por un punto dado P, trazar una recta que forme con otras dos rectas dadas, un triángulo de área dada[21].

Sea A el punto de intersección de las rectas dadas; se representa el área dada bajo la forma de un triángulo, del que un lado es AP y el otro está sobre una de las rectas dadas. La recta buscada debe ser tal que el elemento de área que se añade al triángulo sea igual al que determina la sección en el triángulo. Pero esas dos áreas son triángulos cuyas alturas son conocidas. La razón de las bases de esos triángulos es pues conocida también y en consecuencia, el problema se transforma en el enunciado auxiliar que sigue:

Se dan dos rectas, sobre cada una de ellas un punto, A y B, y un punto exterior P. Trazar por P una recta que encuentra a las rectas dadas en X e Y de tal manera que los segmentos AX y BY estén en una razón dada[22].

Julius Petersen, Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques, Gauthier-Villars, Paris (1880), Problèma 366 y 363

Juan Sapiña Borja, Problemas gráficos de Geometría, Litograf. Madrid (1955), Problèma 637.

Propuesto por José María Pedret, ingeniero naval (Esplugues de Llobregat, Barcelona)

257. Sea ABC un triángulo. Interiormente a él, es decir sobre los lados adyacentes a ese vértice, se construyen los triángulos $T(A) = AB'C'$, $T(B) = BA'''C'''$, y $T(C) = CA''B''$, semejantes al triángulo dado con B' y B'' sobre AC, C' y C''' sobre AB, y A'' y A''' sobre BC, sin ser puntos medios de los lados del original ninguno de los construidos.
Construimos los siguientes puntos definidos por las intersecciones de los pares de rectas que se indican:

- $X(A) = B'C''' \cap B''C'$;
- $Y(A) = A''C''' \cap A'''B''$;
- $X(B) = A''C''' \cap C'A'''$;
- $Y(B) = A''B' \cap B''C'$;
- $X(C) = B''A''' \cap A''B'$,
- $Y(C) = B'C''' \cap C'A'''$.

Probar que :

(a) Las rectas $X(A)Y(A)$, $X(B)Y(B)$, $X(C)Y(C)$ son concurrentes.

A partir de ahora se considera que los triángulos $T(A)$, $T(B)$ y $T(C)$ tienen la misma razón de semejanza respecto a ABC.

(b) Las rectas $X(A)Y(A)$, $X(B)Y(B)$, $X(C)Y(C)$ son concurrentes en el baricentro de ABC;

(c) Probar que los triángulos $X(A)X(B)X(C)$, $Y(A)Y(B)Y(C)$ y ABC son semejantes, y encontrar su centro y razón de homotecia.

[21] Este problema fue propuesto y resuelto por Apolonio en su obra *De Sectione Spatii*. La obra se perdió, pero Halley la restableció a partir de una traducción árabe.

[22] El 4-7-2005 se añade esta indicación, que Petersen incluye en el problema: Se determina el centro de rotación O de las rectas dadas, considerando A y B, al igual que X e Y, como puntos homólogos. La razón dada es la razón de semejanza. Como entonces OXY es semejante a OAB la recta OP será vista desde X bajo un ángulo conocido en consecuencia X se determina fácilmente

(d) Calcular la razón de las áreas de los hexágonos (o exágonos)

$$A''A'''C'''C'B'B''A'' \quad \text{y} \quad X(A)Y(B)X(C)Y(A)X(B)Y(C)$$

Romero, J.B., Comunicación personal (2005).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

258. Demostrar que si el ángulo A de un triángulo ABC vale 60°, la recta que une el ortocentro con el centro del cículo circunscrito forma con los lados AB y AC, un triángulo equilátero.

Matemática Elemental, Tomo II, N.3, (1933)49
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

259. Sobre los lados de un triángulo ABC se dan pares de puntos $A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, tales que

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_2C}{A_2B} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{B_2A}{B_2C} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C_2B}{C_2A} = m$$

Hallar la razón de áreas entre el triángulo dado y el que tiene por vértices los puntos $A' = BB_1 \cap CC_2$, $B' = CC_1 \cap AA_2$, $C' = AA_1 \cap BB_2$.

Matemática Elemental, N.2, (1941)69-70
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

260. Caracterizar y construir los triángulos rectángulos de catetos c y b con $c < b$, y a, de hipotenusa tales que:

(a) la mediana m_c es la medía geometrica de a y c;

(b) la bisectriz v_c, es la media geométrica de a y c.

Romero, J.B., Comunicación personal (2005).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

261. Dado el triángulo ABC, Supongamos D, E, y F son puntos sobre los lados BC, AC, y AB, respectivamente, y tales que AD, BE, y CF concurren en un punto. Construimos las reflexiones del rayo AD con respecto a la bisectriz de $\angle BAC$ que corta a BC en D'. Similarmente definimos E' y F'. Demostrar que AD', BE', y CF' son concurrentes.

Baragar, A., A survey of Classical and Modern Geometries with computer activities, Prentice Hall, New Jersey (2002).

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

262. Hallar todos los triángulos ABC con lados a,b y c que tiene la propiedad que la mediana desde A, la bisectriz en B, y la altura desde C, son concurrentes.

Guy, My Favorite Elliptic Curve : A Tale of Two Types of Triangles. The American Mathematical Monthly, Vol. 102, No. 9 (1995)771-781

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

263. Dos aviones salen de un lugar A al mismo tiempo dirigiéndose en línea recta y con velocidades uniformes, el primero al lugar B y el segundo al C. El ángulo que forma la dirección N con la ruta del que va a B es $23°42'27''$ contados a partir de N y en el sentido de las agujas de un reloj. El mismo ángulo referido a la ruta del que va a C es $318°27'45''$. La distancia entre B y C es 310,425Km y la relación de las velocidades es 27/11. Calcular los caminos recorridos y las velocidades si ambos tardan en llegar a su destino 1h y 5 minutos.

Matematica Elemental. Ejercicios Elementale Propuestos, Revista publicada por el instituto Jorge Juan de matemáticas yla Real Sociedad Matemática Española 4ª Serie, Tomo VIII nº 7 y 8, (1947)

Propuesto por Maite Peña Alcaraz, estudiante de Industriales en la Universidad de Comillas (Madrid).

264. Supongamos que los puntos P y Q se encuentran sobre la circunferencia K descrita alrededor del triángulo ABC. Demostrar que el punto de intersección de las rectas correspondientes de Simpson p y q describe una circunferencia K' cuando A, B, P, Q están inmóviles y C recorre K.

Lyúbich, Y.I., Shor, L.A., Método cinemática en problemas geométricos.
Lecciones populares de matemáticas, Editorial Mir. Moscú.

original ruso (1976), edición en español (1978), traducción de Lozhkin, G.A. (pág 51).

265. Sea ABC un triángulo equilátero de centro O y lado 3. Sea M un punto del lado AC tal que $CM = 1$ y sea P un punto del lado AB tal que $AP = 1$. Calcula las medidas de los ángulos del triángulo MOP.

X Olimpíada Matemática Rioplatense San Isidro, 12 de Diciembre de 2001, Nivel A, Primer Día.
http://www.oma.org.ar/enunciados/omr10.doc

266. Dado un triángulo ABC, encontrar un punto M en el interior de ABC tal que los triángulos ABM, BCM y CAM tengan igual área.

Yaglom I.S., Geometric Transformations III, The Mathematical Association of America (MAA)
New Matematical Library (1962)5, Traducido del ruso por Allen Shields

267. Desde cada vértice de un triángulo ABC se trazan dos segmentos que se unen con puntos del lado opuesto de manera que lo dividen en tres segmentos de igual longitud. Estas seis líneas determinan un hexágono. Demostrar que las tres diagonales que unen los vértices opuestos de ese hexágono tienen un punto en común.

Yaglom I.S., Geometric Transformations III, The Mathematical Association of America (MAA)
New Matematical Library (1962)5, Traducido del ruso por Allen Shields

268. Dado un triángulo ABC se traza la circunferencia circunscrita K. Se traza la bisectriz de A que corta a K en D. Tracemos las perpendiculares desde D, DE a AB y DF a AC. Demostrar que:

1. E y F están en distinta posición respecto a K.
2. Si ambos están sobre la K, ¿cómo es ABC?
3. Los segmentos EB y CF miden igual.

Barroso, R., Comunicación personal.
Videoconferencia con Iberocabri, Saltillo, Cohauila, Méjico 4 de junio 2004

0.6 Curso 2005

1-15 de Setiembre de 2005

269. ¿Podrías construir un triángulo con sus dos bisectrices perpendiculares?

Vila, A., Callejo, M,L., Matemáticas para aprender a pensar Nacea (2004)136
Con permiso de los autores, a quines el director agradece la gentileza.

270. Un triángulo ABC, verifica entre uno de sus lados, a, la mediana correspondiente a ese lado m_a, y el radio del círculo circunscrito R, la relación: $a^2 = 4Rm_a$. Probar si es cierto o no que aparte de los triángulos rectángulos en A, hay, al menos otro.

Romero, J.B., Comunicación personal (2005)
Dedicado a Murray S. Klamkin

16-30 de setiembre de 2005

271. Distancias en el triángulo. Dibuje un triángulo equilátero de 10 cm de lado y señale cinco puntos en su interior. ¿Sabría razonar que en cualquier caso habrá siempre dos puntos que están com máximo a 5 cm de distancia?

Deulofeu, J., Una recreación matemática : historias, juegos y problemas, Planeta Prácticos, Barcelona (2001)76

Con permiso del autor, a quien el director agradece la gentileza.

272. Una línea recta que pasa por el incentro de un triángulo ABC corta a los lados AB y AC en los puntos D y E respectivamente. Sea P el punto de intersección de BE y CD. Si X, Y y Z son los respectivos pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, demuestre que:

$$\frac{1}{PX} = \frac{1}{PY} + \frac{1}{PZ}$$

Oposiciones Secundaria, Baleares (2005).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

273. P, Q, R denotan puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, de un triángulo dado ABC. Determinar todos los ABC tales que si

$$\frac{BP}{BC} = \frac{CQ}{CA} = \frac{AR}{AB} = k \qquad (k \neq 0, \frac{1}{2})$$

entonces PQR (en este orden) es semejante a ABC.

Klamkin S., Eureka, Vol 3, N.1, Jan (1977), Prob. 210, (Revista predecesora de Crux Mathematicorum)
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

1-15 de Octubre de 2005

274. Sea X un punto arbitrario del triángulo ABC. Construimos los puntos C', B', A', como los centros de gravedad de los triángulos ABX, AXC y BXC. Sea X^* el punto de intersección de las rectas AA', BB', y CC'. Se pide:

(a) El triángulo $A'B'C'$ es homotético al triángulo ABC. Calcular el centro y la razón de la homotecia.

(b) Si G y G' son los centros de gravedad de los triángulos ABC, y $A'B'C'$, respectivamente, probar que los puntos G, G', X y X^* son colineales, y, calcular su razón doble.

Romero, J.B., Comunicación personal (2005)

275. En un triángulo ABC, M es el punto medio del lado AC y N es elpunto del lado BC tal que $CN = 2 \cdot BN$. Si P es el punto de intersección de las rectas AB y MN, demuestra que la recta AN corta al segmento PC en su punto medio.

X Olimpíada Matemática Rioplatense, San Isidro, 12 de Diciembre de 2001, Nivel I, Primer Día

16-31 de Octubre de 2005

276.

(a) O es un punto sobre la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Demostrar que si las perpendiculares desde O a los lados AB, AC y BC cortan a la circunferencia en los puntos c, b y a, el triángulo abc es igual en todos los aspectos al ABC. [Nota del director: tienen los mismos lados y ángulos, aunque el orden es diferente]

(b) Estudiar a qué transformaciones se somete ABC para transformarse en el abc de manera que se solapen exactamente [añadido por el director].

Aref, M.N., Wernick,W., Problems & Solutions in Euclidean Geometry,
Dover Publications, Inc, NY (1968)97

277.

(i) Sea A^* un punto interior de BC en el triángulo ABC. Las bisectrices interiores de los ángulos BA^*A y CA^*A intersecan a AB y a AC en D y E respectivamente. Demostrar que AA^*, BE y CD son concurrentes.

(ii) Lugar geométrico del punto de concurrencia si ABC es equilátero.

(iii) Lugar geométrico de los baricentros, circuncentros, ortocentros e incentros de los triángulos A^*ED, rectángulos en A^* cuando A^* varia sobre BC.

Apartado (i) es publicado en su versión original en Crux Mathematicorum, problema 2840, y en http://www.math.fau.edu/yiu/RecreationalMathematics.pdf (pág 300-925), de Paul Yiu, Verano de 2003

Apartado (ii) por Loeffler; apartado (iii) por Romero, J.B.

Propuesto por Romero, J.B., Comunicación personal. (2005)

1-15 de noviembre de 2005

278. Dado el triángulo ABC, construyamos su circunferencia circunscrita. Tracemos la recta tangente AT a la circunferencia por el punto A. Demostrar que $\angle ABC = \angle CAT$ y $\angle ABC + \angle CAT = 180°$.

Harel, G. y Sowder, L., Students' proof schemes: results from exploratory studies. En Schoenfeld,et all edrs. Research in Collegiate Mathematics Education. III,

American Mathematical Society y Mathematical Association of America. (1998)260

279. Sea ABC un triángulo y P un punto arbitrario en su plano donde se cortan las cevianas AA', BB'y CC', donde A' está en BC, B' en CA y C' en AB. Consideremos en los triángulos $AC'B'$, $BA'C'$ y CBA', definimos los siguientes pares de puntos : B_1, C_1; A_2, C_2; A_3, B_3; tales que B_1, A_2 están en AB, C_2, B_3 están en BC, A_3, C_1 están en CA, y verificando que $B'B_1 \parallel CC'$, $C'C_1 \parallel BB'$, $A'A_2 \parallel CC'$, $C'C_2 \parallel AA'$, $A'A_3 \parallel BB'$, y $B'B_3 \parallel AA'$. Definimos los puntos P_1 intersección de las rectas $B'B_1$ y $C'C_1$, P_2 intersección de las rectas $A'A_2$ y $C'C_2$, P_3 intersección de las rectas $A'A_3$ y $B'B_3$ y, por último, definimos el punto P^* como intersección de las tres rectas $A'P_1$, $B'P_2$ y $C'P_3$, que le podemos llamar como el punto conjugado de P respecto al triángulo ABC. Demostrar que :

(a) El triángulo $P_1P_2P_3$ es semejante al triángulo $A'B'C'$, indicando las características de la transformación geométrica que lo produce.

(b) Probar que el punto P^* es el baricentro de cada uno de los pares de puntos P_1, A'; P_2, B'; P_3, C', respectivamente.

(c) ¿ Qué pasaría con el enunciado anterior y sus conclusiones (a), (b), si P fuera un punto notable del triángulo, baricentro G, circuncentro O, incentro I, u ortocentro H.

(d) Hallar todos los puntos del plano del triángulo ABC, tales que $P = P^*$.

(e) Hallar en cada uno de los casos el lugar geométrico de los puntos del plano del triángulo tales que:

  (e1) El triángulo $A'B'C'$ sea semejante al triángulo ABC,

  (e2) Los triángulos $AC'B'$, $BA'C'$, y $CB'A'$ sean semejantes al triangulo ABC,

  (e3) Los tres triángulos anteriores junto con $A'B'C'$ sean semejantes al triángulo ABC.

Romero, J. B., Comunicación personal (2005).

16-30 de noviembre de 2005

280. Teorema de Seydewitz. Si un triángulo se inscribe en una circunferencia, cualquier recta conjugada con respecto a uno de sus lados corta a los otros dos en puntos conjugados. (El teorema se refiere a una cónica general).

Coxeter, H.S.M., Fundamentos de Geometría, Limusa-Wiley, SA, México (1971)290
Propuesto por José Carlos Chavez Sandoval, estudiante peruano de Matemática Pura

en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos

281. Las hipotenusas de dos triángulos rectángulos semejantes están sobre dos rectas m y m' que forman un ángulo de 30° y se cortan en un punto P. Los vértices B y C del primero distan de P, $PB = 1$, $PC = 6$, y los vértices B' y C' del segundo, homólogos de B y C en la semejanza, $PB' = 2$, $PC' = 4,5$. Los catetos del primer triángulo miden $b = 4$, $c = 3$. Sabiendo que la semejanza entre los dos triángulos es directa, halla:

(a) el centro o punto doble de la semejanza directa.

(b) dibujado el primer triángulo ABC, halla A', homólogo del vértice A del ángulo recto del primero, utilizando para ello el giro y la homotecia de cuyo producto resulta la semejanza.

Martínez, J. Bujanda, M.P., Velloso, J.M., Matemáticas 1, Escuelas Universitarias de Magisterio de E.G.B., Ediciones S.M. Madrid (1984)382

1-15 de diciembre de 2005

282. Si un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia, la suma de los cuadrados de los segementos que unen cualquier punto de la circunferencia a los tres vértices del triángulo es constante.

Brockway, G. E., American Mathematical Monthly, (Volumen II, May) (1895)158
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

283. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 30 cm, y la altura relativa a la hipotenusa mide 24 cm. Calcular:

1. La proyección del cateto sobre la hipotenusa
2. La proyección del otro cateto sobre la hipotenusa
3. El otro cateto
4. El área del triángulo

Lazcano, I. Barolo, P., Matemáticas 7º EGB. Edelvives, Zaragoza (1991)165

284. Construir un triángulo conociendo A, a, w'_a (w'_a es la bisectriz exterior de A).

Sapiña, J., Problemas Gráficos de Geometría, Litograf. Madrid, (Aparejador, Perito Industrial, Profesor) (1955)65

16 de diciembre de 2005 - 15 de enero de 2006

285. Sea la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo en el vértice A. Consideremos una ceviana arbitraria AA', donde A' es su pie sobre el lado BC, y sea A^*, el punto donde corta la circunferencia circunscrita. Por los vértices B y C, trazamos los segmentos BB^* y CC^* paralelos a AA', y donde B^* y C^* son los puntos donde estos segmentos corta al circunferencia circunscrita cuyo centro es O. Probar que :

(a) El triángulo $A^*B^*C^*$ es congruente o isométrico al triángulo ABC.

(b) Si G y G^* son los baricentros de los triángulos ABC y $A^*B^*C^*$, entonces el segmento GG^* es paralelo a AA^* y es 1/3 de AA^*.¿ Qué ocurre con los incentros de esos triángulos con relación a AA'?

(c) Al variar la ceviana AA' sobre el lado BC se construyen infinitos triángulos congruentes a ABC. Se pide :

(c1) Lugar geométrico descrito por todos los baricentros de esos triángulos.

(c2) Lugar geométrico descrito por todos los incentros de esos triángulos.

(d) ¿Qué se podría decir si hacemos la construcción anterior para los catetos del triángulo rectángulo anterior?

(e) ¿Qué se podría decir de todo lo anterior para un triángulo cualquiera, obtusángulo o acutángulo?

Romero J.B., Comunicación personal (2005)

286. Dados tres círculos de centros O, O', O'', construir un triángulo semejante al triángulo $OO'O''$ cuyos vértices estén, respectivamente, sobre los tres círculos dados.

Iliovici, G. y Robert, P., Géométrie. Léon Eyrolles, Éditeur, Paris (1937), problema 72
Propuesto por José María Pedret Ingeniero Naval, Esplugas de Llobregat

287. ABC es un triángulo equilátero. I, J y P son los puntos medios de sus lados. Se parte CB en cuatro partes iguales según los puntos E (medio de CP), P y F (medio de PB). Sea H la proyección ortogonal de I sobre EJ y K la proyección ortogonal de F sobre EJ. Sea R el simétrico de H en relación al punto I, S el simétrico de K en relación al punto J, U el simétrico de E en relación a I y T el simétrico de F en relación a J. Las rectas RU y TS se cortan en V.

(a) U, A, T, ¿están alineados?

(b) $RVSH$, ¿es un cuadrado?

Clapponi, P., Découpage dans un triangle, Petit X 34, (1997)54
Clapponi es un seudónimo de Philippe Clarou - Bernard Capponi.

288. Halla el perímetro de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide 30 cm, y un cateto mide 18 cm.

Lazcano, I. Barolo, P., Matemáticas 7º EGB, Edelvives, Zaragoza (1991)165

289. Construir un triángulo conociendo A, w'_b (bisectriz exterior del ángulo B) y r_a (radio de la circunferencia exinscrita).

Lopes, L., Comunicación personal (2005)
Propuesto por Luís Lopes

290. Dado un Triangulo ABC, se construyen los triángulos simétricos con respecto a cada un de los lados del triángulo ABC. Las rectas de Euler trazadas en cada uno de estos triángulo se intersectan en un punto P. Además, el punto P y los ortocentros de los triángulos simétricos pertenecen a la circunferencia circunscrita en el triángulo ABC.

Benitez, D, Leija, N.L.. Comunicación personal (2005).

16-31 de enero de 2006

291. Construir un triángulo dados dos lados y la mediana relativa a uno de ellos.

Ruiz, A., Nociones y ejercicios de aritmética y geometría, (1926)235

292. Mostrar que la condición necesaria y suficiente para que la altura AA', la mediana BB' y una de las bisectrices del ángulo C de un triángulo ABC sean concorrentes es que

$$\frac{\sin A}{\cos B} = \pm \tan C$$

Thébault, V., Mathematics Magazine, Vol. 23, No. 2, (1949)103
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

293. Trazamos dos circulos (O_1, r_1) y (O_2, r_2) tangentes externamente entre si, y a su vez tangentes a BC y al circuncirculo (O) del triángulo ABC externamente, de tal forma que la tangente común interna de (O_1) y (O_2) pase por A.
Además (O_1) y (O_2) se encuentran del lado opuesto a A con respeto a BC. De manera similar trazamos los circulos (O_3, r_3) y (O_4, r_4) tangentes a AC y (O) con su tangente común interna que pase por B y los circulos (O_5, r_5) y (O_6, r_6) tangentes a AB y (O) con su tangente común interna que pase por C.
Demostrar que:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} = \frac{2}{r}$$

donde $r =$ inradio de ABC.

Salazar, J.C., Comunicación personal (2006).
Propuesto por J. C. Salazar, profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela.(Puerto Ordaz)

Nota del editor. Este problema se publica, aunque ya se ha publicado el 262 de esta revista que es idéntico, por el motivo de que la igualdad de Thebault no fue la solución de Damián Aranda ni de José María Pedret ni de Maite Peña, resolutores del problema..

1-14 de febrero de 2006

294. Para un triángulo ABC y tres puntos A', B', y C', uno en cada uno de sus lados , las tres circunferencias de Miquel son las que pasan por cada vértice y los puntos sobre los lados correspondientes (es decir, por $AC'B'$, $BA'C'$, y $CB'A'$). De acuerdo con el teorema de Miquel, las circunferencias de Miquel son concurrentes en un punto M conocido como punto de Miquel.

From MathWorld, Eric W. Weisstein, Miquel Triangle
http://mathworld.wolfram.com/MiquelsTheorem.html

295. Se toma al azar un punto M en el interior de un triángulo arbitrario ABC.

(a) ¿Cuál es la probabilidad para que, si desde punto se bajan las perpendiculares MA_1, MB_1, MC_1, sobre los tres lados se pueda construir un triángulo con MA_1, MB_1 y MC_1?.

(b) ¿Y para que se pueda formar un triángulo que tenga todos sus ángulos agudos?

Lemoine E., Quelques questions de probabilities résolues géometricament.
Bulletin de la S.M.F, Societé Mathématique de France, Tomo 11, (1883)13-25

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

15-28 de febrero de 2006

296. Sea ABC un triángulo de lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Sea, DEF un triángulo inscrito en ABC, tal que los puntos D, E y F, estén respectivamente sobre los lados BC, AC y AB. Si S', es el área de DEF y S es el área de ABC respectivamente, se pide :

(a) Hallar el cociente de las áreas S'/S.

(b) ¿Cuánto vale S'/S si las cevianas AD, BE y CF, concurren ?

(c) Si D, E y F son los pies de las medianas

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{4}$$

(d) Si D, E y F son los pies de las bisectrices interiores, es

$$\frac{S'}{S} = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

(e) Si D, E y F son los pies de las alturas, es:

$$\frac{S'}{S} = \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{4a^2b^2c^2}$$

(f) Si D, E y F son los pies de las perpendiculares a los lados desde el centro de la circunferencia inscrita.

$$\frac{S'}{S} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4abc}$$

(g) Comparar los resultados de (f) y (e).

Scheffer, J., On the Ratio of the Area of a Given Triangle to That of an Inscribed Triangle The Analyst, Vol.8 N.6 (1881)173-174

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

297. Demostrar que P, S, I, son colineales, y que $PI/PS = R/R_0$, donde: I es el incentro, S es el punto de Spieker, P es el centro exterior de semejanza de (O,R) y (O_0,R_0), (O,R) es la circunferencia circunscrita, (O_0,R_0) es la circunferencia de Apolonio del triángulo ABC, tangente a las circunferencias exinscritas, con contacto interior a las tres (el contacto entre dos circunferencias es exterior o interior según el punto de tangencia separe o no los centros de las circunferencias).

Salazar, J. C., Comunicación personal, (2006).
Propuesto por J. C. Salazar, profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela.(Puerto Ordaz)

298.

1. Construye un triángulo equilátero ABC y la circunferencia (C) de centro C que pasa por B.
2. La circunferencia (C) ¿pasa por A?, ¿porqué?
3. Construye la tangente a la circunferencia (C) por el punto A. Corta a la recta BC en el punto P.
4. Construye la tangente por B a la circunferencia (C). Sea S un punto cualquiera de esta tangente. ¿qué puedes decir del triángulo SPC? Justifícalo cuidadosamente.

Clapponi, P., Activité ... deux tangentes.. Petit X 44, (1997)50.
Clapponi es un seudónimo de Philippe Clarou - Bernard Capponi.

1-15 de marzo de 2006

299. Si en un triángulo isósceles un ángulo mide 65°, calcúlese el valor, en grados, de sus otros dos ángulos. Considérense los dos casos posibles.

Vázquez, R. y Ramos, C., Matemáticas modernas, Trillas, México (1972)250

300. Dado el triángulo ABC, y las cevianas arbitrarias AA', BB' y CC', desde los vértices A, B y C, a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sobre la ceviana AA',(lo mismo para las demás), hacemos la siguiente construcción:

- Desde A', llevamos a su derecha e izquierda, la misma cantidad fija-pueden ser distintas, para B', y C', para obtener sobre el lado BC, los puntos $A'(B)$ y $A'(C)$.
- Por A, trazamos la paralela a BC, y por $A'(B)$ y $A'(C)$ la paralela, a AA', respectivamente.
- De esta forma obtenemos el paralelogramo $A'(C)A'(B)A^*(B)A^*(C)$, y los similares, para BB' y CC', respectivamente.
- Definimos los siguientes puntos por los pares de rectas que contienen a los dos segmentos que se indican: $X(A) = BA^*(C) \cap AC$, $Y(A) = CA^*(B) \cap AB$, y, lo mismo $X(B)$, $Y(B)$, $X(C)$, $Y(C)$, para los otros dos vértices.
- Por último construimos las dos ternas de puntos $Q(A) = BA^*(C) \cap CA^*(B)$, $P(B)$, y $R(C)$, de forma análoga; y, la terna de puntos, $U = X(A)Y(A) \cap X(B)Y(B)$, $V = X(A)Y(A) \cap X(C)Y(C)$, $W = X(B)Y(B) \cap X(C)Y(C)$.

Se pide:

(a) Demostrar que los puntos $Q(A)$, $P(B)$ y $R(C)$, están en las medianas correspondientes a los vértices A, B y C.

(b) Hallar los lugares geométricos de los puntos $Q(A)$, $P(B)$ y $R(C)$ cuando A', B', y C' recorren los lados BC, AC y AB.

(c) Demostrar que el triángulo UVW es homotético al triángulo ABC.

(d) Calcular el centro y la razón de la homotecia.

Romero, J.B., Comunicación personal (2005)
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

300a.

(a) El **punto de Clawson** del triángulo ABC es el centro de homotecia entre $A'B'C'$, triángulo órtico de ABC, y $A''B''C''$, triángulo extangencial de ABC. Es el punto X_{19} de ETC.

(b) Los puntos de tangencia entre las circunferencias exinscritas y las prolongaciones de los lados del triángulo están en una cónica, que tiene el centro X alineado con el simediano K y con el punto de Clawson.

Francisco Javier García Capitán , profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

300b. **Teorema de Carnot.** Sea en el plano un triángulo cualquiera ABC. Sean los puntos $A_1, A_2 \in BC$, $B_1, B_2 \in CA$, $C_1, C_2 \in AB$. Entonces los seis puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 están sobre una cónica Γ si y sólo si

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_2}{CA_2} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_2}{AB_2} \cdot = 1$$

José María Pedret. Ingeniero Naval (Esplugas de Llobregat, Barcelona)

301. En el triángulo ABC ($\angle A = 90°$), construir el círculo (O_1, r_1) tangente externamente a los excírculos (I_b) e (I_c) de tal forma que sea también tangente al lado BC, con el punto de tangencia entre B y C. Probar que

$$r_1 = \frac{(r_a + r)^2}{4(r_a - r + 2\sqrt{r_a r}}$$

Donde: r_a = radio del excirculo (I_a) y r = inradio de ABC.

Salazar, J.C., Comunicación personal (2006).
Propuesto por J.C. Salazar, profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela, (Puerto Ordaz)

16-31 de marzo de 2006

302.

(a) Sea D el punto medio del lado BC del triángulo ABC, con el ángulo A agudo, con circuncentro O. Si la circunferencia con radio OD corta a OA en X, demostrar que la circunferencia con diámetro AX es tangente a las circunferencias exinscritas sobre los lados CA y AB y además es tangente a la circunferencia circunscrita (O) en A.

(b) ¿Cómo es el resultado si A es recto?

(c) ¿Cómo es el resultado si A es obtuso?

Yiu, P., Comunicación personal (2006). Con la colaboración del correo de Juan Carlos Salazar.

303. Trazar una recta por un punto dado que divida un triángulo dado en dos partes cuyas áreas estén según una razón dada.

Pedret, J,M, Comunicación personal (2006)
Propuesto por José María Pedret

304. Dado el rectángulo $ABCD$, con $a = AB$ (base) y $b = BC$ (la altura), y $a > b$ desde la base AB se construye internamente el triángulo equilátero ABX, y desde la altura, $b = BC$, se construye exteriormente un triángulo equilátero BCY. Las rectas AX y BY se cortan en Z. Se pide :

(a) Hallar la relación entre la base y la altura del rectángulo para que los puntos X, C e Y, estén alineados.

(b) Caracterizar y calcular en este caso todos los elementos significativos: lados, ángulos, medianas, bisectrices interiores y exteriores, radio inscrito y radio circunscrito del triángulo XYZ.

Romero, J.B., Comunicación personal (2006)
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez

1-15 de abril de 2006

305. Sea el triángulo ABC y dada la ceviana arbitraria AA' donde A', varia sobre el lado BC. Construimos los tríangulos rectángulos en el vértice A, que denotamos por ACB^* y ABC^* donde B^* y C^* son los puntos más próximos a B y C, y situados tal vez en la prolongación del lado BC. Por A' trazamos la recta perpendicular a AA', y los puntos de corte de ésta, con AC, AC^*, AB, AB^* los designamos por $B(A)$, $N(A)$, $C(A)$, $M(A)$, respectivamente. Y, con ellos, construimos los cuadriláteros $P(A) = C(A)BB^*M(A)$ y $Q(A) = CB(A)N(A)C^*$.

(a) Si $X(A)$ e $Y(A)$ son los puntos que se obtienen como intersección de las diagonales de los cuadriláteros $P(A)$ y $Q(A)$, respectivamente, entonces $X(A)$, A', $Y(A)$ están alineados.

(b) Lugares geométricos descritos por los puntos $X(A)$, e $Y(A)$, cuando A' varía sobre la recta que contiene al lado BC, respectivamente.

Romero, J.B., Comunicación personal (2006)
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez

306. Sea el triángulo equilátero ABC, por el punto R simétrico de B con respecto a AC se traza una recta que corta a las prolongaciones de BA y BC en P y Q respectivamente. Además si S es el punto de corte de AQ y PC, y T es el punto de corte de AC y PQ. Demostrar que: $SB = SA + SC$ y $\angle BST = 90°$.

Salazar, J. C., Comunicación personal, (2006).
Propuesto por J. C. Salazar, profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela.(Puerto Ordaz)

Nota. José María Pedret advierte que la relación es distinta según se tome la recta. Es $SB = SC - SA$ ó $SB = SA - SC$, según la recta por R corte antes o después a BC o AB. El director agradece la atención prestada.

16-30 de abril de 2006

307. Sea ABC un triángulo.

1. Construye el punto A' simétrico de A en relación a B; el punto B' simétrico de B en relación a C, y el punto C' simétrico de C en relación a A.

2. Compara las áreas de los triángulos ABC y $A'B'C'$.

Clapponi, P., Activité ... autour d'un triangle, Petit X 40, (1995)86.
Clapponi es un seudónimo de Philippe Clarou - Bernard Capponi.

308. La suma de los inversos de los radios de los círculos exinscritos de un triángulo es igual al inverso del radio del círculo inscrito, y la raíz cuadrada del producto de los cuatro radios es igual al área del triángulo.

Severi, F., Elementos de geometría II, con 144 figuras (1952)
Traducción de la segunda edición italiana por el profesor T. M. Escobar, Escuela Industrial de Gijón.

Tercera reimpresión. Editorial Labor, Barcelona. Talleres Gráficos Ibero-Americanos S.A. (pág 201)

1-15 de mayo de 2006

309. Sea, en un mismo plano, un triángulo ABC y una recta arbitraria d. Y sea φ un ángulo tal que $0 \leq \varphi \leq \pi$. Sobre d tomamos tres puntos A', B', C' de manera que cada recta AA', BB', CC' forme con d un ángulo φ. Sean ℓ, m, n tres rectas por A', B', C' respectivamente; de tal modo que el ángulo entre ℓ y BC sea φ, igual al que forman m con CA y n con AB. Demostrar que ℓ, m, n son concurrentes.

Chavez, J C., comunicación personal (2006).
Propuesto por José Carlos Chavez Sandoval,

estudiante peruano de Matemática Pura en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos,

teniendo en cuenta el mensaje de Darij Grinberg a Mathlinks.

310. Sea AD la altura relativa al lado BC del triángulo acutángulo ABC. M y N son los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Sea E el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos BDM y CDN. Muestra que la recta DE pasa por el punto medio de MN.

X Olimpíada Matemática Rioplatense, San Isidro, 13 de Diciembre de 2001, Nivel I, Segundo Día

16-31 de mayo de 2006

311.

(a) Reflejemos el incentro I sobre cada uno de los lados de un triángulo isósceles,llamando A' (opuesto de A), etc. Dibujemos las líneas AA', BB', CC'. Mostrar que:

1. Estas tres líneas son concurrentes (en un punto J).
2. El segmento IJ es paralelo a la recta de Euler.

(b) Reflejemos el incentro I sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero, llamando A' (opuesto de A), etc.. Dibujemos las líneas AA', BB', CC'. Mostrar que:

1. Estas tres líneas son concurrentes (en un punto J).
2. El segmento IJ es paralelo a la recta de Euler.

Gray, S., Math Forum (2001).
Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7

312. Sea ABC un triángulo. Sea O el circuncentro. Sea P un punto de AC. Tracemos las mediatrices de AP que cortará a AB en M y de PC que cortará a BC en K. Demostrar que $OMBK$ es un cuadrilátero inscriptible.

Rodríguez, W., Comunicación personal (2006).
Propuesto por Rodríguez W.C., profesor de geometria de la Academia integral class, Trujillo, Perú

1-15 de junio de 2006

313. Sea ABC un triángulo no rectángulo. Trazamos, la ceviana arbitraria AA' desde A al lado BC. Construimos el triángulo A^*BC rectángulo en A^* , punto que está en la ceviana AA', del que prolongamos su catetos hasta que corten en los puntos P y Q, a los lados AB y AC, respectivamente.
Los puntos M y N sobre el lado BC se obtienen como intersección de las paralelas por P y Q, a la ceviana AA', respectivamente. Construimos los siguientes puntos :

- $X(A) = PN \cap QM$, $D = PQ \cap BC$;
- $U = PM \cap BQ$, $V = QN \cap PC$;
- $E = UC \cap QN$, $F = PN \cap QB$;
- $G = PC \cap QM$, $H = BV \cap PM$;
- $I = UN \cap BV$, $J = UC \cap BV$;
- $K = UC \cap PN$, $Y(A) = UN \cap MV$;
- $T = UC \cap MQ$, $S = BV \cap PN$;
- $Z(A) = HQ \cap PE$.

Demostrar :

(a) las rectas, AA', PN, QM son concurrentes en $X(A)$;

(b) las rectas, AA', UN, MV son concurrentes en $Y(A)$;

(c) las rectas AA', HQ, PE, son concurrentes en $Z(A)$;

(d1) D, F, G alineados;

(d2) D, T, S alineados;

(e) M, T, $X(A)$, G, Q alineados;

(f1) P, F, $X(A)$, S, K, N alineados;

(f2) B, H, I, J, S, V alineados;

(f3) C, E, K, T, J, U alineados;

(g1) H, $Z(A)$, Q alineados;

(g2) P, $Z(A)$, E, alineados;

Romero, J.B., Comunicación personal (2006).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

314. Sea ABC un triángulo cualquiera. Con un punto D se obtiene un cuadrilátero $ABCD$. Construir las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle DCB$. ¿Dónde colocar el punto D para que las bisectrices de $\angle DAB$ y $\angle DCB$ sean paralelas? Estudiar esta situación y justificar vuestras conjeturas.

Clapponi, P., Activité ... des bissectrices paralleles. Petit X 35, (1994)
Clapponi es un seudónimo de Philippe Clarou - Bernard Capponi.

16-30 de junio de 2006

315. Dado un triangulo ABC, y una cónica, sea $A'B'C'$ el triangulo polar de ABC con respecto a la conica. Demostrar que ABC y $A'B'C'$ estan en perspectiva.

Yiu, P., Introduction to the Geometry of the Triangle,version 2.0402, Summer 2001.
Propuesto por José Carlos Chavez Sandoval,

estudiante peruano de Matemática Pura en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Edición veraniega del 1 de julio de 2006 al 31 de agosto de 2006

316.

- Trazar un triángulo ABC;
- trazar la circunferencia pasando por A y B y tangente a BC;
- trazar la circunferencia pasando por B y C y tangente a CA;
- trazar la circunferencia pasando por C y A y tangente a AB:

Estas tres cirunferencias son secantes en un punto b llamado **primer punto de Brocard** del triángulo.

- Trazar la circunferencia pasando por A y B y tangente a AC;
- trazar la circunferencia pasando por B y C y tangente a BA;
- trazar la circunferencia pasando por A y tangente a CB.

Estas tres cirunferencias son secantes en un punto b' llamado **secundo punto de Brocard** del triángulo.

http://serge.mehl.free.fr/chrono/Brocard.html

317. Sean h_a, h_b, h_c, las tres alturas del triángulo ABC tales que $h_a = h_b + h_c$. La recta que pasa por los pies de las bisectrices interiores de los ángulos B y C pasa por el baricentro del triángulo.

Oposiciones Ibiza 2002.
Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES 1 de Xest, València

318. Si en el triángulo ABC el ángulo $A = 60°$, y llamamos O al punto de concurso de las rectas que unen los vértices A, B, C a los centros A', B', C', de los triángulos equiláteros construidos exteriormente a los lados BC, CA, AB, demostrar que

$$\frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} = 1, \qquad \frac{BO}{BB'} : \frac{CO}{CC'} = \frac{AB}{AC}, \qquad \frac{BO}{BB'} \cdot \frac{CO}{CC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AO}{AA'}$$

Alba, L., Revista Trimestral de matemáticas, Año, II, N.5 (1902)
Propuesto por J. B. Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

319. Dado el triángulo ABC, tal que $\angle ABC = 90°$. Sea Y en AC tal que los triángulos ABY y YBC tienen el mismo inradio, demostrar que $BY^2 = [ABC]$, donde $[ABC]$ es el área del triángulo ABC. Además generalizarlo en función de BY y el ángulo ABC cuando este es diferente de 90°.

Chávez, J.C., Comunicación personal (2006).
Propuesta de José Carlos Chávez Sandoval,

estudiante peruano de Matemática Pura en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos

320. Dados dos triángulos perspectivos ABC y $A'B'C'$, construir (si existe) la cónica respecto a la que son recíprocos (o correlativos).

Pedret, J.M., Comunicación personal (2006).
Propuesto por José María Pedret Ingeniero naval, Esplugas de Llobregat, Barcelona

321. Sea el triángulo ABC. Sea E y D sobre la recta AC de manera que E sea exterior a AC y D interior a AC y tal que BA sea la bisectriz de EBD. Sean F y G sobre la recta BC tal que EF y DG sean paralelos a AB. Sean $X = FA \cap EB$, $Y = FD \cap EG$, $Z = BD \cap AG$, $U = AG \cap FD$, $V = FA \cap EG$, $M = AB \cap VD$. Demostrar que :

(a) C, X, Y y Z, son colineales y están sobre la mediana de AB.

(b) E, M y U son colineales.

(c) Y está dentro del triángulo si y sólo si $B < 90°$.

(d) Y está fuera del triángulo si y sólo si $B > 90°$.

(e) Y está sobre el lado BC si $B = 90°$.

Romero, J.B., Comunicación personal (2006).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

322. La circunferencia inscrita al triángulo ABC es tangente a los lados AB, BC y CA en los puntos M, N y K respectivamente. La recta paralela a NK por A corta a MN en D. La paralela a MN por A corta a NK en E. Mostrar que la recta DE biseca a los lados AB y AC del triángulo ABC.

Loh Po-Shen, IV. Triangles (2003)

323. Dado el triángulo ABC, se inscribe en él otro triángulo $A'B'C'$ y en él $A'B'C'$ se inscribe otro $A''B''C''$, de tal modo, que sus lados sean paralelos a los lados de ABC. Se pide calcular el área de $A'B'C'$ en función del área de los triángulos ABC y $A''B''C''$.

Anónimo, Revista Matemática Elemental, Octubre, Tomo III (1934).
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

324. Construir un triángulo conociendo el perímetro y dos ángulos.

Severi, F., Elementos de geometría II, con 144 figuras (1952)
Traducción de la segunda edición italiana por el profesor T. M. Escobar, Escuela Industrial de Gijón.

Tercera reimpresión. Editorial Labor, Barcelona. Talleres Gráficos Ibero-Americanos S.A. (pág 201)

325. Sea un triángulo OXY. Construir el paralelogramo $OBCD$ cuyos lados están sobre las rectas OX, OY únicamente con la ayuda del punto medio de dos puntos.

Laborde, C. y Vergnaud, G., L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques,
En Vergnaud, G., Ed. Apprentissages et didactiques, oú en est-on?, Paris, Hachette (1994)90

326. ABC es un triángulo rectángulo en B. Sobre BC hacia el exterior del triángulo se construye un triángulo equilátero BCD, y se construye el segmento AD. Demostrar que $[BCD] = [ACD] - [ABD]$, donde $[BCD]$, $[ACD]$ y $[ABD]$ son las áreas de los triángulos correspondientes.

Aref, M.N., Wernick,W., Problems & Solutions in Euclidean Geometry, Dover Publications, Inc, New York. (1968)58

327. Dado un triangulo ABC, sea un punto P en su plano y sean $x = AP$, $y = BP$, $z = CP$. Demostrar que:

$$(a^2+b^2-c^2)(x^2y^2+c^2z^2)+(a^2-b^2+c^2)(b^2y^2+x^2z^2)$$
$$+(-a^2+b^2+c^2)(a^2x^2+y^2z^2)-(a^2x^4+b^2y^4+c^2z^4)-a^2b^2c^2=0$$

$$(y^2+z^2-a2)(y^2+z^2-a^2)x^2+(x^2+z^2-b^2)(x^2+z^2-b^2)y^2+(x^2+y^2-c^2)(x^2+y^2-c^2)z^2$$
$$-(y^2+z^2-a^2)(x^2+z^2-b^2)(x^2+y^2-c^2)-4x^2y^2z^2=0$$

http://mathworld.wolfram.com/TripolarCoordinates.html (Euler 1786).

328. En un triángulo, ABC

$$\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}-\sin A=0$$

si y solo si $A = 90°$. Según el valor del ángulo A ver qué tipo de triángulo es si se tienen las posibles desigualdades. (Ampliación del proponente).

Sánchez, A., Trigonometría Rectilinea y Esferica, Librería Internacional de Romo, S.A, Madrid, (1944)413, problema 13.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

329. Demostrar que un triángulo cuyos ángulos B y C satisfacen la igualdad

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}=2$$

es rectángulo. Ver qué tipo de triángulo es si se tienen las posibles desigualdades. (Ampliación del proponente).

IMO Shortlist 1967. Poland 5.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

330. Sean T y T' dos triángulos que tienen el mismo perímetro y que verifican que, $R/R' = r/r'$, donde R, R' y r, r' son los radios de los círculos circunscritos e inscritos, respectivamente a T y T'. Demostrar que T y T' son congruentes.

Romero, J.B., Comunicación personal (2006).

0.7 Curso 2006

1-15 de Setiembre de 2006

331. Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y la suma de los catetos.

Severi, F., Elementos de geometría I, con 220 figuras (1952)
Traducción de la segunda edición italiana por el profesor T. M. Escobar, Escuela Industrial de Gijón.
Tercera reimpresión. Editorial Labor, Barcelona. Talleres Gráficos Ibero-Americanos S.A. (pág 201)

332. Sea OAB con $\angle O = 90°$. Sean OM y ON las bisectrices interior y exterior de O, con M y N sobre la recta que contiene al lado AB. Sean M' y N' los pies de las perpendiculares trazadas por M y N, respectivamente, sobre la recta que contiene al lado OA. Consideremos los puntos siguientes: $X = M'N \cap MN'$, $Y = OM \cap BM'$, $Z = N'B \cap ON$, $U = BM' \cap MN'$, $V = M'N \cap N'B$, $W = ON \cap AU$, $S = M'N \cap OM$, $R = N'B \cap AS$, $T = N'M \cap ON$, $I = OM \cap AU$, $J = BM' \cap AS$. Probar que:

(a) X, Y, Z, A son colineales, y están sobre la mediana del lado OB.

(b) A, U, V, W son colineales.

(c) A, R, S, T, son colineales.

(d) US, IJ, VT, y WR son paralelos a OB.

(e) Los triángulos OMN, y $M'BN'$ tienen la misma área.

(f) OB es la media armónica de MM' y NN'.

Romero, J.B., Comunicación personal (2006

333. Sea $d = AD$, una ceviana del tríangulo ABC, tal que $d^2 = mn$, donde $m = BD$, y $n = DC$. Caracterizar si existen o no triángulos distintos de los triángulos rectángulos que verifiquen la propiedad anterior.

Nota. A m, y n, que verifican $a = m + n$, se les puede llamar la proyección paralela de los lados AB, y AC, sobre la ceviana AD(como base del paralelismo).

Romero, J.B., Comunicación personal (2006

334. Sean ABC un triángulo y H su ortocentro. Demostrar que si A', B', C' son los circuncentros de los triángulos HBC, HCA y HCB, entonces el triángulo $A'B'C'$ es congruente con ABC.

García, F.J., Comunicación personal (2006)

335. Los *puntos isodinamicos* son inversos con respecto a la circunferencia circunscrita y dividen armónicamente al *diametro de Brocard.* El diámetro de Brocard es el segmento formado entre el circuncentro y el punto simediano K, que es el isogonal del baricentro, punto de corte de las simétricas de las medianas respecto a las bisectrices.

Chávez, J., Comunicación personal (2006)

336. En un triangulo ABC, con la notación habitual demostrar que:

$$\frac{(4R+r)^2}{3} > r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a > \frac{27Rr}{2}$$

Chávez, J., Comunicación personal (2006)

16-30 de setiembre de 2006

337. Si ABC es un tríangulo obtusángulo en A, r,radio del cícrculo inscrito, R, radio del círculo circunscrito al triángulo, a, su lado mayor y p el perimetro respectivamemte, probar que :

$$\frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1 \leq \frac{a}{p}$$

¿Cúando se alcanza la igualdad?

Romero, J.B., Comunicación personal (2006

338. Dado el triangulo ABC y los puntos cualesquiera O, A', B', C'. Entonces AA', BB', CC' son concurrentes si y solo si existen tres vectores (no todos nulos) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ paralelos a AA', BB', CC' respectivamente tales que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ y $\overrightarrow{OA} \times u + \overrightarrow{OB} \times v + \overrightarrow{OC} \times w = \vec{0}$. ($\times$ denota el producto vectorial).

Pedoe, D., Geometry: A Comprehensive Course, Dover, New York, (1988).

339. Construir un triángulo equilátero ABC de 9 cm de lado. Construir la circunferencia (C) inscrita en él, y después un triángulo equilátero EFG inscrito en (C).

(1) Calcular la área del triángulo ABC.

(2) Calcular la área del triángulo EFG.

(3) ¿Qué se puede decir de las dos áreas?

(4) Si el lado de ABC es x, calcular las áreas de ABC y EFG en función de x.

(5) ¿Cuál es el cociente de esas dos áreas?

Clapponi, P., Activité ... deux triangles. Petit X 35, (1996)
Clapponi es un seudónimo de Philippe Clarou - Bernard Capponi.

1-15 de Octubre de 2006

340. Si p, r, y R son el semiperímetro, el radio del círculo inscrito, y el radio del círculo circunscrito, a un triángulo, respectivamente, probar que si $t > 1$:

(1) Probar que

$$\sqrt[3]{p^2 r} \leq \sqrt{\frac{(4R+r)^2 + 2(t-1)p^2}{3+6t}} \leq \frac{4R+r}{3}$$

alcanzándose la igualdad en los dos desigualdades si y sólo si, el triángulo es equilátero.

(2) Deducir de lo anterior, que:

$$\sqrt[3]{p^2 r} \leq \frac{p}{\sqrt{3}} \leq \frac{4R+r}{3}$$

(3) Interpretar (2) en términos geométricos utilizando para ello, las distancias entre dos puntos notables de un triángulo.

Romero, J.B., Comunicación personal (2006)

341. En todo triángulo inscrito en una hipérbola equilátera, el punto de intersección de las alturas está situado sobre la curva.

Brianchon y Poncelet, Annales de Montpellier, Tomo XI, (1821)

342. Sean A', B' y C' , A'', B'' y C'' los pies de dos ternas de cevianas de un triángulo ABC concurrentes en P' y P'' respectivamente. Entonces los puntos A', B', C', A'', B'', y C'' yacen en una cónica.
Recíprocamente: Se tiene un triángulo ABC que corta a una cónica en puntos A', B', C', A'', B'', C'' de suerte que sean concurrentes AA', BB', CC' en P'. Entonces las rectas AA'', BB'', CC'' también son concurrentes.

Campo, S., Métodos sintéticos de la geometría, Edición de autor, Salamanca. (2005)184

343. El incentro de un triángulo ABC se une a los vértices. Uno de los tres triángulos resultantes es semejante al triángulo original ABC. Encontrar los ángulos del triángulo ABC.

Komal, New exercises and problems in Mathematics, November (1992), Problem B3583

16-31 de Octubre de 2006

344. Caracterizar y construir el triángulo ABC, que es rectángulo en A, de hipotenusa $a = BC$, y de catetos $b = AC$, $c = AB$, de tal forma que, $BD = DE = EC$, donde D es un punto tomado sobre AC, E es un punto tomado sobre BC, tal que el ángulo $\angle ABD = \angle ACB$, y el ángulo $\angle BDE$ es rectángulo en D. Calculad también, los radios de los círculos inscrito y circunscrito a cada uno de los triángulos ABD, BDE, DEC.

Romero, J.B., Comunicación personal (2006)

345. Razón de los segmentos que el incentro determina sobre la bisectriz. El segmento de bisectriz que va del incentro al vértice es a la suma de los lados del ángulo como el otro segmento al tercer lado.

$$\frac{IC}{a+b} = \frac{IM}{c}$$

Campo, S., Métodos sintéticos de la geometría, Edición de autor, Salamanca (2005)15

346. En un triángulo ABC las cevianas AD, AE forman los triángulos ABD, ADE, AEC (no solapados) cuyos incirculos son iguales. Probar que: $AD/AE = BE/DC$.

Salazar, J.C., Comunicación personal (2006)

347. Construir un triángulo conocidos la longitud del lado a, el ángulo B y la medida de la longitud de la bisectriz interior W_a ó del otro vertice W_c.

Alcubilla, F., Comunicación personal (2006).

348. BC es la base de un triángulo isósceles ABC inscrito en una circunferencia. P es un punto de BC. Se traza AP prolongándolo hasta que corte a la circunferencia en S y se traza SC. Demostrar que AC es media proporcional entre AP y AS.

Thompson, J. E., Matemáticas al alcance de todos, Geometría, 2^a Edición, Uteha, México (1967)9

1-15 de noviembre de 2006

349. Construcción de un triángulo conociendo dos ángulos (A, B) y la altura (h) sobre el lado común (c) a los dos ángulos.

Quesada, C., Construcciones geométricas, Manuales UNEX, nº13, Cáceres (1993).

350. Hallar un punto P interior a un triángulo ABC tal que $m \cdot PA + n \cdot PB + p \cdot PC$ sea mínimo con los datos dados de m, n y p que están relacionados por $m + n + p = 1$.

Alcubilla, F., Comunicación personal (2006).

351. En el triángulo rectángulo ABC ($\angle A = 90°$) con inradio r se traza la ceviana AD de tal forma que los inradios de ABD y ADC son iguales a r_1.Probar que:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{AD}$$

Salazar, J.C., Comunicación personal (2006)

352. Sean T y T' dos triángulos rectángulos distintos, de hipotenusas a, a', y, catetos b, c, b', c', respectivamente. Probar que

$$aa'(bc' + b'c) = a^2b'c' + a'^2bc$$

si y sólo si los triangulos T y T' son semejantes.

Romero J.B., Comunicación personal (2006).

353. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, sea CD una altura. Los círculos de centros P, Q e I están inscritos en los triángulos ACD, BCD y ABC, respectivamente. Demostrar que el segmento PQ es igual al segmento CI y es perpendicular a él.

Campo, S., Métodos sintéticos de la geometría, Edición de autor, Salamanca, (2005)22

16-30 de noviembre de 2006

354. **Teorema de Euler.** En todo triángulo ABC, la distancia d del centro de la circunferencia inscrita cuyo radio es r, al centro de la circunscrita cuyo radio es R, está dada por la relación $d^2 = R(R - 2r)$.

Frère Gabriel Marie, Exercices de géométrie, comprenant l'esposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues, 5. ed., 3 p. L., [iii]-xxiv, 1302 p. diagrs. 22 cm. Tours, A. Mame et fils; (1912)173
Casey, J., A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid,6th ed. Dublin,(1888)74-75
Johnson, R. A., Modern Geometry, An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle, Boston, MA, Houghton Mifflin, (1929)186-187
Altshiller-Court, N., College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools, 2nd ed., rev. enl. New York: Barnes and Noble, (1952)85-86
Lidski , V. y otros, Problemas de Matemáticas Elementales, Editorial Mir, Moscú (1978)57
Izquierdo, F., Fórmulas y propiedades geométricas, Edición de autor, Madrid (2005)

355. Dados los lados $a \geq b \geq c$ del triángulo ABC, si R, es radio de su círculo circunscrito, y d, la distancia entre el incentro y circuncentro del triángulo, probar que :

$$0 \leq d \leq \sqrt{R^2 - \frac{bc}{3}}$$

con la igualdad alcanzada en todos los miembros si y sólo si, el triángulo es equilátero.

Romero J.B., Comunicación personal (2006).

356. Tracemos los diámetros comunes a las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo. Sean M y N los extremos de estos diámetros y MP y NQ los segmentos del mismo comprendidos entre ambas circunferencias. Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita es media proporcional entre MP y NQ.

Prieto, M., Fundamentos geométricos del diseño en ingeniería,
Aula documental de investigación, Madrid (1992)

357. Construir un triángulo teniendo en el plano el lado AB y conociendo el baricentro G.

Alcubilla, F., Comunicación personal (2006).

1-15 de diciembre de 2006

358. Por los vértices, A, B, C de un triángulo, se trazan tres rectas de igual dirección que reencuentran a la circunferencia circunscrita Γ en A', B' y C'. Sea P un punto de Γ; las rectas PA', PB' y PC' vuelven a encontrar a las rectas BC, CA y AB en A^*, B^* y C^*. Demostrar que estos puntos pertenecen a una misma recta r. ¿Cuál es la dirección de esta recta ?

Commeau, J., Cours Complet de Mathématiques, Géométrie, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, (1957)71

359. Dado el triángulo ABC. Sean las circunferencias C_1, C_2 que pasan por los puntos B, C e intersecan los lados AB, AC en los puntos B', C' (la circunferencia C_1) y en los puntos B'', C'' (la circunferencia C_2). Demostrar que los segmentos $B'C'$ y $B''C''$ son paralelos.

Peiró, R., Problemes amb Cabri. Imprenta rápida Llorens, S.L. Valencia, Edición de autor (1999)76
Con permiso del autor. El director agradece la gentileza

360. Sean $T = ABC$ y $T' = A'B'C'$, dos triángulos rectángulos en A, y A', respectivamente. Si, a, a', son sus hipotenusas, b, c, b', c', sus catetos y S, S', son sus áreas, respectivamente, probar que :

(a) $(a'c + ac')^2 + (a'b + ab')^2 + (bc' + cb')^2 - (aa' + bb' + cc')^2 - 16SS' \geq 0$, con la igualdad alcanzada en la desigualdad si y sólo si T y T' son semejantes.

(b) ¿Es el resultado de (a) cierto, en el caso en que los dos triángulos T, y T' su ángulo en A, y A', respectivamente, sea mayor o igual a un recto?.

Romero, J.B., Comunicación personal (2006).

16 de diciembre de 2006 - 15 de enero de 2007

361. Dado en posición el lado AB y conocido el ortocentro H en posición, hallar C.

Alcubilla, F., Comunicación personal (2006).

362. Demonstrar que un ángulo recto es igual a uno obtuso.

Rouse Ball, W., Recreaciones matemáticas y problemas de los tiempos antiguos y modernos, Segunda edición francesa. Segunda parte. Librería Científica Hermann, París (1908)2

363. Demostrar que un segmento de un lado de un triángulo es igual al lado completo.

Rouse Ball, W., Recreaciones matemáticas y problemas de los tiempos antiguos y modernos, Segunda edición francesa. Segunda parte. Librería Científica Hermann, París (1908)3

16-31 de enero de 2007

364. Dado un triángulo ABC y un punto P, consideramos los triángulos PBC, PCA, PAB y sus ortocentros H_a, H_b, H_c.

1. Los puntos H_a, H_b y H_c nunca están alineados, a menos que P esté sobre uno de los lados del triángulo ABC.
2. Las rectas AH_a, BH_b y CH_c son concurrentes si y solo si P está en alguna de las alturas del triángulo ABC o en la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.
3. El triángulo $H_aH_bH_c$ siempre tiene la misma área que ABC.
4. Cuando P está sobre la circunferencia circunscrita, el punto de concurrencia Q de AH_a, BH_b y CH_c está sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC y los triángulos ABC y $H_aH_bH_c$ no son sólo perspectivos, sino que además $H_aH_bH_c$ es el resultado de aplicar a ABC una simetría central de centro Q. De hecho Q, es el punto medio del punto dado P y el ortocentro H del triángulo.

García, F., Comunicación personal (2007)

365. Si el lado a de un triángulo es igual a la raíz cuadrada de la semisuma de los cuadrados de los otros dos lados, la recta KG que une el punto de Lemoine al centro de gravedad, es paralela a este lado e igual a

$$\frac{a(b^2 - c^2)}{3(b^2 + c^2)}$$

Luis de Alba, Revista Trimestral de Matemáticas, Septiembre (1901)112, Dección de cuestiones propuestas, número 11.

366. **Generalización del teorema de Simson.** Demostrar que: los pies de las perpendiculares bajadas de un punto O a los lados de un triángulo ABC forman una figura semejante a la terna $A'B'C'$ de los puntos inversos de ABC en toda inversión de centro O. Deducir como corolario el teorema de Simson.

Puig Adam, Geometría Métrica, vol I, GOMEZ PUIG Ediciones, 15ª edición, Madrid (1980)166

367.

(a) Inscribir, en un círculo de centro O, un triángulo MNP, donde el lado PM pasa por un punto dado A, el lado NP pasa por un punto dado B y el lado MN es paralelo a una recta dada r.

(b) Aplicar el resultado anterior para obtener la resolución del problema de CASTILLON para círculo y triángulo.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2007)

368. Dibuja dos círculos, uno pequeño y otro grande, tangentes exteriormente en el punto A. La tangente común a estos dos círculos toca al pequeño en B y al grande en C. Tienes un minuto para calcular el ángulo BAC.

Berrondo-Agrell, M., 101 enigmas de geometría, juegos divertidos para potenciar tu mente, Ediciones Ceac Barcelona, (2006)11

1-14 de febrero de 2007

369. Consideremos todos los segmentos que dividen al triángulo en dos áreas iguales. Demostrar que la envolvente de los mismos son tres hipérbolas tangentes a las medianas y tengentes entre sí.

Aguilera N. (2007)

El director agradece la gentileza de Néstor Aguilera, Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe (Argentina) su gentileza a dar permiso para la publicación.

370. Sean ABC un triángulo en el que $BC = (CA + AB)/2$. Sean I, N, G el incentro, el punto de Nagel y elbaricentro, idel triángulo ABC. Entonces:

(a) El punto N está siempre en la mediatriz de BC.

(b) IG es paralela a BC y además $IG = |AB - AC|/6$.

(c) IN es paralela a BC y además $GN = |AB - AC|/3$.

García, F., Comunicación personal (2007)

371. Sean ABC un triángulo cualquiera no isósceles, P el punto medio del lado BC y Q, R dos puntos sobre la bisectriz del ángulo A, simétricos respecto de A *y* tales que $\angle QPC = \angle RPC$. Entonces $AB+AC = PQ + PR$.

mina_world (2006): sci.math

372. Relación entre las alturas de un triángulo y el inradio:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

Campo, S., Métodos sintéticos de la geometría, Edición de autor, Salamanca (2005),9

Gusiev, V. y otros, Prácticas para resolver problemas matemáticos

Geometría, Editorial Mir, Moscou, (1989)65, Problema 299

373. Demostrar que el perímetro de un triángulo acutángulo y el de su triángulo órtico son proporcionales a los radios de los círculos circuninscrito e inscrito en el primero.

Matemática Elemental, Tomo II, N.2, Febrero, (1933)26-29

Khayyam, O, American Mathematical Monthly, (1964) E1694, pag.554

Altshiller-Court, N., College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools, 2nd ed., rev. enl. New York: Barnes and Noble, (1952)100

Johnson, R. A., Modern Geometry, An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle, Boston, MA, Houghton Mifflin, (1929)191

15-28 de febrero de 2007

374. En el triángulo ABC, se tiene $\angle A = 5x$, $\angle B = 7x$, $\angle C = 36°$. Encontrar las medidas de $\angle A$ y $\angle B$.

Geltner, P.B. , Peterson, D.J., Editorial Thomson, México DF (1998)103

375. En el triángulo ABC se tiene D en AC tal que $AC = BD$ y también $\angle ABD = 10°$, $\angle CBD = 40°$. Hallar $\angle A$.

Salazar, J. C., Comunicación personal (2004)

1-15 de marzo de 2007

376. Se prolongan los lados AB, BC, CA, de un triángulo en $t = BB' = CC' = AA'$, y los lados BA, CB, AC, en $t = AA'' = BB'' = CC''$. Demostrar que las rectas $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, forman un nuevo triángulo cuya área es

$$S_1 = \frac{2SR}{r} + 2td + \frac{t^2d^2}{2pR}$$

con S área, R circunradio, r inradio, $d = 4R + r$, p semiperímetro.

Neuberg J., El Progreso Matemático II, (1900)231, cuestión 233
Revista Trimestral de Matemáticas, Año I, Diciembre, de 1901, Número 4, Zaragoza

Neuberg J., Revista Trimestral de Matemáticas, Año, II, Zaragoza, Junio de 1902, N.6. Zaragoza

377. Soy un triángulo rectángulo. Mi perímetro es de 10 cm. Mi altura desde el ángulo recto mide 2 cm. ¡Dibújame, por favor!

Berrondo-Agrell, M., 101 enigmas de geometría, juegos divertidos para potenciar tu mente, Ediciones Ceac Barcelona (2006)70

16-31 de marzo de 2007

378. Caracterizar por sus ángulos a todo triángulo ABC, que verifica la relación

$$2r(b + c) = 2r^2 + bc$$

donde $a > b, c$, y r el radio de su círculo inscrito.

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

379. Construcción del triángulo isósceles dada la altura h_b y el ángulo B.

Rendón, A., Geometría fácil paso a paso, Volumen 1, Edición de autor, Zaragoza (1997)63

1-15 de abril de 2007

380. ABC es un triángulo cualquiera. $G=$ baricentro de ABC. Sea P un punto en la circunferencia tiene como centro el punto G y como radio una longitud cualquiera. Demostrar que: $PA^2 + PB^2 + PC^2$ es constante.

Retali V, Biggiogero, G., La geometria del triangolo
en Enciclopedia delle matematiche elementari e complementari,

Berzolari, Vivanti and Gigli editores, Vol II , 1936-1979, pag 175

381. Demostrar que en cualquier triángulo rectángulo el punto de intersección de las mediatrices de los dos catetos es el punto medio de la hipotenusa.

Birkhoff, G. D. y Beatley, R., Basic geometry, Chelsea P.C. New Cork (1959)101

16-30 de abril de 2007

382. Construir un triángulo conociendo las longitudes de la altura y la mediana relativa al lado a, y conociendo la relación de los lados $b/c = m/n$, siendo m y n segmentos de longitud conocida.

Examen Final de Geometría P y E,(1995) Profesores Ingenieros Darío Coronel y Pedro Echauri,
Universidad Nacional de Asunción (Paraguay)

383. Sea ABC un triángulo rectángulo e isósceles, con $AB = AC$. Consideramos los puntos M y N en AB tales que $AM = BN$. Se traza desde A la perpendicular a CM que corta a BC en P. Si $\angle APC = 62°$, calcular la medida del ángulo $\angle BNP$.

OMA 2005, http://www.oma.org.ar/enunciados/oma22nac.htm

384. Dado un triángulo ABC con lados $a \geq b \geq c$. Sean h_b, h_c, las alturas correspondientes a los lados b y c, respectivamente y, m_a, y n_a, las proyecciones ortogonales de b y c sobre el lado a. Caracterizar a todos los triángulos que verifiquen la siguiente la siguiente relación :

$$n_a(h_c - b) = m_a(h_b - c).$$

Interpretar geométricamente la relación anterior.

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

385. Inscribir en un círculo dado, de centro O y radio r, un triángulo isósceles del que se conoce la suma s de la base y de la altura. Discutir la existencia de soluciones según el valor de s respecto al radio r del círculo.

Reynaud, Antoine-André-Louis (1771-1844). Théorèmes et problèmes de géométrie; suivis de la théorie des plans, et des préliminaires de la géométrie descriptive: comprenant la partie exigée pour l'admission à l'École polytechnique, 10e éd. Paris (1838), Problème 105.

386. ABC es un triángulo equilátero. Si D es el incentro, y trazamos las paralelas por D a AB y a AC, que cortarán a BC en P y R, demostrar que Q y R trisecciona a BC.

Aref, M.N., Wernick,W., Problems & Solutions in Euclidean Geometry,
Dover Publications, Inc, NY (1968)29

1-15 de mayo de 2007

387. Si ABC es un triángulo isósceles, con los lados AC y BC iguales; y si CD es un segmento dibujado desde el vértice C a cualquier punto D de la base AB entonces $AD \cdot DB = BC^2 - CD^2$.

Casey, J., A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, 6th ed. Dublin, (1888)21

388. Sean O, O' los centros, y r, R los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo ABC; Sean también A', B', C' los pies de las perpendiculares desde los vértices a los lados opuestos, I su intersección, y t el radio de la circunferencia inscrita en $A'B'C'$. Demostrar que

(1) $(OI)^2 = 2r^2 - 2Rt$,

(2) $(O'I)^2 = R^2 - 4Rt$

Heal, W. E., The Annals of Mathematics, Vol.2, No.2, Feb. (1886)43-47

389. En el triángulo ABC se tiene $\angle B = 30°$, $\angle C = 20°$, D en BC con $BD = AC$. Hallar $\angle DAC$.

Salazar, J. C., Comunicación personal (2004)

16-31 de mayo de 2007

390. Se tiene un triángulo y su circunferencia circunscrita: cada radio que parte de cada uno de los vértices se prolonga hasta la circunferencia. Se unen dos a dos las extremidades de los tres diámetros así construidos; demostrar que la área del hexágono obtenido es doble de la del triángulo.

N.A. 1844, p. 317
Frère Gabriel Marie, 5. ed., A. Mame et fils, (1912)554

391. Si p, r y R, son el semiperímetro, radio del círculo inscrito y radio del círculo circunscrito al triangulo ABC. Demostrar que

$$p^2 - 4pr + r^2 + 4rR > 0$$

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

392. Si en un triángulo se verifica que

$$\cos A + \cos B = 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{C}{2}\right)$$

entonces $a + b = 2c$.

Luis Zegarra, http://www.luiszegarra.cl/

1-15 de junio de 2007

393. Si p, r y R, son el semiperímetro, radio del círculo inscrito y radio del círculo circunscrito al triangulo ABC. Demostrar que:

$$p^2 - r^2 - 4rR \geq 0,$$

¿Se alcanza la anulación?

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

394. En el triángulo ABC, $\angle B = 30°$, $\angle C = 40°$. Se tiene D en BC tal que $BD = AC$. Hallar $\angle DAC$.

Salazar, J.C., Comunicación personal (2004)

395. Sean A, B, C, D puntos colineales en este orden. Dibujemos los triángulos equiláteros ABE y CDF en el mismo semiplano. Sea G la intersección de las circunferencias circunscitas a ACE y BDF, que esté en el mismo semiplano que E y F. Demostrar que $\angle AGD = 120°$.

Komal, Abril 2007, problema B3995, http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.e.shtml

16-30 de junio de 2007

396. Dado un triángulo obtusángulo ¿Es posible descomponerlo o diseccionarlo en otros triángulos todos ellos acutángulos?.

Pickover C.A., La matemática de OZ. Gimnasia mental más allá del límite, Ed. Almazara (2005)

397. En el triángulo escaleno ABC, con $\angle BAC = 90°$, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta tangente en A a la circunferencia circunscrita corta a la recta BC en M. Sean S y R los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U. Demuestre que el triángulo UMN es isósceles.

21ª OIM (2006), Guayaquil (Ecuador)

Edición veraniega del 1 de julio de 2007 al 31 de agosto de 2007

398. Sean ABC un triángulo no rectángulo en A y V un punto situado sobre la recta BC, distinto de los vértices. La paralelas a AC y AB por por V cortan a AB y AC en D y E, respectivamente. La perpendicular a AB por V corta en en G a AC. La perpendicular a AC por V corta en F a AB. Además consideramos los puntos de intersección $J = GD \cap VF$ y $K = EF \cap VG$.

(a) Demostrar que cada uno de los siguientes enunciados es cierto si y solo si AV es una de las bisectrices del ángulo A.

1. DE es paralela a FG.
2. FG es paralela a JK.
3. DG, EF y AV son concurrentes.
4. El triángulo VFG es isósceles.

(b) V es el ortocentro de AFG.

Romero, J.B. y García, F.G., Comunicación personal (2007)

399. Construcción del triángulo equilátero dada la altura h_a.

Rendón, A., Geometría paso a paso, Volumen 1, Elementos de geometría métrica y sus aplicaciones en arte, ingeniería y construcción, Editorial Tébar (2000)78

0.8 Curso 2007

1-15 de Setiembre de 2007

400. Si S es área de un triángulo ABC ($A \leq B \leq C$) de perímetro $2s$ el área está acotada por la siguiente desigualdad:

$$\frac{2}{9}s^2 \sin A \leq S \leq s^2 \cos B$$

¿ Cuándo se alcanza la igualdad en cada miembro?

Smith, C.D., On boundary values for area a triangle, Mathematics News Letter, Vol.4, n.8, June (1930)7-9

401. Construir un triángulo dado: un lado a, el inradio r, y la medida del ángulo A opuesto al lado a.

Hiebert, J., Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, (1986)245
Lawrence Erlbaum Associates Publishers, London

16-30 de setiembre de 2007

402. **Triángulos pitagóricos.** Los triángulos rectángulos con lados enteros reciben el nombre de triángulos pitagóricos.

(a) Hallar las fórmulas que dan lados enteros para un triángulo rectángulo.

(b) Mostrar que en todo triángulo pitagórico: Hay uno de los lados que es siempre divisible por 3 y uno por 5. El producto de los dos catetos es siempre divisible por 12 y el producto de los tres lados es siempre divisible por 60.

(c) Hallar, como propone Diofanto en el problema 18 del libro VI de su Aritmética, los triángulos pitagóricos en el que la longitud de la bisectriz de uno de los ángulos agudos es racional

Albert H. Beiler, Recreations in the theory of numbers, Dover Publications Inc.

403. Demostrar que si una recta divide a un triángulo ABC en dos polígonos del mismo perímetro y de la misma área, entonces debe pasar por el incentro I de ABC. Demostrar también, sin necesidad de construcción geométrica, la existencia de tal recta[23].

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

404. Si p, r y R, son el semiperímetro, radio del círculo inscrito y radio del círculo circunscrito al triangulo ABC. Demostrar que :

$$2p^2R - 2r^3 > 0$$

¿ Se alcanza la anulación?

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

[23] Este problema es una nueva visión del problema 138 de la quincena del 1 al 15 de febrero de 2004, con una profundización

1-15 de Octubre de 2007

405. Dados ABC y $A'B'C'$ dos triángulos que verifican :

(a) los ángulos B y B' son iguales y la suma de los ángulos A y A' es dos rectos, o

(b) los ángulos A y A' son mayores o iguales que un recto.

Probar entonces que entre sus lados se verifica la siguiente desigualdad :

$$\sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} \leq \sqrt{2aa'}$$

¿ Cuándo se verifica la igualdad?

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

406. Si dos rectas trazadas desde un vértice de un triángulo equilátero dividen el semicírculo exterior construido sobre el lado opuesto en tres arcos iguals, entonces estas rectas dividen dicho lado en tres segmentos iguales.

Coxeter, Retorno a la geometría, Editorial Euler,
Colección la Tortuga de Aquiles Madrid (1994)26, Ejercicio 5

407. Sea un triángulo acutángulo ABC y sea P un punto interior al mismo. Sean los ángulos $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPA$. Caracterizar el punto P de manera que la suma $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ sea mínima.

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

408. En el triángulo ABC, $B = 40°$, $C = 20°$, D en BC, $BD = AC$. Hallar $\angle DAC$.

Salazar, J. C., Comunicación personal (2004)

409. **Lugares geométricos de triángulo inscritos en un círculo.** Sea un círculo Γ de centro O. Sobre su circunferencia, se toman dos puntos fijos B y C que son los dos vértices de la base de un triángulo ABC inscrito en el círculo Γ.

(1) Si el vértice A recorre la circunferencia de Γ, hallar el lugar geométrico del ortocentro H del triángulo ABC.

(2) Sean A', B', C' las intersecciones de la circunferencia de Γ respectivamente con las bisectrices internas de los ángulos A, B, C. Si el vértice A recorre la circunferencia de Γ, hallar el lugar geométrico del ortocentro H' del triángulo $A'B'C'$.

José María Pedret, Ingeniero Naval. Esplugues de Llobregat (Barcelona)

16-31 de Octubre de 2007

410. Demostrar la fórmula

$$\frac{ar_a}{r_a - r} + \frac{br_b}{r_b - r} + \frac{cr_c}{r_c - r} = 3p$$

Donde r_a, r_b, r_c, son los radios de los círculos exinscritos, al triángulo ABC, respectivamente, y p el semiperímetro.

Lemoine, E., El progreso matemático (2) II(1900)336, Cuestión 343, Zaragoza
Lemoine, E., Revista Trimestral de Matemáticas, Año II, Diciembre N. 8 (1902)192, Zaragoza.

411. **Lugares geométricos de triángulo inscritos en un círculo.** Sea un círculo Γ de centro O. Sobre su circunferencia, se toman dos puntos fijos B y C que son los dos vértices de la base de un triángulo ABC inscrito en el círculo Γ.

(1) Si el vértice A recorre la circunferencia de Γ, hallar el lugar geométrico del baricentro G del triángulo ABC.

(2) Se traza la altura desde el vértice B, que corta al lado CA en el punto D, y la altura desde el vértice C que corta al lado AB en el punto E. Unimos D con E y determinamos un punto P tal que $PE/PD = k$. Si el vértice A recorre la circunferencia de Γ, hallar el lugar geométrico de P.

Pedret, J. M., Comunicación personal (2007)

412. Demostrar o refutar si en un triángulo equilátero la curva de longitud mínima que corta al mismo en dos polígonos de igual área, es un segmento de línea recta.

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

413. En el triángulo ABC, $B = 80°$, $C = 20°$, D en BC, $AB = DC$. Hallar $\angle DAC$.

Juan Carlos Salazar, Comunicación personal (2004)

414. Demostrar que para cualquier triángulo rectángulo el radio de la circunferencia que entra en contacto con sus catetos y la circunferencia circunscrita (por dentro) es igual al diámetro de la circunferencia inscrita.

Shariguin, Problemas de Geometría. Planimetría, Ed. Mir. Moscú, (1986)88, problema II 106

1-15 de noviembre de 2007

415. Dado el triángulo ABC, con lados $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, construir la longitud d tal que

$$d^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8}$$

García, F.J. y Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

416. En un triángulo ABC se sabe que la base es fija y que el punto medio de CO está en AB, siendo O el circuncentro. Hallar el lugar geométrico del vértice C.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2997)

417. Demostrar que si en un triángulo ABC, el triángulo formado por los pies de sus bisectrices interiores es rectángulo, entonces dicho triángulo tiene un ángulo de $120°$.

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

Nota. Este problema surge como teorema recíproco al teorema establecido en el problema 9 de esta misma revista. Dicho problema se enunció así: *Demostrar que si en un triángulo ABC un ángulo es de $120°$, el triángulo formado por los pies de las bisectrices interiores es rectángulo*, (G. Sánchez Vázquez. Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos, SAEM THALES, Sevilla (1996)16)

16-30 de noviembre de 2007

418. En un plano cualquiera, se dan: un círculo Γ de centro O, un punto fijo H. En Γ se inscriben triángulos variables ABC, cuyo ortocentro es H.

(a) Hallar el lugar geométrico del punto medio de uno de los lados del triángulo.

(b) Caracterizar dicho lugar geométrico.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2007)

419. En el triángulo acutángulo ABC el ángulo A es $60°$. Demostrar que una de las bisectrices del ángulo formado por las dos alturas trazadas desde los vértices B y C pasa por el circuncentro del triángulo.

Kvant, problema M1046

420. Sean O, I, H el circuncentro, incentro y ortocentro, respectivamente, de un triángulo acutángulo ABC. Demostrar que si P es un punto interior al triángulo y siendo $\sum(P, \text{lados})$ la suma de las distancias del punto P a los lados del triángulo, entonces, se tienen las siguientes desigualdades

$$\sum(H, \text{lados}) \leq \sum(I, \text{lados}) \leq \sum(O, \text{lados})$$

y caracterizar cuándo se dan las igualdades

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

421. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, $c < b < a$. Trazamos la recta que pasa por el incentro I, y el circuncentro O, que corta a la prolongación de AC en D, y AB en E, respectivamente. Probar si es cierto o no :

(a) Que $AD = a/2$ si sólo si $B = 60°$.

(b) Si $F = AO \cap EC$, entonces $IF \parallel AB$ si y sólo si $B = 60°$.

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

422. ABC es un triángulo cuyas tres bisectrices se cortan en P. P se proyecta respectivamente en H y K en los segmentos AB y AC. ¿Cómo es el ángulo formado por las rectas AP y HK?

Berrondo-Agrell, M., 101 enigmas de geometría, juegos divertidos para potenciar tu mente Ediciones Ceac Barcelona (2006)64

1-15 de diciembre de 2007

423. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, de hipotenusa a, y de altura correspondiente, h. Probar que:

$$h^2\sqrt[3]{2} \leq \frac{h\left(h + a\sqrt{2}\right)}{3} \leq \frac{\left(a + h\sqrt{2}\right)^2}{9}$$

Romero, J. B., Comunicación personal (2007)

424. **Teorema de Pompeïu** Descubierto por el matemático rumano Dimitrie Pompeïu, el teorema es bastante simple; y dice así

Dado un triángulo equilátero ABC y un punto P en el plano del triángulo ABC, las longitudes PA, PB, PC constituyen los lados de un triángulo. Si P está sobre el círculo circunscrito al triángulo ABC, entonces PA, PB, PC constituyen un triángulo degenerado (el lado más largo es suma de los otros dos).

A partir de aquí, al triángulo de lados iguales a las longitudes PA, PB, PC lo denominaremos **triángulo de Pompeïu**. [24]

Nuestra propuesta, orientada a Cabri II Plus es la siguiente:

Demostrar de forma gráfica el teorema de Pompe´iu: establecer que si P es interior al triángulo equilátero ABC el triángulo de Pompeïu siempre puede inscribirse en el triángulo equilátero ABC; establecer también que si P se halla sobre el círculo circunscrito, entonces el triángulo es degenerado y que si P es exterior, el mismo procedimiento permite la construcción del triángulo de Pompeïu con un vértice en cada una de las rectas AB, BC, CA sin tener que recurrir a procedimientos generales para resolver este tipo de problemas.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2007)

425. Demostrar que es posible construir con regla y compás un triángulo ABC conocidos el radio de su circunferencia circunscrita R, el radio de su circunferencia inscrita r y una altura del mismo. Establecer también las condiciones para que sea posible tal construcción y proporcionar alguna.

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

426. Por un punto cualquiera O de un triángulo, se toman paralelas OA', etc, a los lados el triángulo; se tiene

$$\frac{BA'}{BC}+\frac{CB'}{CA}+\frac{AC'}{AB}=1$$

Journal de Mathématiques élémentaires de M. Vuibert, 15 de mars 1900, page 95, nº 4753.
F.G.M., Exercices de géométrie, comprenant l'esposé desméthodes géométriques et 2000 questions résolues, A. Mame et fils, 5 ed. (1912)554

427. Sea ABC un triángulo. Sobre cada uno de sus lados y exteriormente, construimos las semicircunferencias que tienen a sus lados como diámetros respectivos. Dividimos cada una de estas semicircunferencias en n arcos iguales. Determinar el límite del cociente de la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos cuyos extremos son cada vértice del triángulo y cada uno de los puntos de división del arco opuesto entre el número n de arcos.

En memoria de D. Jordi Dou, amante e impulsor de la cultura y recientemente fallecido.

428. Sea ABC un triángulo, AA', BB', CC' son las bisectrices interiores que se cortan en el incentro I de los ángulos A, B y C, respectivamente. Trazamos por B y C, las perpendiculares a las bisectrices CC', BB', (prolongadas si es necesario) cortando a ellas, en los puntos M_a, N_a, respectivamente, y estas rectas se cortan en A_a. Sea P_a, el pie de la altura desde A_a sobre el lado BC. Probar que :
El triángulo $M_aN_aP_a$ (que es el triángulo órtico del triángulo A_aBC) es inversamente semejante al triángulo ABC, cuyo incentro I coincide con el ortocentro del triángulo A_aBC. Hallar los elementos de semejanza.

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

[24] Este teorema ya fue abordado en el problema 77 del Laboratorio virtual de triángulos con Cabri II. József Sándor, en su documento, (On the Geometry of Equilateral Triangles, Forum Geometricorum Volume 5 (2005) 107), presenta una indicación para la demostración del teorema por medio del teorema de Ptolomeo, una determinación gráfica del triángulo de Pompeïu y deriva de ella un cálculo del área.

16 de diciembre de 2007 - 15 de enero de 2008

429. Sea ABC un triángulo. C' y B' sean los puntos medios de los lados AB y AC. J es el simétrico de C según C'. I es el simétrico de B según B'. Demostrar que A es el punto medio de IJ.

Bernat, P. y Morinet-Lambert, J., A new way for visual reasoning in geometry education
Springer Berlin / Heidelberg (1996)452

430. Consideremos, por ejemplo, el llamado *Teorema de Napoleón*, a menudo atribuido a Napoleón Bonaparte (que fue un buen joven estudiante de matemáticas). Sean tres triángulos equiláteros construidos hacia fuera de cualquier triángulo. Los centros de los equiláteros forman también un triángulo equilátero. Uno puede imaginar al joven Napoleón con papel, regla, y compás, comenzando con un triángulo cualquiera, descubriéndolo de manera experimental. Este descubrimiento era así suficiente para asegurar la certeza del teorema general, con una alta probabilidad.

Davis, P.J., Proof, Completeness, Transcendentals, and Sampling
Journal of the Association for Computing Machinery 24, (1977)298-310

16-31 de enero de 2008

431. Sea ABC un triángulo isósceles, en A, con la base a, fija, y $b = c$ variable. Sean r, R, el radio del círculo inscrito y circunscrito, respectivamente, y h_a, la altura correspondiente al lado a. Calcular los siguientes límites cuando b tiende a, es decir, cuando el triángulo isósceles tiende a equilátero:

(a) $\displaystyle\lim_{b\to a} \frac{R-2r}{(b-a)^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{b\to a} \frac{2h_a-\sqrt{3}a}{b-a}$.

Romero, J.B., Comunicación personal (2008)

432. En un triángulo ABC se traza la mediana AM relativa a BC (M en BC); además la medida de los ángulos $\angle BAM = \angle MCA = 2X$ y $\angle ABM = 7X$. Halle X".

Ubaldo, Luis, Triángulos II

433. Demostrar la veracidad de las siguientes proposiciones:

(a) En todo triángulo ABC se verifica la desigualdad

$$\cos A \cos B \cos C \leq (1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)$$

(b) En todo triángulo acutángulo ABC se verifica la desigualdad

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$$

Vicario, V., Comunicación personal (2007)
Tevita, M., American Mathematical Monthly (2006)406, problema 11228 (Apartado a)
Laisant, C.A., Geometrie du Triangle, Gauthier - Villars, Paris, (1896)128, cuestión 436.

434. Sea un triángulo rectángulo en A, de hipotenusa a, catetos b y c, semiperímetro p y área S.

1. Calcular los catetos en función de la hipotenusa y el área.
2. Demostrar geométricamente que si los ángulos agudos son de $15°$ y $75°$, el producto de los catetos es equivalente al cuadrado de la mitad de la hipotenusa.
3. Hallar los ángulos sabiendo que $2p = \left(1+\sqrt{2}\right) a$.
4. Sea M el punto medio de la altura por A. Se traza por M una recta DE cuyo punto medio es M, y está limitada por los catetos. Se pide el valor de los ángulos en E y D en función de los del triángulo.
5. Trazada la perpendicular por A a esta recta DE, determinar la distancia OP siendo P el punto de intersección de dicha perpendicular con la hipotenusa y O el punto medio de la hipotenusa.

Pedret, J. M., Comunicación personal (2007)

1-14 de febrero de 2008

435. Se tiene un triángulo inscrito en una circunferencia de centro O (O interior al triángulo); luego se trazan segmentos desde el punto medio de los lados a la circunferencia perpendicularmente a los lados, llamados sagitas o flechas. Se pide calcular el Área del triángulo inscrito en función de u, v y w , siendo u, v y w las medidas respectivas de las flechas o sagitas.

Ubaldo L., Seminario de areas de figuras geométricas Academia pre-universitaria, Huaraz-Ancash-PERÚ (2007)

436. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que $A \geq 90°$, $A' \geq 90°$, y de lados a, b, c y a', b', c', respectivamente. Demostrar que :

$$\frac{a'}{b'+c'} + \frac{a}{b+c} \geq \sqrt{2}$$

¿ Cuándo se alcanza la igualdad ?

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

437. Sea dado un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el plano. Demostrar o refutar la existencia de un punto P en su interior de manera que las áreas de cada uno de los triángulos APB, BPC, CPD, DPA sean todas iguales entre sí.

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

438. Demostrar que si la altura y la mediana desde el mismo vértice de un triángulo no isósceles son interiores al triángulo y forman ángulos iguales con sus lados cercanos, entonces es un triángulo rectángulo.

Gusev, V. Litvinenko, V y Mordovich, A., Solving problem in Geometry, Mir, Moscú (1988)

15-28 de febrero de 2008

439. Sea ABC un triángulo isósceles con la base variable c, y, lados iguales $a = b$. Sean R, r, los radios del círculo circunscrito e inscrito, respectivamente; denotamos por h_b, w_b, m_b, la altura, la bisectriz, la mediana del lado b, respectivamente. Calcular

(a) $\lim\limits_{c \to a} \dfrac{R - 2r}{w_b - h_b}$.

(b) $\lim\limits_{c \to a} \dfrac{R - 2r}{m_b - w_b}$.

(c) $\lim\limits_{c \to a} \dfrac{R - 2r}{m_b - h_b}$.

Nota. El límite se toma cuando los triángulos isósceles tienden a ser equiláteros.

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

440. Sea ABC un triángulo y G su baricentro. Denotamos por G_a, G_b, G_c las distancias desde G a los lados a, b, c del triángulo, respectivamente. Demostrar que

$$G_a + G_b + G_c \geq 3r$$

donde r es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo, y caracterizar cuándo se da la igualdad.

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

441. Dado un triángulo cualquiera, dividirlo en dos partes de igual área.

(i) por medio de una recta paralela a uno de los lados.

(ii) por medio de una recta de dirección d determinada.

(iii) por medio de una recta perpendicular a uno de sus lados.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2008)

1-15 de marzo de 2008

442. Se tiene un triángulo escaleno de lados: a, b, c y se pide demostrares

$$S < \frac{\sqrt{abc(a + b + c)}}{4}$$

donde S es el área del triángulo.

Cipriano, A., Comunicación personal (2008)

443. Dadas dos fracciones hallar su producto.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2008)

444. Sea un triángulo ABC. Hallar la probabilidad de que escogido al azar un punto en su interior, dicho punto diste menos de alguno de los vértices del triángulo que del incentro I del mismo. Expresar el resultado exclusivamente en función de razones trigonométricas de los ángulos del triángulo.

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

445. Si el lado a de un triángulo ABC es igual al cociente de la suma de los cuadrados de los otros dos lados por la suma de estos lados, la recta KI que une el punto de Lemoine al centro del círculo inscrito, es paralela a aquel lado e igual a

$$\frac{abc(b-c)}{2p\,(b^2+c^2)}$$

siendo p el semiperímetro.

De Alba, L., Revista Trimestral de Matemáticas , Año I, (1901)139-142, número 4, Problema 375.

446. D, E y F son los puntos medios de los lados BC, CA y AB de un triángulo. Una recta cualquiera que pase por A corta a las rectas DE y DF en G y H. Demostrar que CG es paralela a BH.

M.N., Wernick,W., Problems & Solutions in Euclidean Geometry
Dover Publications, Inc, New York. (1968)59, problema 43.

16-31 de marzo de 2008

447. Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas de un triángulo acutángulo. Demostrar que los pies de las perpendiculares trazadas por C_1 a los segmentos AC, BC, AA_1 y BB_1 están alineados.

Excalibur Vol 12, n 2 (2007)

448. Sea $A'B'C'$ el triángulo formado con los puntos medios del triángulo dado ABC. Denotamos por O_i, G_i, X_i, $i = 1, 2, 3$, los circuncentros, baricentros y ortocentros de los triángulos $AB'C'$, $BC'A'$ y $CA'B'$, respectivamente. Probar que :

(a) Los triángulos $O_1O_2O_3$, $G_1G_2G_3$, y $X_1X_2X_3$ son congruentes al $A'B'C'$.

(b) Si T es el ortocentro del triángulo $O_1O_2O_3$, entonces T el centro de todos los rectángulos $B'C'X_2X_3$, $C'A'X_3X_1$ y $A'B'X_1X_2$.

(c) Sean A_2, B_1 las proyecciones ortogonales de A', B', respectivamente, sobre AB; sean B_3, C_2 las proyecciones ortogonales de B', C', respectivamente, sobre BC; sean A_3, C_1, las proyecciones ortogonales de A', C', respectivamente, sobre AC. Llamemos Q_1, Q_2, Q_3 a los centros de los rectángulos $B'C'C_2B_3$, $C'A'A_3C_1$ y $A'B'B_1A_2$, respectivamente, y llamemos S_1, S_2, S_3 a los puntos de intersección $S_1 = A_2C_2 \cap A_3B_3$, $S_2 = B_1C_1 \cap B_3A_3$ y $S_3 = C_1B_1 \cap C_2A_2$. Demostrar que los triángulos $Q_1Q_2Q_3$ y $S_1S_2S_3$ son semejantes por homotecia, de la que se calculará su centro y razón.

(d) $B_1C_1 = 2 \cdot Q_3Q_2$, $A_2C_2 = 2 \cdot Q_3Q_1$, $A_3B_3 = 2 \cdot Q_2Q_1$.

Romero, J.B., Comunicación personal (2007)

449. En el plano de una circunferencia de centro O y radio r, se dan dos puntos cualesquiera A y P. Trazar por P una secante que corta a la circunferencia en B y C de forma que el triángulo ABC sea rectángulo.

Sokolowsky, D., Crux Mathematicorum 32(1988)188
Honsberger, R., From Erdős to Kiev (1996)147

con la solución de George Tsintsifas (Tessaloniki, Greece).

450. Sea un triángulo ABC, con la notación habitual (Δ = área deABC)

(a) Demostrar la igualdad:

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$

(b) Sea P uno de los puntos de Brocard del triángulo ABC, es decir, un punto interior al mismo tal que $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \Omega$, donde Ω es el ángulo de Brocard. Admitiendo la existencia del punto P demostrar que $\Omega \leq 30°$.

Vicario, V., Comunicación personal (2007)

1-15 de abril de 2008

451. Sean dos triángulos ABC y $A'B'C'$ y construimos los triángulos DEF y $D'E'F'$, circunscritos respectivamente a ABC y $A'B'C'$, y tales que los lados de DEF ($D'E'F'$) sean paralelos a los lados respectivos de $A'B'C'$ (ABC). Si designamos por t, t', T, T' las áreas de ABC, $A'B'C'$, DEF, $D'E'F'$, demostrar que $t/t' = T/T'$.

Sur les triangles inscrits dans un triangle donné, A propos d'un article de M.E. Feldhein, en la revista L´Ensegignement mathématique, t. 37(1938)329-335

452. Sea un triángulo ABC. Sea M_1 el punto medio de BC. Sea P un punto interior de ABC. Demostrar que $AP + PM_1 \geq AM_1$.

Sandor, J., On the geometry of Equilateral triangles. Forum Geometricorum 5(2005)107-117

453. Sea un triángulo equilátero ABC. Se escoge al azar un punto P en su interior. Hallar la probabilidad de que el triángulo de Pompeiu de lados PA, PB, PC, así formado:

(a) Sea obtusángulo.

(b) Tenga área menor que la cuarta parte del área del triángulo equilátero original.

Vicario, V., Comunicación personal (2008)

454. En un triángulo dado ABC, inscribir otro triángulo congruente a un triángulo dado MNP[25]

Propuesta de J. M. Pedret, Ingeniero Naval. Esplugues de Llobregat (Barcelona), noviembre de 2007

455. Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas de un triángulo acutángulo. Demostrar que los pies de las perpendiculares trazadas por C_1 a los segmentos AC, BC, AA_1 y BB_1 están alineados. C_1 es el punto que determina la recta de Miquel BHB_1 (*The Miquel line* If point P lies on the circumcircle of triangle ABC and perpendiculars from it are dropped onto the sides of ABC, then the pedal triangle degenerates into a straight line, the so-called *Simson line*. In general, if point P lies on the circumcircle of triangle ABC and lines from it are drawn to the sides of ABC (suitably extended if necessary) to form fixed angles q with the sides, then the Miquel triangle degenerates into a straight line, which we shall call the Miquel line.) según el triángulo AA_1C. (Profundización del problema 447 de esta revista)

Ayme, J.L., Comunicación personal (2008)

[25] Proponemos su resolución por un método diferente a los presentados, el **método del problema contrario**. En lugar de inscribir el triángulo dado MNP en el ABC, procedamos de modo contrario, es decir: Circunscribir a un triángulo dado MNP un triángulo congruente con otro triángulo dado ABC.

Cita: De Villiers M. From nested Miquel triangles to Miquel distances, Math Gazette, (2002)390-395.

In memoriam. Dedicado a Juan Carlos Salazar, colaborador y amigo. Descanse en paz.

Dedicado a Milagros.

456. En el triángulo ABC, D es un punto interior tal que: $\angle ABD = 10°$, $\angle CBD = 70°$, $\angle ACD = 20°$, $\angle BCD = 40°$. Probar que AD es perpendicular a BC.

Salazar, J.C., Comunicación personal (2004)

Dedicado a Juan Carlos Salazar por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

457. Hallar la relación que deben verificar los catetos del tríangulo ABC, rectángulo en A, para que al construir el triángulo ABC' simétrico con respecto al lado AB, el triángulo ACB' con B' simétrico de B, respecto al punto medio de AC, los triángulos $C'B'B$ y $GB'C'$, sean semejantes al triángulo ABC siendo G el baricentro de este último triángulo.

Romero, J.B., Comunicación personal (2008)

16-30 de abril de 2008

458. Consideramos un triángulo ABC y un punto cualquiera P. Sea $A'B'C'$ el triángulo ceviano de P. Consideramos los baricentros de los triángulos PBA', PCA', PCB', PAB', PAC', PBC'.

(1) Demostrar que los seis baricentros están en una misma cónica si y solo si el punto P está sobre una de las medianas.

(2) Construir con regla y compás dos puntos sobre la mediana correspondiente al vértice A para los que la cónica resulta ser una parábola.

García, J.F., Comunicación personal (2008)

459. **Una demostración distinta del teorema de Menelao.** Supondremos que los segmentos son orientados, al igual que las áreas.

(i) Si A, B, C son tres puntos alineados cualesquiera; demostrar que las longitudes de los segmentos BC, CA, AB cumplen la siguiente relación:

$$BC + CA + AB = 0.$$

(ii) Si A, B, C, D son cuatro puntos alineados cualesquiera; demostrar que las longitudes de los seis segmentos que se forman cumplen la siguiente relación:

$$BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0.$$

(iii) Si A, B, C son tres puntos alineados cualesquiera y r una línea recta arbitraria; demostrar que

$$m \cdot BC + n \cdot CA + p \cdot AB = 0,$$

donde m, n, p son las distancias respectivas de A, B, C a la recta r.

(iv) Si A, B, C son tres puntos alineados cualesquiera y U, V dos puntos coplanarios con los tres primeros; demostrar que

$$[AUV] \cdot BC + [BUV] \cdot CA + [CUV] \cdot AB = 0.$$

donde $[XYZ]$ representa el área del triángulo XYZ.

(v) Dado un triángulo ABC, tomamos tres puntos D, E, F sobre los lados BC, CA, AB respectivamente; demostrar que entre las áreas de los triángulos DEF y ABC se cumple la siguiente relación

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{BD \cdot CE \cdot AF - CD \cdot AE \cdot BF}{BC \cdot CA \cdot AB}$$

(el signo menos entre AF y CD es advertido por el proponente el día 27 de abril).

(vi) Deducir el Teorema de Menelao y su recíproco.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2008)

460. Caracterizar a todos los triángulos de lados a, b, y, c, alturas h_a, h_b, h_c, respectivamente, y con $a = m + n$, siendo m, y n, las proyecciones ortogonales de los lados b y c, sobre a, respectivamente, y verificando:

$$n(h_c - b) = m(h_b - c)$$

Romero, J. B., Comunicación personal (2006)

461. En un triángulo rectángulo ABC, el cateto AB es constante de longitud c, siendo el otro cateto AC de longitud variable b. En la circunferencia circunscrita al triángulo, sea Λ el área del menor de los segmentos circulares determinados por el cateto AC. Hallar .

$$\lim_{b \to 0} \frac{\Lambda}{b^3}$$

Vicente, V., Comunicación personal (2008)

462. Consideremos un triángulo ABC de área 5. Para cada punto P de AB más cercano de A que de B, consideremos Q de AC, R de BC y S de AB tal que PQ sea paralela a BC, QR a AB y RS a AC. Determinar el valor máximo obtenido por el área del cuadrilátero $PQRS$.

Revista do professor de matemática 47(2001)

1-15 de mayo de 2008

463. Sea ABC un triángulo cualquiera. Sea $A_wB_wC_w$ un triángulo variable e inscrito en ABC con A_w sobre BC, B_w sobre CA y C_w sobre AB.

(1) Demostrar que los círculos circunscritos a los triángulos AB_wC_w, A_wBC_w, A_wB_wC tienen un punto común W.

(2) Demostrar que para que W sea fijo, los distintos triángulos $A_wB_wC_w$ deben ser semejantes entre sí. Supongamos que los triángulos $A_wB_wC_w$ varían permaneciendo semejantes al triángulo original ABC de forma que la semejanza sea directa y el homólogo de A se desplace sobre AB ($A \to C_w$, $B \to A_w$, $C \to B_w$).

(3) Demostrar que W es el centro de semejanza entre ABC y $A_wB_wC_w$.

(4) Demostrar la identidad de los ángulos $\angle WAB$, $\angle WBC$ y $\angle WCA$. En esta situación, llamamos A' al punto de intersección de BW con la mediatriz de BC, B' al punto de intersección de CW con la mediatriz de CA y C' al punto de intersección de AW con la mediatriz de AB.

(5) Demostrar que ABC y $A'B'C'$ están en perspectiva.

(6) Demostrar que si por los vértices del triángulo ABC trazamos paralelas a los lados de $A'B'C'$, esas rectas son concurrentes en el círculo circunscrito. Análogamente, demostrar que las perpendiculares por los vértices de ABC a los lados de $A'B'C'$ también son concurrentes sobre el círculo circunscrito. Demostrar que estos dos puntos de concurrencia son diametralmente opuestos.

(7) Demostrar que W y el circuncentro O del triángulo ABC son concíclicos con A', B' y C'.

(8) Demostrar que $A'B'C'$ es inversamente semejante al triángulo ABC. Hallar la razón de esta semejanza inversa.

(9) Demostrar que el punto simediano K del triángulo ABC es concíclico con A', B' y C'. Demostrar que K es diametralmente opuesto a O en el círculo circunscrito a $A'B'C'$.

Pedret, J.M., Comunicación personal (2008)

464. ABC es un triángulo en el que $BC = 2 \cdot AB$. Sean D el punto medio de BC, y E el punto medio de BD. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo $\angle CAE$.

Aref, M.N., Wernick,W., Problems & Solutions in Euclidean Geometry
Dover Publications, Inc, New York (1968)4

16-31 de mayo de 2008

465. Un triángulo rectángulo tiene de catetos 12 cm y 5 cm. Con centro en B se traza un arco de circunferencia de radio $BC = 5$ cm, que corta a la hipotenusa en N. Análogamente con centro en A y radio $AC = 12$ cm se traza un arco que corta a la hipotenusa en M. Halla la longitud del segemento MN.

Berenguer, L. y otros, Problemas propuestos en los 10 años de la olimpíada matemática Thales (1995)
Proyecto Sur de Ediciones, Granada, VIII Olimpiada matemática Thales.

466. En un triángulo rectángulo se conocen el perímetro $2p$ y la altura h correspondiente al ángulo recto y se pide obtener en función de p y h:

(1) Los tres lados del triángulo y su área.

(2) Condición para que el problema sea posible.

(3) Los radios del círculo inscrito y del círculo ex-inscrito correspondiente al ángulo recto.

(4) La distancia entre los centros de ambos círculos.

(5) Construcción geométrica del triángulo dados p y h. (Para ello conviene usar el círculo ex-inscrito indicado)

Matemática Elemental, Tomo II, N.1(1933), propuesto en la ETSI de Caminos(1931)14, N.39.

467. Sea un triángulo ABC. Consideremos los volúmenes de revolución $V_aV_bV_c$ obtenidos al hacer girar el triángulo alrededor de sus lados a, b, c respectivamente. Si $V_T = V_a + V_b + V_c$ demostrar o refutar si, $V_T < 3 \cdot V_E$ donde V_E es el volumen de la esfera cuyo radio es el mismo que el de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Vicario, V., Comunicación personal (2008)

1-15 de junio de 2008

468. Sea ABC un triángulo de área S. Consideremos los puntos M, N sobre el lado BC, tal que $CN = NM = MB$. Sea M' el punto simétrico de M respecto de A y N' el punto simétrico de N respecto de A. Calcular el área del cuadrilátero $BCM'N'$.

Peiró, R., Comunicación personal (2008)

469. Demostrar la fórmula:

$$r_a \cdot \cos A + r_b \cdot \cos B + r_c \cdot \cos C = \frac{p^2 - 4R^2 - Rr}{R}$$

donde p, R, r, r_a, r_b, r_c, son el semiperímetro, radio del círculo circunscrito, radio del círculo inscrito, radios de los círculos exinscritos, al triángulo ABC, respectivamente.

Lemoine, E., El Progreso Matemático, 2(1900), II, página 336
Lemoine, E., Revista Trimestral de Matemáticas Año II, N.8(1902)192

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

470. Dados los radios r_a, r_b, r_c de las circunferencias exinscritas al triángulo ABC, determinar las longitudes de los lados a, b, c del mismo en función exclusivamente de los radios anteriores.

Vicario, V., Comunicación personal (2008)

471. Sean ABC un triángulo e I su incentro. Construir la cónica que pasa por A, B y C siendo tangente en B y C a las bisectrices BI y CI. Demostrar que esta cónica es siempre una hipérbola. Demostrar que la polar trilineal de cualquier punto P sobre ella pasa por el excentro correspondiente a A, y que si XYZ es el triángulo ceviano de P entonces Y, Z e I siempre están alineados.

Polar trilineal. Sean ABC es un triángulo y P un punto de su plano. Si las rectas AX, BY, CZ cortan a los lados BC, CA, AB en los puntos X, Y, Z, es decir, si XYZ es el triángulo ceviano de P respecto de ABC, entonces, por el teorema de Desargues, los puntos de intersección

$$X' = BC \cap YZ, \quad Y' = CA \cap ZX, \quad Z' = AB \cap XY$$

están alineados. La recta que los contiene se llama polar trilineal del punto P respecto del triángulo ABC.

Propuesto por Francisco Javier García Capitán , profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

472. Si p, R, r, son el semiperímetro, el radio del círculo circunscrito, el radio del círculo inscrito, respectivamente a un triángulo, entonces se verifica :

$$p^2 \geq 14Rr - r^2$$

Laisant, C.A., Geometrie du Triangle, Gauthier-Villars, Paris, (1896)128, cuestión 436
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

16-30 de junio de 2008

473. Dado un triángulo equilátero ABC, encontrar la transversal PQR con P sobre la recta BC, Q sobre la recta CA, y R sobre la recta AB tal que $BP = CQ = AR$.

Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7

474. ¿Puede colocarse un triángulo regular de lado 4cm en un cuadrado de lado 3 cm?

Pogorélov, A. V. (1974) Geometría elemental. Editorial Mir. Moscú. (1974)119

475. Sea ABC un triángulo. Probar o refutar si la condición necesaria y suficiente para que dicho triángulo sea equilátero, es que se anule el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} h_a & m_a & w_a \\ h_b & m_b & w_b \\ h_c & m_c & w_c \end{vmatrix}$$

donnde h_a, m_a, w_a are la altura, la mediana y la bisectriz interior que parten del vértice A del triángulo ABC, respectivamente. Análogamente se definen los demás términos del determinante respecto de los otros vértices.

Vicario, V., Comunicación personal (2008)

Edición veraniega del 1 de julio de 2008 al 31 de agosto de 2008

476. Dado un triángulo ABC y P un punto de su plano; llamamos A_1 a la proyección ortogonal de P sobre BC, B_1 a la proyección ortogonal de P sobre CA y C_1 a la proyección ortogonal de C_1 sobre AB. Sea el lugar geométrico de los puntos P tales que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 son concurrentes; se pide:

(1) Caracterizar el lugar Σ como una curva algebraica de orden n y determinar n.

(2) Demostrar que el lugar Σ tiene al circuncentro O como centro de simetría.

(3) Demostrar que los vértices del triángulo A, B, C, el incentro I, los ex-incentros I_a, I_b, I_c, el circuncentro O y el ortocentro H pertenecen al lugar ?.

(4) Hallar una ecuación del lugar.

(5) Demostrar que si P es un punto del lugar Σ,entonces P_i el conjugado isogonal de P también es de la curva.

(6) Demostrar que si P es un punto del lugar Σ, todas las rectas PP_i pasan por un punto fijo que se determinará.

(7) ¿Cómo cambia el lugar ? en el caso de que ABC sea un triángulo isósceles?

Propuesto por J.M. Pedret, Ingeniero Naval, Esplugues de Llobregat, Barcelona[26]

[26] El profesor Vicente Vicario señala que partes del enunciado del problema 476 se pueden encontrar en Guzmán, M. de (2002): *La Experiencia De Descubrir En Geometría* Ed. Nivola, Madrid Cap. 2 pág 33. El proponente señala que otras referenias de algunas partes del problema son: http://mathworld.wolfram.com/DarbouxCubic.html, Some cubic curves associated with a triangle, Henry Martyn Cundy and Cyril Frederick Parry Vol. 53 (1995) p. 53

477. Sean r el radio de la circunferencia inscrita, r_a, r_b, r_c radios de las circunferencias exinscritas, p el semiperímetro del triángulo ABC. Probar que:

(a) $r_a + r_b = \dfrac{pc}{r_c}$;

(b) $bc = rr_a + r_b r_c$;

(c) $r_b r_c - rr_a = bc \cos A$;

(d) $a(b+c) = (r + r_a)(r_b + r_c)$;

(e) $a(b-c) = (r_a - r)(r_b - r_c)$

E. Lemoine, Téorèmes et resultats de la géométrie del triangle (1900)103, problemas 6, 23, 25, 22.

478. Sea ABC un triángulo donde el mayor de sus ángulos no supera $120°$ y sea Δ el área del mismo.

(a) Hallar el valor mínimo, exclusivamente en función de los lados a, b, c del triángulo, de la suma $AP + BP + CP$, siendo P un punto interior al mismo.

(b) Demostrar la desigualdad
$$(AP + BP + CP)_{\text{minima}} \geq 2\sqrt[4]{3}\sqrt{\Delta}$$

Vicario, V., Comunicación personal (2008)

479. Construir un triángulo ABC conociendo la altura BD y los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABD y CBD.

Alexandroff, I., Problemas de geometría elemental agrupados según los métodos a emplear para su resolución (1899)22, traducido del ruso al francés, según la sexta edición por D. Aitoff, París)

480. Sean un triángulo ABC , $M_aM_bM_c$ su triángulo medial y $M'_aM'_bM'_c$ el triángulo medial de éste. Si G es el baricentro de ABC , consideremos la homología h_A de centro en A, eje la paralela por G a BC y tal que M_a es el homóogo de M'_a. Anáogamente se definen, ciclícamente, las homologías h_B y h_C.
Tomemos un punto arbitrario X en el plano y definimos los puntos $U = h_A(X)$, $Y = h_B(U)$, $Z = h_C(U)$, X' el punto de intersección de la recta GX con la paralela por U a BC, Y' el punto de intersección de la recta GY con la paralela por U a CA y Z' el punto de intersección de la recta GZ con la paralela por U a AB.
Establecer que los siete puntos U, X, Y, Z, X', Y' y Z' están en una misma cónica G_a. Demostrar que para cualquier triángulo $A'B'C'$ tal que A' divide BC en la misma proporción que B' a CA y C' a AB, es perspectivo con $X'Y'Z'$ y su centro de perspectividad está en la cónica G_a. [27]

Rideau, F., Comunicación personal (2008)

[27]Nueva Redacción por el profesor Ángel Montesdeoca Delgado, del Departamento de Matemática Fundamental, Sección de Geometría y Topología, Universidad de La Laguna

0.9 Curso 2008

1-15 de Setiembre de 2008

481. Sea un triángulo ABC de ángulos $\angle BAC = 20°$, $\angle ABC = 120°$. Sea D un punto interior tal que $\angle BDC = 50°$, $\angle BAD = 10°$. Hallar $\angle ABD$.

Rodríguez, W., Comunicación personal (2008)

16-30 de setiembre de 2008

482. Demostrar que a partir de la fórmula (teorema) de Herón para el área de un triángulo se pueden deducir como corolarios el teorema de Pitágoras y su recíproco.

Vicario, V., Comunicación personal (2008)

Nota. Existen demostraciones geométricas del teorema de Herón que no recurren en su demostración, ni al teorema de Pitágoras, ni a su teorema recíproco. Tales son, por ejemplo, la propia demostración de Herón de la proposición I.8 de su Metrica o la demostración de Euler en su artículo Variae demonstrationes geometricae de 1767. Por tanto, no se produce ningún círculo vicioso en este razonamiento. No son válidas en este sentido las demostraciones trigonométricas de la fórmula de Herón que llevan implícita en su trigonometría la relación pitagórica fundamental.

1-15 de Octubre de 2008

483. En el triángulo rectángulo ABC (con el ángulo recto en C), se traza CD perpendicular a AB, y también CE, CF, BM y AN, bisectrices de los ángulos ACD, BCD, ABC y CAB respectivamente. Demostrar que :

(a) La bisectriz del ángulo B es perpendicular a CE, y la bisectriz del ángulo A es perpendicular a CF. Además, CE es bisecado por la bisectriz del ángulo B (en un punto a), y CF es bisecado por la bisectriz del ángulo A (en un punto b), y consecuentemente ab es paralela a AB e igual a $\frac{1}{2}EF$.

(b) Las bisectrices CF y CE cortan a la hipotenusa AB en segmentos AF y BE que son iguales a los lados AC y BC respectivamente.

(c) El inradio de ABC es $\frac{1}{2}EF = ab$.

(d) c y d son los incentros de ADC y BDC. $r = \frac{cd}{\sqrt{2}}$, es decir, r es el lado del cuadrado cuya diagonal es cd.

(e) La recta de los incentros de los triángulos ADC y BDC es perpendicular a la bisectriz de C, es decir, cd es perpendicular a CG.

(f) c y d equidistan de la proyección del incentro de ABC a AB.

(g) Todas las proposiciones anteriores son lógicamente equivalentes

(h) ¿Cualquiera de ellas caracterizan de forman unívoca a los triángulos rectángulos?.Esto es, en cualquier otro triangulo no rectángulo se tendrán que las igualdades dadas aquí, se convertirán en una desigualdad para un lado u otro según el tipo de triángulo que estemos considerando : acutángulo u obtusángulo

Babbit, A., American Mathematical Monthly (1918)347-348
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

16-31 de Octubre de 2008

484. Sea S el área del triángulo y S_n el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita. Es:

$$S = S_n \frac{2R}{r}$$

Alasia, C., La recente geometría del triangolo, Cittá di Castello, (1900)339, n.564

485. Si los puntos que dividen cada lado de un triángulo en tres partes iguales se unen al correspondiente vértice opuesto, se forma un hexágono cuya área es la décima parte del área del triángulo.

Cuoco, A. Goldenberg, P.and Mark, J., Reader Reflections. Marion´s Theorem
The Matematics Teacher, (1993)86(8). Kennedy response (p. 619)

1-15 de noviembre de 2008

486. Sean dos triángulos ABC y DEF tales que AB es perpendicular a EF y CA es perpendicular a FD, y BC es perpendicular a DE. Demostrar que los triángulos ABC y DEF son semejantes.

XI Olimpiada de Yucatán. 1997

487. Sea ABC un triángulo en el que ninguno de sus ángulos supera $120°$. Sea G su baricentro y F su punto de Fermat (punto interior al triángulo cuya suma de distancias a los vértices es mínima). Demostrar que se cumplen las siguientes relaciones entre la distancia FG entre el Baricentro y el punto de Fermat, siendo Δ el área del triángulo:

(a) $$FG^2 = \frac{1}{18} \cdot \left[a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\Delta\right]$$

(b) $$FG \geq \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \min\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\}$$

Vicario, V. (2008) Comunicación personal.

16-30 de noviembre de 2008

488. Se escoge un punto arbitrario P en el interior de la altura AD de un triángulo ABC. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F, respectivamente. Demostrar que $\angle PDF = \angle PDE$. ¿Qué sucede si P está fuera del triángulo o la altura AD es exterior al triángulo?[28]

Haruki (1980) Ontario Secondary School Mathematics Bulletin
Romero, J.B. (2008): Comunicación personal

489. En un triángulo sea r el radio del círculo inscrito, R el radio del círculo circunscrito y H la altura mayor. Demostrar o refutar la siguiente desigualdad: $r + R \leq H$.

Propuesto por P. Erdös en The American Mathematical Monthly, vol 50 (1943)124 y vol 51(1944)234-236
Polya, G., How to solve it, (1965)

[28] Ver problema 71 de trianguloscabri.

1-15 de diciembre de 2008

490. Los circuncentros de los cuatro triángulos que construyen cuatro rectas son concíclicos y los ortocentros están alineados.[29]

http://www.partnership.mmu.ac.uk/cme/Geometry/TriangleGeometry/MiquelCircles/GaussBod.html

491. Probar o refutar si en todo triángulo ABC, al menos uno de los radios de las circunferencias exinscritas r_a, r_b, r_c es mayor o igual que una de sus bisectrices interiores w_a, w_b, w_c.

Vicario, V., Comunicación personal (2008)

16 de diciembre de 2008 - 15 de enero de 2009

Homenaje a dos matemáticos españoles.

492. Construir un triángulo dado el perímetro $2p$, un ángulo B y el radio r' del círculo inscrito.

J. Rey Pastor y P. Puig Adam Madrid, Metodología y didáctica de la matemática elemental : para uso de los alumnos de Escuelas Normales y aspirantes al profesorado de 1a y 2a enseñanza, (1933)83-84

16-31 de enero de 2009

493. Hallar el área del único triangulo escaleno (modulo rotaciones) formado desde los tres vértices de un heptágono regular, teniendo los ángulos $\pi/7$, $2\pi/7$, y $4\pi/7$, respectivamente, inscrito en una circunferencia de radio R.

Matemática Elemental, Tomo I, N.2, Enero (1932)28
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

494. Construir un triángulo ABC del que conocemos los vértices A', B', C' de los triángulos equiláteros BCA', CAB', ABC' hacia el exterior.

Yaglom , I.M., Geometric transformations, M.A.A. (1973)12

1-15 de febrero de 2009

495. Sea un triángulo ABC, Δ su área, m_a, m_b, m_c las longitudes de sus medianas y w_a, w_b. w_c las longitudes de sus bisectrices interiores. Demostrar las siguientes desigualdades:

(a) $m_am_b + m_bm_c + m_cm_a \geq 3\sqrt{3} \cdot \Delta$

(b) $m_aw_a + m_bw_b + m_cw_c \geq 3\sqrt{3} \cdot \Delta$

Vicario, V. (2008): Comunicación personal.

496. En un triángulo ABC, la mediana AM interseca a la bisectriz interior BN en P. Sea Q el punto de intersección de CP y AB. Demostrar que el triángulo BNQ es isósceles.

Propuesto por T. Andreescu, University of Texas at Dallas
Mathematical Reflections 2(2007), problem J43)

---

[29] Dados un triángulo y una recta, ésta forma con cada par de lados de aquél otros tres triángulos, entonces los cuatro circuncentros son cocíclicos y los cuatro ortocentros están alineados. (Aclaracion del comité editorial)

15-28 de febrero de 2009

497. Sea ABC un triángulo y G su circunferencia circunscrita. Sean C_0 el punto medio del arco AB, B_0 el punto medio del arco CA y A_0 el punto medio del arco BC. Demuestra que el incentro del triángulo ABC es el ortocentro del $A_0B_0C_0$.

XI Olimpiada de Yucatán. 1997

498. El triángulo isósceles ABC tiene un ángulo recto en C. Sea P un punto arbitrario del lado BC y sea G la proyección ortogonal del punto C sobre AP. Sea H el punto de AP tal que $AH = CG$. Sea A' el punto medio de AB. Hallar el valor del ángulo $\angle GA'H$.

Komal marzo 2007, B 3991

1-15 de marzo de 2009

499. En un triángulo equilátero ABC, una recta tangente a la circunferencia inscrita corta a AB en P y a AC en Q. Sea M el punto medio de BC. Demostrar que

$$[ABC] = 6\frac{[BPM][CQM]}{[BPM] + [CQM]}$$

Propuesto por Milton Favio Donaire Peña, Estudiante de la Universidad Nacional de Ingenieria Lima - Perú. Facultad de ciencias especialidad Física Pura. Asesor del equipo Olímpico del Perú en el curso de Geometría

16-31 de marzo de 2009

500. Sea ABC un triángulo y P, Q dos puntos del plano con triángulos cevianos $P_aP_bP_c$ y $Q_aQ_bQ_c$. Consideramos los puntos de intersección

$$X_a = P_bQ_c \cap PcQb \quad , \quad X_b = P_cQ_a \cap P_aQ_c \quad , \quad X_c = P_aQ_b \cap P_bQ_a,$$
$$U_a = P_bP_c \cap QbQc \quad , \quad U_b = P_cP_a \cap Q_cQ_a \quad , \quad U_c = P_aP_b \cap Q_aQ_b.$$

Demostrar que:

(a) Los puntos X_a, X_b y X_c están todos sobre la recta PQ.

(b) Los puntos X_a, A, U_b y U_c están alineados, y la recta U_bU_c es la polar del punto A respecto de la cónica $ABCPQ$.

(c) Los triángulos ABC y $U_aU_bU_c$ son perspectivos.

(d) El centro de perspectiva de los triángulos ABC y $U_aU_bU_c$ es el punto de intersección de las polares trilineales de los puntos P y Q.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid y Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

1-15 de abril de 2009

501. Probar o refutar las siguientes proposiciones:

(a) En todo triángulo ABC, al menos uno de los radios de las circunferencias exinscritas r_a, r_b, r_c es mayor o igual que una de sus alturas h_a, h_b, h_c y recíprocamente.

(b) En todo triángulo ABC se pueden elegir, al menos, dos radios de las circunferencias exinscritas r_a, r_b, r_c cuyo producto sea mayor o igual que el producto de dos de sus alturas h_a, h_b, h_c.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

502. En un triángulo ABC sean B_1 y C_1 los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos ABC y BCA con AC, AB respectivamente. Sea V la intersección de B_1C_1 con BC. Sea W la intersección de las bisectrices de los ángulos VC_1B y VB_1C. Demostrar que A, V, W están alineados.

Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico A. Einstein, Teramo, Italia

16-30 de abril de 2009

503. Sea ABC un triángulo acutángulo, y AH_a, la altura desde A a BC.(Similares construcciones se harían para los vértices B y C). Sean los puntos B_a y C_a, tomados desde C y B interiormente sobre los lados AC y AB, respectivamente, tales que $CH_a = CB_a$, y $BH_a = BC_a$. Construimos los puntos D_a y E_a, sobre BC, tales que los triángulos CB_aD_a, y BC_aE_a sean rectángulos en B_a y C_a, respectivamente. Si definimos los puntos $F_a = B_aD_a \cap AB$, y $G_a = C_aE_a \cap AC$, y similares puntos para los otros vértices B y C. Probar que :

(a) $B_aD_a = C_aE_a = AH_a$ (vértice A) ; $C_bE_b = A_bD_b = BH_b$ (vértice B); $A_cE_c = B_cD_c = CH_c$ (vértice C).

(b) Triángulos AB_aC_a y AF_aG_a, son semejantes, y hallar los elementos de la semejanza.

(c) Si $O_aP_aQ_a$ es el triángulos formado por $O_a = B_aD_a \cap C_aE_a$, $P_a = B_aD_a \cap AH_a$, $Q_a = C_aE_a \cap AH_a$, es semejante al triángulo ABC.

(d) Los puntos $O_a = B_aD_a \cap C_aE_a$, similar para O_b, y O_c, son los ortocentros de cada uno de los triángulos AF_aG_a, BF_bG_b y CF_cG_c, respectivamente.

(e) ¿ Qué relación geométrica tiene el triángulo $O_aO_bO_c$ con el triángulo ABC?. Es decir, ¿son semejantes?

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

504. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

(a) Demuestre que OA es perpendicular a PQ.

(b) Si M es el punto medio de BC, pruebe que $AP^2 = 2 \cdot AD \cdot OM$.

Herbert, J., Revista de Matemática de La Universidad del Zulia Facultad de Ciencias, Vol 8,1(2000)

1-15 de mayo de 2009

505. Dado un triángulo ABC y un punto X sobre la recta BC,

(a) Inscribir una parábola en los lados del triángulo de manera que X sea el punto de tangencia con la recta BC.

(b) Demostrar que si Y, Z son los puntos de tangencia con los lados CA, AB y X', Y', Z' son los simétricos de X, Y, Z respecto de los puntos medios de BC, CA, AB entonces las rectas AX', BY', CZ' son paralelas al eje de la parábola.

(c) Las rectas isogonales de AX', BY', CZ', es decir las rectas simétricas de estas rectas respecto de las bisectrices interiores AI, BI y CI, son concurrentes en el foco de la parábola.

Garcia, F.J., Comunicación personal(2009)

506. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea P un punto interior al mismo y $\Lambda(P)$ la suma de las distancias de P a sus lados. Siendo G el baricentro del triángulo y O su circuncentro demostrar que:

(a) $\dfrac{2(5R-r)r}{3R} \leq \Lambda(G) \leq \dfrac{2(R+r)^2}{3R}$

(b) $\Lambda(G) \leq \Lambda(O)$

Propuesto por Vicente Vicario García,I.E.S. El Sur, Huelva

507. Construir un triángulo conociendo los segmentos (de las respectivas mediatrices) que unen el circuncentro con los puntos medios de los lados correspondientes.

Jara, F., Comunicación personal (2009)

16-31 de mayo de 2009

508. Sea ABC un triángulo, I su incentro y r el radio de su circunferencia inscrita. Demostrar que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$AI + BI + CI \geq 6r \cdot \sqrt[3]{\sec\frac{A-B}{4} \cdot \sec\frac{B-C}{4} \cdot \sec\frac{C-A}{4}} \geq 6r$$

Propuesto por Vicente Vicario García,I.E.S. El Sur, Huelva

509. Sea ABC un triángulo, y sea M un punto interior, y D_a, E_b y F_c, los pies de las cevianas que pasan por M, y cortan a los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sean los puntos $N_a = CF_c \cap D_aE_b$, y $P_a = BE_b \cap F_cD_a$; prolongamos AP_a y AN_a, hasta que corten a BC en H_a y G_a, respectivamente. Probar que:

$$\frac{G_aC}{D_aG_a} = \frac{CD_a}{D_aB} + 1$$

S. Dattatreya y R. Dattatreya (2000), An interesting ratio result for triangles
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

1-15 de junio de 2009

510. Sean ABC un triángulo, P un punto de su plano, M el punto medio de BC y X un punto del segmento MC.

(a) Hallar el foco de las posibles hipérbolas que pasan por A y P, cuya directriz es la recta BC y cuya excentricidad es la razón $BX : XC$.

(b) Determinar la posición del punto P para que el problema tenga dos soluciones, una o ninguna.

García, F.J., Comunicación personal (2009)

511. Si $0 < c < b < a < b+c$, probar que existe un triángulo cuyos lados tienen las medidas a, b, c tal que

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Linés, E. y Linés, E., Ejercicios de Análisis Matemático, Madrid (1949)53, Problema 41
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

512. Dado un triángulo ABC de lados a, b, c se traza el círculo inscrito; a éste se le tira la tangente paralela al lado $a = BC$ que determina un segundo triángulo AB_1C_1; con éste se reitera el trazado anterior, y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de la sucesión infinita de los círculos inscritos.

Linés, E. y Linés, E., Ejercicios de Análisis Matemático, Madrid (1949)175-176, Problema 125
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

16-30 de junio de 2009

513. Sea ABC un triángulo escaleno y N_a su punto de Nagel. Utilizando la notación habitual en la geometría del triángulo, y suponiendo, (sin pérdida de generalidad) que $b > c$

1. Demostrar que el triángulo de lados AN_a, $b - c$, $2r$, es rectángulo con hipotenusa AN_a;
2. Demostrar, como consecuencia del apartado anterior, que un triángulo ABC es isósceles si y sólo si, una al menos, de las distancias entre los vértices del triángulo y su punto de Nagel, es igual al diámetro de la circunferencia inscrita.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. "El Sur", Huelva

514. Se sabe que la circunferencia circunscrita al triángulo formado por las tres tangentes a la parábola pasa por un punto fijo. ¿Caracteriza esta propiedad a la parábola?.

Gallego-Díaz, J., Nuevos problemas de matemáticas, Editorial Norte y Sur, Madrid (1965)
Propuesto por Saturnino Campo Ruiz, profesor del IES Fray Luis de León, de Salamanca.

515. Dado un círculo de centro O y un punto A (exterior) hallar el polo, polar o polar recíproco del lugar geométrico de los centros de los círculos circunscritos a los infinitos triángulos autopolares de vértice A, con respecto a la homológica de la circunferencia de centro O, en la homología de vértice A, eje polar de A y recta límite de la primera figura la tangente paralela a la polar de A, no comprendida entre este punto y su polar. Polar del punto A respecto a la homológica de la circunferencia.

Puig Adam, P., Geometría Métrica, vol. II, (1986)316, nº 8
Propuesto en los exámenes de ingreso a la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos, curso 1946-1947

Edición veraniega del 1 de julio de 2009 al 31 de agosto de 2009

516. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Tracemos sobre el interior de la hipotenusa $BQ = BA$, y $CP = CA$. Demostrar que $PQ^2 = 2 \cdot BP \cdot QC$.

Bernd, B.C. (1994), Ramanujan's Noteboooks, Part IV. Springer-Verlag

0.10 Curso 2009

1-15 de Setiembre de 2009

517. Eugene Calabi (1923-) encontró en 1997 que además del equilátero, hay otro triángulo en el que se pueden inscribir tres cuadrados que tienen lados iguales. Uno de los cuadrados se apoya en los tres lados y los otros dos cuadrados tienen cada uno tres vértices sobre los lados del triángulo.

Barthe, D., Inscrire un carré. Le triangle (Trois points, c'est tout!) (2005)
Bibliothéque tangente, L'aventure mathematique, Éditions Pole, Paris

Nota del editor. En un triángulo fijo dado se pueden inscribir cuadrados, busquemos el mayor posible de lado v en el triángulo inicial. En el triángulo de Calabi se inscriben tres con lado v.

16-30 de setiembre de 2009

518. Sea ABC un triángulo con ángulo mayor en A, y lados $a \geq b \geq c$. Tracemos sobre el interior del lado mayor BC opuesto al ángulo A, los puntos P y Q tales que $BP = a - b$ y $QC = a - c$.
Sean $h_P = PP'$ y $h_Q = QQ'$ las alturas trazadas desde los vértices P y Q de los triángulos ABP y ACQ y sus pies P' y Q'sobre sus lados opuestos AB y AC respectivamente. Probar que :

(a) $PQ^2 - 2 \cdot BP \cdot QC \underset{\leq}{\overset{\geq}{=}} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A \underset{\geq}{\overset{\leq}{=}} 90°$

(b) $PQ - (h_P + h_Q) \underset{\leq}{\overset{\geq}{=}} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A \underset{\geq}{\overset{\leq}{=}} 90°$

(c) ¿Son (a) y (b) dos caracterizaciones equivalentes de la clase de triángulos según los ángulos?

Romero, J.B., Comunicación personal (2009)

519. Una circunferencia que pasa por el vértice A de un triángulo ABC, interseca el lado AB en P, y el lado AC en Q, con PQ non parallela a BC. Tomamos dos puntos, M sobre PB y N sobre QC tales que

$$PM : MB = QN : NC$$

Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos APQ, AMN, ABC concurren en un punto X distinto de A.

Suppa, E., Comunicación personal (2009)

520. De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa fija a, determinar aquel tal que el ángulo agudo formado por las medianas que parten de los vértices correspondientes a los ángulos agudos del mismo, sea máximo.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

1-15 de Octubre de 2009

521. Sea ABC un triángulo. Sea K el simediano (o punto de Lemoine-Grebe) del mismo. Consideremos las simedianas BK y CK que parten de sus vértices B y C, respectivamente. Demostrar que si estas simedianas son perpendiculares entonces tenemos que:

(a) $a^4 = b^4 - 4b^2c^2 + c^4$.

(b) Uno de los ángulos B ó C es obtuso.

(c) Siendo G el baricentro del triángulo se cumple que $\angle BGC = 90^\circ + \angle A$.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

522. Sea ABC un triángulo acutángulo. Una circunferencia ω es tangente a AB y a AC en P y Q respectivamente, y también es tangente a la circunferencia circunscrita a ABC en un punto S. Demostrar que el punto medio de PQ es el incentro de ABC.

http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=5335

523. En un triángulo ABC, se construye un cuadrado con dos vértices sobre BC, un vértice A_3 sobre AB y otro A_4 sobre AC. Se definen de manera semejante los puntos B_3, B_4 y C_3, C_4. Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos AA_3A_4, BB_3B_4, CC_3C_4 son mutuamente tangentes.

http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=5335

524. Sea ABC un triángulo. Sea N el punto de contacto de la circunferencia inscrita con AC. Sea MN el diámetro perpendicular a AC en la circunferencia inscrita. Sea L la intersección de BM con AC. Demostrar que $AN = LC$.

Soifer,A., Mathematics as Problem Solving, Springer (2009)

16-31 de Octubre de 2009

525. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Demostrar que las circunferencias de diámetros CH y AB son ortogonales.

Alasia, C., La recente geometria del triangolo, problema (1900)293, problema 195
Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico "A. Einstein", Teramo, Italia

526. Sean PA y QA dos segmentos isogonales respecto al ángulo A. Demostrar que las cuatro proyecciones de P y Q sobre AB y AC pertenecen a una circunferencia.

Alasia, C., La recente geometria del triangolo, problema (1900)289, problema 154
Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico "A. Einstein", Teramo, Italia

527. Encontrar un punto en la base de un triángulo dado de forma que desde él se trazan perpendiculares a los lados, la línea que una sus extremos sea paralela a la base. Resolver (1) trigonométricamente, (2) geométricamente.

Carroll, L., Problemas de almohada, Nívola (2005)
Pillow Problems, (traducción de Guillén Rojas, y Jesús Fernández)

1-15 de noviembre de 2009

528. Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo ABC y ω el ángulo de Brocard, demostrar la relaciòn

$$3\cot\omega + \cot(A-\omega) + \cot(B-\omega) + \cot(C-\omega) = (\cot\omega)^3 + \cot(A-\omega)\cot(B-\omega)\cot(C-\omega)$$

Gaceta de Matemáticas Elementales, (1905) Tomo II (editor A. Bozal Obejero)
Propuesto por J.B. Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

529. De entre todos los triángulos de perímetro fijo, determinar aquel que al girar alrededor de uno de sus lados engendra una figura de revolución de volumen máximo.

Vicario, V., Comunicación personal (2009)

530. Sea ABC un triángulo isósceles. Se trazan tres circunferencias de diámetros las alturas. En cada una de ellas se traza la cuerda perpendicular por el ortocentro a la altura correspondiente. Demostrar que las tres cuerdas obtenidas tienen la misma longitud.

Komal, Mayo (2009), problem B4186

16-30 de noviembre de 2009

531. La circunferencia circunscrita a un triángulo biseca al segmento que une el incentro con cualquiera de los excentros de dicho triángulo.

Geometría, una visión de la planimetría, Lumbreras Editores, Lima Perú (2005)408

532. Sea ABC un triángulo con $a > b \geq c$ y M el punto medio de AB. Demostrar que existe un punto P del segmento CM de modo que las bisectrices interiores de los ángulos $\angle PAC$ y $\angle PBC$ se cortan en un punto Q de CM.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

1-15 de diciembre de 2009

Dedicado a Jack Garfunkel.

533. Sea ABC un triángulo acutángulo de lados a, b y c, p, R, r, semiperímetro, radio del círculo cirunscrito e inscrito, al triángulo, respectivamente, m_a, m_b, m_c las medianas, h_a, h_b, h_c, las alturas correspondientes a los lados a, b y c, respectivamente, probar que :

(i) $p \geq \dfrac{abc}{2R^2}$

(ii) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{R}$

(iii) $\dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c} \geq \dfrac{2}{R}$

(iv) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$

(v) $h_a m_a + h_b m_b + h_c m_c \leq p^2$

alcanzado la igualdad en todas estas desigualdades si el triángulo ABC es equilátero.

Garfunkel, J., Exploring Geometric Maxima and Minima, Mathematics Teacher, February, 2(1969)85-90
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

534. Sea ABC un triángulo y K su simediano, conocido también por punto de Lemoine-Grebe del mismo. Si $\Lambda(K)$ denota la suma de las distancias del punto simediano a los lados del triángulo, demostrar que $\Lambda(K) \leq 3r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita al mismo.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

Nota. Este problema pretende continuar y profundizar con la línea relativa a los problemas 420 y 506 que propuso el mismo proponente en esta revista.

535. Sea ABC un triángulo acutángulo con $BC > CA$. Sea O el circuncentro, H el ortocentro y F el pie de la altura CH. La perpendicular a OF en F corta al lado CA en P. Demostrar que $\angle FHP = \angle BAC$.

Djukic D., Jankovic V., Matic I. Petrovic N. The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olimpiads: 1959-2004, Springer (2006)289

536. Construir las tres circunferencias que pasando por el punto de Gergonne son tangentes a dos de los lados del triángulo ABC. Los seis puntos de tangencia son concíclicos.

Yiu, P., Introduction to the geometry of the triangle (2001)6

16 de diciembre de 2009 - 15 de enero de 2010

Homenaje a Jack Garfunkel

537. En un triángulo rectángulo ABC con $\angle A = 60°$ y $\angle B = 30°$, sean D, E, F los puntos de trisección cercanos a A, B y C sobre los lados AB, BC y CA, respectivamente. Extendemos CD, AE y BF hasta intersecar a la circunferencia circunscrita en P, Q y R. Demostrar que PQR es un triángulo equilátero.

Garfunkel, J. Pi Mu Epsilon Journal 331 (26)

538. Dado un triángulo ABC se trazan equiláteros exteriores BAP y ACQ sobre los lados AB y CA. Sea R el punto medio de BC y G el baricentro de ACQ. Demostrar que el triángulo PRG es $30° - 90° - 60°$.

Garfunkel, J. Pi Mu Epsilon, 44, 553

16-31 de enero de 2010

539. Sea el triángulo ABC con ortocentro H y P un punto de su circunferencia circunscrita, distinto de A, B y C. Sea E el pie de la altura BH, sean $PAQB$ y $PARC$ paralelogramos, y sea X el punto de corte de AQ y HR. Demostrar que EX es paralela a AP.

Djukic D., Jankovic V., Matic I. Petrovic N. The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olimpiads: 1959-2004, Springer (2006)288

540. Resolver y construir el triángulo rectángulo ABC, $\angle A = 90°$ conocidos c, $a + b$.[30]

Sánchez-Rubio, C., Ripollés, M., Manual de matemáticas para preparación olímpica Universitat Jaume I. Castelló, (2000)339, problema 8

541. Sea ABC un triángulo, con lados a, b, c, alturas h_a, h_b, h_c, medianas m_a, m_b, m_c, y bisectrices interiores t_a, t_b, t_c, respectivamente. Probar que :

(1) $h_a h_b h_c < abc$

(2) $t_a t_b t_c < abc$

(3) $h_a h_b t_c < abc$

(4) $h_a t_b t_c < abc$

(5) $h_a h_b m_c < abc$

(6) $h_a m_a h_b < abc$

(7) $h_a t_a h_b < abc$

(8) $t_a m_a h_b < abc$

(9) $t_a t_b m_c < abc$

(10) $h_a t_b m_c < abc$

Garfunkel, J., A Project in Mathematics, The Mathematics Teacher, March, (1968)253-263
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

1-14 de febrero de 2010

542. Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. Es conocido que los pies de las perpendiculares trazadas por P a los lados AB, BC y CA están alineados en la recta de Simson. Demostrar que las rectas de Simson de dos puntos P y Q diametralmente opuestos son perpendiculares.

"Baltic Way 1990" Mathematical Team Contest, Riga, November 24, 1990
Propuesto por Gennaro Rispoli, profesor de matemáticas en el

Liceo Scientifico Sperimentale annesso al Liceo Ginnasio "T.L. Caro", (Salerno), Italia.

543. Sea ABC un triángulo plano, a, b y c los lados, $\angle A$ constante. Se tiene la relación $a^n = b^n + c^n$ donde n es constante. Demostrar que necesariamente ha de ser $n = 2$ y $\angle A = \pi/2$.[31]

Giessen, Sur la géneralisation du Theoreme de Pythagore, Journal de M. Crelle, Tome XXVI, (1843)92

544. Demostrar que existe un triángulo acutángulo, uno de cuyos ángulos mide 60° y tal que el área de su triángulo órtico sea igual al área de su triángulo de Morley.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva
Vicario, V., Comunicación personal (2010)

545. Encontrar en el interior de un triángulo dado un punto tal que los segmentos que lo unen a los vértices del triángulo dividen al inicial en tres triángulos cuyas áreas sean iguales. [32]

Alexandroff, I., Problemas de geometría elemental agrupados según los métodos a emplear para su resolución. Traducido del ruso al francés, según la sexta edición por D. Aitoff, París (1899)56

[30] Ampliación del profesor Peiró: Resolver y construir el triángulo rectángulo ABC, $\angle A = 90°$ conocidos c, $a - b$.

[31] El profesor Vicente Vicario propone este texto alternativo: Sea ABC un triángulo plano y a, b, c las longitudes de sus lados. Sea n un número natural mayor o igual que 2. Sea A un ángulo constante. Demostrar que si para todos los triángulos ABC que se pueden formar con el segmento BC fijo y el vértice A recorriendo su correspondiente arco capaz de magnitud $\angle A$ constante, se tiene la relación $a^n = b^n + c^n$, entonces necesariamente $n = 2$ y $\angle A = 90°$.

[32] El profesor Gennaro Rispoli informa que este problema tiene esta referencia: Liu, A. Hungarian Problem Book III (Based on Eotvos Competitions: 1929-1943), (2001)92-93, problema 1936 n.2. MAA. El director agradece la referencia.

15-28 de febrero de 2010

546. Sea ABC un triángulo y AA_a, la bisectriz interior del ángulo A, siendo A_a su pie sobre el lado BC. Sean B_a y C_a, los puntos obtenidos por intersección de la perpendicular que pasa por A_a y corta al lado AC y AB, respectivamente. Definimos los puntos $D_a = AA_a \cap B_aC_a$, $E_a = A_aB_a \cap CC_a$, $F_a = A_aC_a \cap BB_a$. Probar que :

(a) La altura desde A a BC y las rectas BB_a y CC_a concurren en el punto X_a.

(b) ¿Están los puntos $I_a = AB_a \cap A_aC_a$, $J_a = AB \cap D_aF_a$ y $K_a = B_aC_a \cap BC$ alineados?

(c) Haciendo las mismas construcciones para los vértices B y C, y sus lados opuestos y con las notaciones anteriores, obtenemos el triángulo $X_aX_bX_c$. ¿Qué relación existe entre triángulo y el triángulo ABC?

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

547. Sea un triángulo ABC tal que $a > b > c$. Se escoge al azar un punto P en el interior del mismo. Determinar la probabilidad de que al escoger este punto al azar tengamos la desigualdad

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 > a^2 + c^2$$

Vicario, V., Comunicación personal (2010)

548. El triángulo ABC tiene ortocentro H. Los pies de las perpendiculares desde H a las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle BAC$ (que no es recto) son P y Q. Demostrar que PQ pasa por el punto medio de BC.

Gardiner A., The Mathematical Olympiad Handbook, Oxford University Press, New York, (1987)60
Propuesto por Gennaro Rispoli, profesor de matemáticas en el

Liceo Scientifico Sperimentale annesso al Liceo Ginnasio "T.L. Caro", (Salerno), Italia.

549. **Un problema de construcción: triángulos homotéticos.** Sea ABC un triángulo dado. Sea MNP un triángulo inscrito en ABC, con M en BC, N en CA y P en AB. Construir un tercer triángulo $A'B'C'$ inscrito en MNP tal que los lados homólogos sean paralelos, es decir, A' en NP, B' en PM, C' en MN, $A'B'$ paralelo a AB, $B'C'$ paralelo a BC, y $C'A'$ paralelo a CA.

Sortais, Y. et R., Géométrie de l'espace et du plan : synthese de cours, exercices résolus (1993)103
Campo, S., Métodos sintéticos de la geometría, Salamanca (2005),cap. III, 4.4, pag. 128

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

1-15 de marzo de 2010

550. Sea ABC un triángulo arbitrario y MNP su triángulo de Morley interior. Demostrar que existe una recta que divide a los dos triángulos en dos partes de igual área a la vez.

Vicario, V., Comunicación personal (2010)

551. Las distancias de un punto cualquiera de una mediana a los lados que parten del mismo vértice son inversamente proporcionales a dichos lados.

Frére Gabriel Marie , 1820-1891. 5. ed., 3 p. L., iii-xxiv
Tours, A. Mame et fils, (1912)757

16-31 de marzo de 2010

552. Dado el triángulo ABC, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el ángulo X de su triángulo ceviano XYZ es recto. Comprobar que el conjugado isogonal de dicho lugar geométrico es una cónica y construirla a partir del triángulo ABC.

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

553. Sea ABC un triángulo escaleno con $a > b > c$. Determinar el segmento de línea recta de longitud mínima que divide al mismo en dos partes de igual área.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

554. En un triángulo ABC se tiene: $\angle BAC = 80°$, $\angle BCA = 20°$, y sea D el pie de la bisectriz del ángulo B. Demostrar que $DC = AB + BD$.

Propuesto por William Rodríguez Chamache,
profesor de geometria de la 'Academia integral class' Trujillo-Perú.

555. Sea ABC un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice A, y P sobre BC. Sean I y J los pies de las perpendiculares trazadas por P a AB y AC. ¿Cómo debemos elegir P para que IJ sea mínimo?

Laborde, C., Solving problems in computer based geometry enviroments,
The influence of the features of the software, ZDM 4(1992)131

1-16 de abril de 2010

556. En un triángulo ABC se tiene que $\angle BAC = 60° - 2\beta?$, $\angle BCA = 3\beta$. Se tiene D en el segmento AC tal que $AB = DC$ y que $\angle DBC = 5\beta?$. Hallar $\beta?$

Propuesto por William Rodríguez Chamache,
profesor de geometria de la 'Academia integral class' Trujillo-Perú.

557. Para cualquier triangulo existen dos puntos tales que sus simétricos respecto los lados del triángulo forman un triángulo equilátero.

Propuesto por Nicolás Rosillo Departamento de Matemáticas, IES Máximo Laguna (Santa Cruz de Mudela, Ciudad Real) y F. J. García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

558. Dado un triángulo $A_1B_1C_1$, encontrar otro ABC tal que los simétricos de sus vértices respecto del lado opuesto, coincidan con los vértices $A_1B_1C_1$ del primero.

Sánchez, M., Algunos problemas de matemática elemental (1992)
Discurso de ingreso en el IEG, Boletín del Instituto de Estudios Giennenses.

In memoriam, al profesor Gennaro Rispoli.

559. Sea P un punto del interior del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, respectivamente. Si los tres cuadriláteros $AEPF$, $BFPD$ y $CDPE$ tienen incírculos tangentes a los cuatro lados, demostrar que P es el incentro de ABC.

Stanley Rabinowitz, Crux Mathematicorum, Problem 2902, v.30, n.1(2004)38

16-30 de abril de 2010

560. Trazar tres circunferencias que pasen por los vértices de un triángulo y los puntos medios de los lados concurrentes. Unamos el centro de cada circunferencia con el punto de corte de las otras dos circunferencias (el punto medio del lado, pues en el punto de Miquel se cortan las tres) con un segmento. Demostrar que los tres segmentos así obtenidos se intersecan en un único punto que pertenece a la recta de Euler.

González Calvet, R., Treatise of plane geometry through geeometric algebra (ed. electrónica, 2000-2001, ed. impresa, 2007), problema 9.5.

1-15 de mayo de 2010

561. Los semiejes α y β de la elipse de Steiner del triángulo ABC (elipse circunscrita al triángulo y que tiene por centro al baricentro del mismo), verifican las identidades:

(1) $\alpha\beta = \dfrac{4\Delta}{3\sqrt{3}}$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{2}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Barisien E.N., Il Periodico di Matematica, (1911)40, problema 782
Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico "A. Einstein" Teramo, Italia

562. Reflexiones en el triángulo Dibujar un triángulo ABC y marcar un punto P. Marcar las reflexiones X, Y, Z del punto P respecto a los lados del triángulo. Entonces las circunferencias XYC, YZA, ZXB y la ABC misma, todas se cortan en un punto común.

Wells, D., The Penguin dictionary of curious and interesting geometry. The Penguin Group, (1991)

16-31 de mayo de 2010

563. Para todos los triángulos de área máxima inscritos en una elipse de ejes $2a$ y $2b$, el área del triángulo pedal del punto de Lemoine es constante e igual a

$$\frac{3\sqrt{3}a^3b^3}{4\left(a^2+b^2\right)^2}$$

Barisien E.N., Il Periodico di Matematica (1911)40, problema 785
Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico "A. Einstein" Teramo, Italia

564. Dada una hipérbola, las áreas de los triángulos que forman cualquier tangente con las asíntotas no varía.

Naranjo, J.C. (2005)

565. Sea $ABCD$ un cuadrado. Por A se traza cualquier triángulo PAQ con P sobre BC, Q sobre CD y $\angle PAQ = 45°$. Sean M y N los puntos de intersección de la diagonal BD con AP y AQ. Demostrar que $2\left(BM^2 + ND^2\right) = PQ^2$.

Propuesto por William Rodríguez Chamache. Profesor de geometría de la Academia integral, Perú.

1-15 de junio de 2010

566. Sea ABC un triángulo y $d = AD$ una ceviana arbitraria con D su pie sobre el lado BC. Por D trazamos paralelas a AC, AB lados del triángulo ABC que cortan a éstos, en los puntos H y F, respectivamente. Por F, H se trazan paralelas al lado BC cortando éstas a la ceviana AD, en los puntos G y I, respectivamente. Por F, H se trazan paralelas a la ceviana $d = AD$ hasta que corte cada una al lado BC, en los puntos E, y J respectivamente. Probar si es cierto o no que :

(a) HF, JG, EI, se cortan en el punto X;

(b) Si $Y = HD \cap JG$, $Z = DF \cap IE$, entonces los triángulos ABC y XYZ son semejantes. Hallar su centro que denotamos por X^*, y su razón.

(c) Lugar geométrico descrito por cada uno de los infinitos puntos siguientes: X, Y, Z, cuando D varía sobre BC.

Romero, J.B., Comunicación personal (2010)

567. En un triángulo ABC cuyo ángulo C es de $30°$, se construye sobre el lado AB un triángulo equilátero hacia el exterior. Demostrar que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo.

Rabinowitz, S., Mathematics Student Journal 10(1963)6
Propuesto por Vicente Vicario García. I.E.S. El Sur, Huelva

568. Es bien conocido que si un triangulo ABC tiene dos medianas, o dos bisectrices interiores, o dos cevianas Gergonne, o dos simedianas de la misma longitud, entonces el triangulo es necesariamente isósceles. Por otra parte, también es conocido que si un triangulo tiene dos bisectrices exteriores iguales, el triangulo no es necesariamente isósceles. (A este tipo de triángulos se les denomina *pseudoisósceles*).
Si denominamos antisimediana al segmento conjugado isotomico de la simediana, es decir, el segmento cuyo pie es simétrico del pie de la simediana respecto del punto medio del lado, probar o refutar la siguiente proposición: *Existen triángulos no isósceles con dos antisimedianas de la misma longitud.*

Vicario, V., Comunicación personal (2010)

16-30 de junio de 2010

569. Las alturas de un triángulo ABC se cortan en un punto H. Determínese el valor del ángulo $\angle BCA$ sabiendo que $AB = CH$.

De Diego, B., Llerena, A., Baena,F.,Rodríguez, M.B.,Gamboa,J.M:,Lorenzo, J.M. (2005)
Matemáticas. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, (2004)745 (Ceuta)

570. Sea ABC un triángulo escaleno en el que una altura, una bisectriz interior y una mediana (cada una de las cevianas anteriores parten de un vértice distinto) son iguales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h_a = w_b = m_c$. Demostrar que las longitudes de los lados del triángulo ABC cumplen la siguiente relación:

$$3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$$

Vicario, V., Comunicación personal (2010)
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

571. Sean $T = ABC$ de lados a(hipotenusa), b, c, y $T' = A'B'C'$ de lados a'(hipotenusa), b', c', dos triángulos rectángulos en A y A', cuyas alturas desde A, A', son h_a, h'_a, respectivamente. Sean m, n, m', n', las proyecciones ortogonales sobre la hipotenusa a, a', de los catetos b, c y b', c', de los triángulos T y T', respectivamente. Probar que :

(a) $\dfrac{1}{mm'} + \dfrac{1}{nn'} - \dfrac{2}{h_a h'_a} \geq 0$. ¿ Cuándo se alcanza la igualdad?

(b) $\dfrac{1}{mn'} + \dfrac{1}{m'n} - \dfrac{2}{h_a h'_a} \geq 0$. ¿ Cuándo se alcanza la igualdad?

Romero, J.B., Comunicación personal (2010)

572. Construir sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, exteriormente, los cuadrados $BCDE$, $ACFG$, $BAHK$, y construir los paralelogramos $FCDQ$, $EBKP$. Demostrar que APQ es un triángulo rectángulo isósceles.

Propuesto por Hüseyin Demir; Midle East Technical University, Ankara, Turkey
American Mathematical Monthly, Vol 75 pag. 899 problem E2124.

Edición veraniega del 1 de julio de 2010 al 31 de agosto de 2010

573. Sea ABC un triángulo acutángulo. Consideremos las cevianas que partiendo desde cada vértice del mismo pasan por su circuncentro. Sean D, E, F los pies de estas cevianas respecto de los lados BC, AC y AB del triángulo, respectivamente.

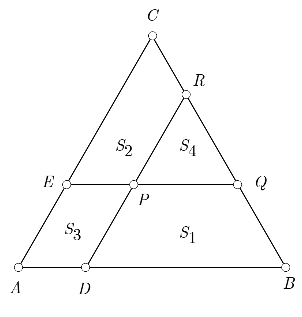
(a) Demostrar que al menos uno de los segmentos OD, OE, OF es mayor o igual que el radio de la circunferencia inscrita al triángulo.

(b) Demostrar que se puede refinar el apartado anterior y garantizar que al menos uno de los segmentos OD, OE, OF anteriores, es mayor o igual que la mitad del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Vicario, V., Comunicación personal (2010)

Nota. Evidentemente, a partir de la desigualdad de Euler-Chapple , el apartado (a) se deduce como corolario del apartado (b) que es un resultado más fuerte. Por otra parte, se puede intentar demostrar (a) sin demostrar primero (b).

574. Dado el triángulo equilátero $\triangle ABC$ de lado 1. Determinar el punto D del lado AB y el punto E del lado AC que al trazar paralelas por D al lado AC, y por E al lado AB, determinan 4 regiones S_1, S_2, S_3, S_4 del triángulo tal que las áreas están en progresión aritmética. (ver figura).



Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES Abastos, València.
Tribunal de Oposiciones de Secundaria, Valencia (2010)

575. ¿Cuál es el área máxima de un triángulo inscrito en un cuadrado de lado 1 ?.

Halmos, P., Problèmes pour mathématiciens, petits el grands. Le sel et le fer Cassine. (2000)36

576. Consideremos los triángulos de área 1. ¿Cuál es el área máxima de un cuadrado contenido en uno de ellos?

Halmos, P., Problèmes pour mathématiciens, petits el grands. Le sel et le fer Cassine. (2000)201

0.11 Curso 2010

1-15 de Setiembre de 2010

577. **Cuadrilátero de Lemoine.** Se tienen cuatro puntos A, B, C y D sobre una circunferencia T. Sea a el punto de Lemoine del triángulo BCD, b el punto de Lemoine del triángulo ACD, c el punto de Lemoine del triángulo ABD, y d el punto de Lemoine del triángulo ABC. Sea f la transformación proyectiva del plano, definida por: $f(A) = a$, $f(B) = b$, $f(C) = c$, $f(D) = d$. Determinar los puntos fijos y las rectas dobles en tal transformación.

Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7

16-30 de setiembre de 2010

578. Se dan en un plano un triángulo ABC y una recta d. Sea $d(t)$ la recta que corresponde a d en una cualquiera de las semejanzas $S(t)$ que cumplen con la condición de que los puntos A', B' y C' correspondientes a los puntos A, B y C estén sobre las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Hallar la envolvente de las rectas $d(t)$.

Inglada Garcia-Serrano,
V., Métodos para la resolución de los problemas geométricos, Dossat, Madrid, (1948)244

Propuesto por Ángel Montesdeoca Delgado, profesor del Departamento de Matemática Fundamental,

Sección de Geometría y Topología, Universidad de La Laguna.

579. Sea ABC un triangulo con $\angle ACB = 30°$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $k = a + b - c$. Sean los puntos D y E sobre los semirectas BC y AC, respectivamente, tales que $BD = AE = k$. Probar que $DE = IO$. ¿Para qué otros valores de k se cumple esta relacion ?

Suppa, E., Comunicación personal (2010)
Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico "A. Einstein" Teramo, Italia

580. Sea ABC un triángulo de lados $a \geq b \geq c$, y, D, E y F, los pies de las alturas trazadas desde los vértices A, B y C, sobre los lados BC, AC, y AB, respectivamente. Probar que :

(a) $CF - BE \leq b - c \leq CD - DB$. Estudiar todas las desigualdades que se obtienen para cada clase de triángulo según los ángulos.

(b) Si c, C, son lado y ángulo fijo correspondiente y b y a, variables, calcular el siguiente límite:

$$\lim_{b \to c} \frac{CD - DB}{CF - BE}$$

Romero, J.B., Comunicación personal (2010)
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

581. Dos circunferencias que no intersecan son tangentes a un ángulo agudo $\angle XOY = \alpha$. Construir un triángulo isósceles ABC con el vértice A sobre OX y la base BC sobre OY, tal que cada uno de sus lados iguales sea tangente a cada una de las circunferencias.

Honsberger, R., Mathematical Diamonds,
The Mathematical Association of America, Washington. D.C. (2003)68

582. El triángulo T que es tangente externamente a las excircunferencias es denominado triángulo extangencial. Demostrar que:

(1) T es homotético al triángulo órtico, y hallar el centro de homotecia.

(2) El área de T es

$$\Delta' = \frac{\left[\left(a^3+b^3+c^3\right)-(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 \sec A \sec B \sec C}{8a^2b^2c^2}$$

donde Δ es el área de ABC.

(3) El incentro I_T coincide con el circuncentro C_J del triángulo $I_aI_bI_c$ donde I_a, I_b y I_c son los excentros de ABC.

(4) El radio r_T de la circunferencia inscrita de T es $r_T = 2R + r$ siendo R y r el circunradio y el inradio de ABC, respectivamente.

http://mathworld.wolfram.com/ExtangentsTriangle.html

1-15 de Octubre de 2010

583. Sea dado un triangulo ABC, y denotamos respectivamente con O, I, H, G, K el circuncentro, el incentro, el ortocentro, el baricentro y el punto de Lemoine. Sea M el punto medio de AC, sea N el punto de intersección de la recta AB con la mediatriz de AC y sea γ la circunferencia circunscrita al triangulo BNC. Probar que:

(1) el punto O pertenece a la circunferencia γ

(2) el punto I pertenece a la circunferencia γ si y solo si : $\angle A = 60°$;

(3) el punto H pertenece a la circunferencia γ si y solo si : $(\angle A = 60°)$ o $(\angle A = 120°)$ o $(\angle B = 90°)$ o $(\angle C = 90°)$;

(4) el punto G pertenece a la circunferencia γ si y solo si: $a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2 = 0$;

(5) el punto K pertenece a la circunferencia γ si y solo si: $2a^2 = b^2 + c^2$ (es decir el triangulo ABC es *automediano*)

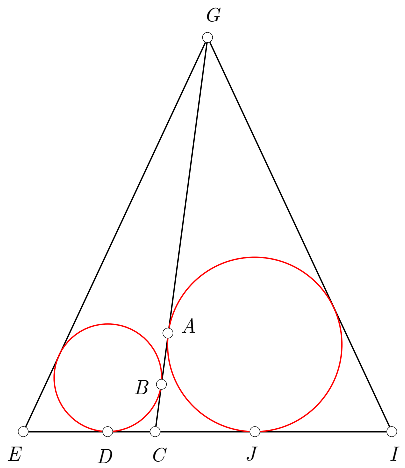
Suppa, E., Comunicación personal (2010)
Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico "A. Einstein" Teramo, Italia

584. **Triángulos semejantes y homólogos a la vez.** Cuando dos triángulos son semejantes y homólogos a la vez y los pares de vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología, entonces los centros de semejanza y homología son los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los dos triángulos.

Inglada Garcia-Serrano,
V., Métodos para la resolución de los problemas geométricos, Dossat, Madrid, (1948)244

Propuesto por Ángel Montesdeoca Delgado, profesor del Departamento de Matemática Fundamental,
Sección de Geometría y Topología, Universidad de La Laguna.

585. El triángulo de la figura es isósceles con base igual a 20. Determinar la distancia entre los puntos de tangencia A y B, si $EC = 8$.



Gutiérrez-Herrera, B.Sc., R. Problemas Resueltos de Geometría Elemental
Licenciatura en Matemática Aplicada, USAC(Universidad de San Carlos de Guatemala)

16-31 de Octubre de 2010

586. Sea ABC un triangulo acutángulo donde A, B, C son sus ángulos y tal que $\min\{A, B, C\} > 45°$. Sea escoge al azar un punto P interior al mismo. Determinar:

(a) Probabilidad de que P diste menos de alguno de los vértices del triangulo que del circuncentro del mismo, expresando dicha probabilidad exclusivamente en función de los lados a, b, c del triangulo.

(b) Idem del apartado anterior, pero expresando dicha probabilidad exclusivamente en función de razones trigonometricas de los ángulos del mismo.

(c) Idem del apartado (a) anterior pero expresando dicha probabilidad exclusivamente en función del semiperimetro, el circunradio y el inradio del mismo.

(d) Demostrar que dicha probabilidad es mayor o igual que 1/3.

Refinar de alguna forma el resultado 1/3 del apartado (d) anterior utilizando expresiones con elementos del triangulo.

Vicario, V. (2010): Comunicación personal (2010)
Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva.

587.

(a) El ortocentro de un triángulo isósceles, su punto simediano y el ortocentro de su triángulo pedal, están alineados.

(b) b)La recta de *van Aubel* es la recta que conecta el ortocentro H, el punto simediano K de un triángulo, y el punto simediano J del triángulo órtico.

Casey, J., A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry with Numerous Examples, 5th ed., rev. enl. Dublin (1988)241

http://mathworld.wolfram.com/vanAubelLine.html

588. Dado el triangolo ABC, sean H_a, H_b, H_c los pies de las alturas trazadas desde los vertices A, B, C respectivamente. Si denotamos por r, R, t_a, t_b, t_c el inradio de ABC y los circumradios de los triangulos ABC, H_bAH_c, H_aH_cB, H_aCH_b demostrar que

$$3r \leq t_a + t_b + t_c \leq 3R$$

Suppa, E., Comunicación personal (2010)
Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico "A. Einstein" Teramo, Italia

589. Sea ABC un conjunto de triángulos tales que el ángulo A y su lado c en cada uno de ellos son fijos. Denotamos por m_a, s_a, g_a, n_a la mediana, simediana, ceviana Gergonne y ceviana Nagel que parten del vértice A de cada uno de los mismos, respectivamente. Determinar el valor del siguiente límite cuando la longitud del lado b tienda a la del lado c, es decir, cuando el triangulo ABC tienda a ser isósceles:

$$\lim_{b \to c} \frac{m_a^2 - s_a^2}{n_a^2 - g_a^2}$$

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. "El Sur", Huelva.

590. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, de catetos c, fijo,y b y a variables. Desde A trazamos la altura AH_a, y su bisectriz AV_a, donde H_a y V_a, son sus pies sobre BC, respectivamente. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{b \to c} \frac{AV_a - AH_a}{(H_aV_a)^2}$$

Romero, J.B., Comunicación personal (2010)
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

1-15 de noviembre de 2010

591. Hallar el triángulo isósceles dado el lado c y su punto de tangencia T con el círculo inscrito.

Santamaría, J., Geometría, Tema 7 (2010)7
Propuesto por Julián Santamaría Tobar, profesor de Dibujo del IES La Serna de Fenlabrada, Madrid

592. Se tiene un triángulo ABC, donde $AB = BC$. Si H y S son los puntos medios de AC y HB, respectivamente, y HL es perpendicular a SC en L, pruebe que es $\angle BLA = 90°$.

Donaire, M. F., Formas y números. La geometría en las Olimpíadas Matemáticas. Fondo Editorial del Pedagógico San Marcos, Lima, (2010)180

593. Dado el triángulo acutangolo ABC, sean H_a, H_b, H_c los pies de las alturas trazadas desde los vértices A, B, C respectivamente. Si denotamos por r, R, t_a, t_b, t_c el inradio de ABC y los circunradios de los triángulos ABC, H_bAH_c, H_aH_cB, H_aCH_b demostrar que:

$$3r \leq t_a + t_b + t_c \leq \frac{3}{2}R \qquad (*)$$

Suppa, E., Comunicación personal (2010)
Propuesto por Ercole Suppa, Liceo Scientifico "A. Einstein" Teramo, Italia

594. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado a, y ADE un triángulo rectángulo donde E es el punto medio de DC. Probar que existen dos puntos F, F' sobre AE, tales que $CF = BF'$ y que ambos segmentos son perpendiculares.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

16-30 de noviembre de 2010

595. La altura AH_a de un triángulo ABC interseca a la circunferencia circunscrita a ABC en P. La recta de Simson de P respecto a ABC es paralela a la recta tangente por A a la circunferencia circunscrita.

D'Ignazio, I. y Suppa, E., Il problema geometrico, dal compasso al Cabri, Interlinea Editrice, Teramo (2001)276

596.

1-15 de diciembre de 2010

597.

598.

599.

16 de diciembre de 2010 - 15 de enero de 2011

600.

601.

602.

603.

604.

605.

16-31 de enero de 2011

606.

607.

609.

1-14 de febrero de 2011

610.

611.

15-28 de febrero de 2011

612.

613.

614.

615.

1-15 de marzo de 2011

616.

618.

16-31 de marzo de 2011

619.

620.

621.

1-15 de abril de 2011

622.

623.

16-30 de abril de 2011

624.

625.

1-15 de mayo de 2011

626.

627.

16-31 de mayo de 2011

628.

629.

1-15 de junio de 2011

630.

631.

16-30 de junio de 2011

632.

Edición veraniega del 1 de julio de 2011 al 31 de agosto de 2011

633.

Bibliografía

[1] Aguirre, A. y otros (2000): *Vertex 1. Dibujo técnico.* Bachillerato. Editorial Casals (p. 65) (201, 205)

[2] Alasia, C. (1900): *La recente geometría del triangolo.* Cittá di Castello, S. Lapi, tipografo-editore. (p. 339)(484)

[3] Alexandroff, I. (1899) *Problemas de geometría elemental agrupados según los métodos a emplear para su resolución.* Traducido del ruso al francés, según la sexta edición por D. Aitoff. París. (p. 22)(479)

[4] Altshiller-Court, N. (1952) *College Geometry: A Second Course in Plane Geometry for Colleges and Normal Schools*, 2nd ed., rev. enl. New York: Barnes and Noble, (pp. 85-86), (354)(p. 100) (373)

[5] André , M. Ph . (1920). *Éléments de Géométrie Conformes aux programmes de baccalauréats (1re partie)* (166, 179)

[6] Anjaneyulu,M.S.R (1964). *Elements of Modern Pure Geometry*, Publishing House, Asia (251)

[7] Aref , M.N., Wernick , W. (1968): *Problems and Solutions in Euclidean Geometry*, Dover, New York, (181, 206, 276, 326, 386, 446, 464)

[8] Arriero, C. y García I. (2000): *Descubrir la Geometría del entorno con Cabri* . Narcea -MEC. Madrid. (pág 48) (85, 86)

[9] Ball , W.R . (1908): *Recreaciones Matemáticas y problemas de los tiempos antiguos y modernos.* Segunda edición francesa , tratada después de la cuarta inglesa con numerosas adiciones. Librairie Scientifique A. Hermann . París (p. 5) (135) (p. 2) (362)(p. 3)(363)

[10] Baragar, A. (2002) *A survey of Classical and Modern Geometries with computer activities*, Prentice Hall, New Jersey. (261)

[11] Beiler. A H. (1964) *Recreations in the theory of numbers* (The queen of mathematics entertains).(Dover Publications Inc.),(402)

[12] Berenguer, L. y otros (1995): *Problemas propuestos en los 10 años de la olimpiada matemática Thales* . SAEM Thales . Proyecto Sur de Ediciones. Granada. (pag 58) III Olimpiada Thales (155) VIII Olimpiadas Thales (465)

[13] Berger, M (1.990). *Géomètrie* . Nathan. LUÇON (37)

[14] Bernat, P, y Morinet-Lambert, J. (1996): *A new way for visual reasoning in geometry education.* Springer Berlin / Heidelberg (p. 452) (429)

[15] Bernd, B.C. (1994): *Ramanujan's Noteboooks, Part IV.* Springer -Verlag(516)

[16] Berrondo-Agrell, M. (2006) *101 enigmas de geometría, juegos divertidos para potenciar tu mente.* Ediciones Ceac Barcelona.(p, 11)(368)(p.70) (377), (p.64), (422)

[17] Birkhoff, G. D. y Beatley, R. (1959) *Basic geometry.* Chelsea P.C. New Cork.(p. 101)(381)

[18] Boyer, C. (1.968): *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons . Traducción española en Alianza Universidad Textos. Alianza Editorial Textos (1.987) .(16)

[19] Bruño (1.950): *Tratado de Geometría*. Bruño. Madrid. (1)

[20] Bruño (1958, 60): *Geometría. Curso Superior. Con el enunciado de 1286 ejercicios de aplicación.* Novena edición. Paterna (Valencia). (110, 209)

[21] Bruño (1958). *Geometría. Curso Superior. Solucionario* . Editorial Bruño. Madrid. (115)

[22] Bruño (1963): *Geometría. Curso superior. Solucionario* . Editorial Bruño. Madrid. (pág 64) (118, 153)

[23] Bryant, V.W. y Austin, A.K. (1983): *Reading in Mathematical Education. Geometry*. Seleccionado por Marion Walter. Association of Teachers of Mathematics. (208)

[24] Campo, S. (2005) *Métodos sintéticos de la geometría*. Edición de autor. Salamanca. (342, 345, 353, 372)

[25] Carranza, E.P . (1962): *Matemáticas Tercer Curso del Bachilerato* . Editorial Summa , S.L . Madrid (pag . 182) (129)

[26] Carrega , JC. *Théorie des corps , la règle et le compas* , Edition Hermann , 1989 (pag 98) formation des enseignants et formation continue (82)

[27] Casey, J. (1888) *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry with Numerous Examples*, 6th ed. Dublin: Hodges, Figgis, & Co., 1888.(pp. 74-75) (354) (p.21)(387)

[28] Castelnuovo , E. (1.948/78/79): *La Matematica / La Geometria* , La nuova Italia.Editrice , Scandicci (Firenze). 62

[29] Clapham , C. (1.992): *Diccionario Oxford de Matemáticas*. Celeste Ediciones. Madrid. (Traducción de Alfonso Carlos Casal Piga y José Manuel Vegas Montaner) (3 ,4,5,6)

[30] Commeau, J. *Cours Complet de Mathématiques. Géométrie*. Masson et Cie, Éditeurs, 1957, Paris. (p. 71)(358)

[31] Conant, L. L. *Original exercises in plane and solid geometry* American book company, New York : 1905 (Pág 41) (247) (pág 35) (252)

[32] Coolidge, J. L .(1971) *A Treatise on the Geometry of the Circle and Sphere*. New York : Chelsea , pp. 71-73 ,(149)

[33] Coxeter , HSM , (1.971) *Fundamentos de Geometría*. Limusa - Wiley . México Págs 42-43 (29, 280)

[34] Cortázar, 1.884 *Tratado de Geometría Elemental*. (pág 96) (31)

[35] Courant , R. y Robbins , H. (1.971): *¿Qué es la matemática?* Aguilar. Madrid. (17)

[36] Coxeter , H.S.M . y Greitzer , S.L .(1993): *Retorno a la Geometría. La tortuga de Aquiles*, Traducción de Pedro Gómez y Joaquín Hernández. (La tortuga de Aquiles). (96, 97, 157)

[37] Deulofeu, J. (2001): *Una recreación matemática : historias, juegos y problemas*. Planeta Prácticos. Barcelona (pag 76) (271)

[38] D'Ignazio I., Suppa, E., (2001): *Il problema geometrico, dal compasso al Cabri*. Interlinea Editrice, Teramo (pag. 290)

[39] Domínguez, M. (1879): *Elementos de Geometría Analítica*. Edición del autor . Madrid. (173)

[40] Dunham, W. (1.990): *Journey througt Genius (The Great Theorems of Matematics).* Wiley . Nueva York (pag 209) , 3, 4, 5, 6, 7

[41] F.G.M . (Frère Gabriel-Marie)(1915): *Exercises de Trigonométrie* (p. 308) (70, 71, 72)

[42] F. G.-M (1912): *Exercices de géométrie , comprenant l'esposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues* . 5 ed. (pág . 632) (141)

[43] F. G.-M .(1991): *Exercices de Géométrie*, Editor : Jacques Gabay (Reprint of A.Mame et Fils , Tours) Paris (95, 162)

[44] Frère Gabriel Marie, (1820-1891). *Exercices de géométrie, comprenant l'esposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues par F. G.-M* 5. ed.: 3 p. L., [iii]-xxiv, 1302 p. diagrs. 22 cm. Tours, A. Mame et fils; [etc., etc.] 1912.(p. 173) (354). (p.554) (390)

[45] Fernández García, F.R . (2001): *Optimización Multiobjetivo . Una perspectiva personal.* En Actas del Encuentro de Matemátcos Andaluces. (Volumen 1). Conferencias Plenarias y Semblanzas. Universidad de Sevilla, Fundación El Monte, Universidad de Córdoba, Sadiel . Sevilla (pág 78-79) (66)

[46] Fourrey , E. (2001): *Curiosités Géomètriques* . Vuibert . Paris (pag 268) (103)

[47] Frenicle (1676): *Tratado de los triángulos rectángulos en números, en los que varias propiedades bellas de estos triángulos son demostradas por nuevos principios.* (pág 23). (136)

[48] Frère Gabriel Marie, 1820-1891. 5. ed (1912). *Exercices de géométrie, comprenant l'esposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues par F. G.-M.*: 3 p. L., [iii]-xxiv, 1302 p. diagrs. 22 cm.Tours,A. Mame et fils; [etc., etc.](p. 554)(426)

[49] Gallego-Díaz, J. (1965): *Nuevos problemas de matemáticas.* Editorial Norte y Sur. Madrid.(514)

[50] García Ardura (1948): *Problemas gráficos y numéricos de geometría (Originales en su mayor parte).* Madrid . (pág 135) (99)

[51] Gardiner , A. (1.987): *Discovering Mathematics. The Art of Investigation.* Oxford Science Publications. (22)

[52] Geltner, P.B. , Peterson, D.J. (1998) Editorial Thomson México DF(p. 103) (374)

[53] Gil, J., Mascaró , J. (1987): *Matemáticas 4.* Santillana . Madrid .. (117)

[54] Goldin G.A. y McClintock, C.E. (1984): *Task variables in mathematical problem solving.* Franklin Intitute Press. p. 232 .(174, 178)

[55] Gúsiev , V.y otros (1989) *Prácticas para resolver Problemas matemáticos. Geometría* Ed . Mir . Pàgina 45. (160), página 90 (175),pag 185 (222)

[56] Gusev, V. Litvinenko, V y Mordovich, A. (1988): *Solving problem in Geometry.* Mir. Moscú. (438)

[57] Guzmán, M. de (1.977): *Mirar y ver.* Editorial Alhambra . Madrid. (17)

[58] Guzmán, M. de (1.995): *Para pensar mejor.* Pirámide. Madrid (pag 164) (13)

[59] Guzmán, M . de (2002): *La experiencia de descubrir en Geometría.* Nivola Libros pág . 102. (182)

[60] Harel, G. y Sowder, L.(1998): *Students' proof schemes: results from exploratory studies.* En Schoenfeld,et all edrs. Research in Collegiate Mathematics Education. III, American Mathematical Society y Mathematical Association of America. (p. 260) (278)

[61] Heat, T. (1.921/1.981) *A history of Greek Mathematics.* Dover Publications; Inc. New York (43)

[62] Hernán, P., Salar, A, Soler, M. (1983), *Es posible* Grupo Cero. ICE de la Universidad de Valencia. (pag 24) (84)

[63] Hiebert, J (1986): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. London. (p. 245) (401)

[64] Honsberger , R. (1995): *Episodes in 19 & 20 C Euclidean Geomtry* . MAA (p. 5) (131)

[65] Honsberger, R. (1996): *From Erdös to Kiev* (p. 147), con la solución de George Tsintsifas (Tessaloniki, Greece).(449)

[66] Iliovic, G. y Robert. P. *Géométrie.* LÉON EYROLLES, ÉDITEUR. PARIS 1937(PROBLEMA 72)(286)

[67] Izquierdo, F. (2005): *Fórmulas y propiedades geométricas.* Edición de autor.Madrid.(354)

[68] Johnson , R. A. (1929, 1960): *Advanced euclidean geometry (formalmente titulada: Geometría moderna)Un tratado elemental sobre la geometría del triángulo y del círculo.* Dover . New York. (166, 354), (p.191) 373 Johnson señala que el problema lo estableció Karl Wilhem Feuerbach)

[69] Khayyam, O, (1964): *American Mathematical Monthly, [E 1694](p.554). Resuelto entre otros por Bankoff*, L.(1965, May, p.548) (373)

[70] King, J.R .(1997): *An Eye for Similarity Transformations. En Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research.* (Edited by James King and Doris Schattschneider) . The Mathematical Association of America (68)

[71] Klee , V. Y Wagon, S. (1991): *Old and new unsolved problems in Plane Geometry and Number Theory*, MAA Dolocian Mathematical Expositions, nº 11 (50).

[72] Laborde, C. y Vergnaud, G. (1994): *L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques.* En Vergnaud, G. (Ed.) Apprentissages et didactiques, oú en est-on?. Paris, Hachette (pag 90).(325)

[73] Lazcano, I. Barolo, P. (1991): *Matemáticas 7º EGB.* Edelvives. Zaragoza (pag 165) (283, 288)

[74] Larson, L.C. (1990): *Problem-solving through problems.* Problem books in Mathematics, Edited by P.R. Halmos . Springer Verlag . (p. 27) (175)

[75] Laisant , A. *Problémes* , 1921 (Mc . Alister , Mathesis , 171) (Bejot , 86, 21) (98)

[76] Laisant, C.A. (1896) *Geometrie du Triangle*, Gauthier - Villars, Paris, p. 128, cuestión 436 (433) (472)

[77] Levi S. Shively, PH.D . (1972) *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañia editorial continental. Mèxico . pág. (153, 168)

[78] Lidski , V. y otros (1.978): *Problemas de Matemáticas Elementales.* Editorial Mir. Moscú (2, 24, 149, 354)

[79] Linés, E. y Linés, E. (1949): *Ejercicios de Análisis Matemático.* Problema 125, pag 175-176.Madrid. (511, 512)

[80] Loomis, E. S. (1.968): *The Pythagorean Proposition* NCTM Washington D.C. (16)

[81] Lyúbich, Y.I., Shor, L.A. (1976, original ruso, 1978 edición en español.). *Método cinemático en problemas geométricos. Lecciones populares de matemáticas.* Editorial Mir. Moscú. (traducción de Lozhkin, G.A.). (pág 51) (192, 199, 264)

[82] Milauskas , G.A. (1.987): (Hints), *Creative geometry problems can lead to creative problems solvers.* En (Lindquist, M.M. y Shulte , A.P., editors) Learning and teaching geometry, K-12. Yearbook . NCTM. Association Drive, Reston , Virginia (54)

[83] Marcos de Lanuza, F. (1.964): *Matemáticas. Curso Preuniversitario.* Gregorio del Toro. Editor. Madrid. (40)

[84] Martel, J. (2001): *Lugares geométricos relacionados con un triángulo cuyos vértices son puntos de una curva plana cualquiera.* En Socas, M., Camacho, M, Morales, A. (Eds). Formación del profesorado e investigación en educación matemática III. Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. (193, 214)

[85] Martínez, J. Bujanda, M.P., Velloso, J.M. (1984): *Matemáticas -1* (Escuelas Universitarias de Magisterio de E.G.B.) Ediciones S.M. Madrid (pag 382) (281)

[86] Nelsen, R.B. (1.993): *Proofs without words.* MAA. Washington DC (56)

[87] Nelsen, R.B. (2.000): *Proofs witout words II* . MAA. Washington DC (57, 58, 59)

[88] Nesterensko , Yu . V., Olejnik , S.N . y Potápov , M.K . (1.994): *Antiguos Problemas Recreativos en Rusia.* Servicio Editorial Universidad Del País Vasco. (pag 85) (Traducción de Elena Aparicio Cortés, revisada por Emiliano Aparico Bernardo. (8)

[89] Oakley, C. O. (1949, 1970): *Analytic Geometry with review questions and answers*, Barnes & Noble College outline . Inc. New York . pp.26-27 (165)

[90] Olabarrieta L. (S.J .)(1945) : *Geometría y Trigonometría.* Bilbao. (p 449) (167)

[91] Pedoe, D. (1.988) *Geometry: A Comprehensive Course*, Dover, New York, 1988., (338)

[92] Peiró, R. (1999): *Problemes amb Cabri.* Imprenta rápida Llorens, S.L. Valencia. Edición de autor. (p. 76)(359)

[93] Petersen , J (1901): *Méthodes et théories pour la résolution des problémes de constructions géomètriques* . Gauthier - Villars . (p. 64), problema 330 (143) Problema 363 (256)

[94] Petersen , J . . (1880-1990) . *Métodos y Teorías para la Resolución de Problemas de Construcciones Geométricas.* Gauthier - Villars (1880) , Gabay , J. (1990), problema 179 , p. 33.(170)

[95] Pickover, C.A. (2005): *Las matemáticas de Oz. Gimnasia mental más allá del límite.* Almuzara. (p. 181) (396)

[96] Pogorélov, A. V. (1974) *Geometría elemental.* Editorial Mir. Moscú. Pág. 119.(474)

[97] Polya, G. (1965) *How to solve it.* Decimocuarta reimpresión, 1987, traducción de Julián Zugazagoitia: *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas. México. (489)

[98] Prieto, M. (1992): *Fundamentos geométricos del diseño en ingeniería.* Aula documental de investigación. Madrid. (356)

[99] Puig Adam, *Geometría Métrica, vol. I.* pág. 166. GOMEZ PUIG Ediciones, 15ª edición. Madrid 1980.(366)

[100] Puig Adam, P. (1986): *Geometría Métrica, vol. II*, pág. 316, nº 8. Propuesto en los exámenes de ingreso a la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos, curso 1946-1947.(515)

[101] Quesada, C. (1993): *Construcciones geométricas.* Manuales UNEX, nº13. Cáceres. (349)

[102] Rademacher , H. y Toeplitz , O. (1.970): *Números y figuras.* Alianza Editorial. Madrid. (17)

[103] Recio Muñiz, T .(1998): *Cálculo simbólico y geométrico(Razonamiento Matemático: Cuatro Escenarios)* (Editorial Síntesis). Madrid .(pág 80) (65)

[104] Rendón, A. (2000) *Geometría paso a paso. Volumen 1. Elementos de geometría métrica y sus aplicaciones en arte, ingeniería y construcción.* Editorial Tébar. (p. 78)(399)

[105] Rendón, A. (1997): *Geometría fácil paso a paso. Volumen 1.* Edición de autor. Zaragoza.(p. 63) (379)

[106] Retali V, Biggiogero, G. (1936, 1979) *La geometria del triangolo* en *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementari*, Berzolari, Vivanti and Gigli , editores) Vol II , pp 175. (380)

[107] Rey Pastor, J. (1930): *Curso Cíclico de Matemáticas. Tomo I Las Magnitudes y las funciones elementales, con aplicación a la mecánica, física, química, ingeniería, etc*, (2ª Edición)Madrid- Buenos Aires (p. 137) (130)

[108] Reynaud, Antoine-André-Louis (1771-1844). *Théorèmes et problèmes de géométrie; suivis de la théorie des plans, et des préliminaires de la géométrie descriptive: comprenant la partie exigée pour l'admission à l'École polytechnique*, 10e éd. Paris. 1838.(385)

[109] Rouché - Comberousse . (1929): *Traité de Géomètrie* . Gautier - Villars . París (pág 393) (140)

[110] Rojo, A., Sánchez S.C., Greco, M.(1973). *Matemática 1.* Editorial El Ateneo. Buenos Aires. (página 246). (191)

[111] Ruiz Tapiador, A. (1926): *Nociones y ejercicios de aritmética y geometría* (128, 291)

[112] Saá , M.D . y otros. (1990): *Los ángulos: Un recurso para su aprendizaje.* Secretariado de publicaciones. Universidad de Murcia. (p.110) (177)

[113] Sánchez, E. (1901): *Tablas de logaritmos, trigonométricas y de cálculos de intereses.* Madrid. Pag LXVIII. (164)

[114] Sánchez, A. (1944). *Trigonometría Rectilinea y Esferica*, Librería Internacional de Romo, S.A, Madrid, 1944, problema 13, p.413. (328)

[115] Sánchez, G. (1995): *Conferencia en las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales* . De la Fuente, M. y Torralbo , M. (Eds .): Cultura y Matemáticas. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba. SAEM Thales . (p38) (73, 74, 75, 76)

[116] Sánchez, G. (1.996): *Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos* (pág 16) SAEM Thales . Sevilla. (9)

[117] Sánchez, M .(1983): *Geometría sin esfuerzo.* Círculo de Lectores. Bilbao (10,159)

[118] Sapiña, J. (1955): *Problemas Gráficos de Geometría*, Litograf. Madrid. (Aparejador, Perito Industrial, Profesor) (227, 231, 236, 241, 243, 249, 255, 256, 284)

[119] Segura, S. (1969) *Matemáticas Sexto Curso.* ECIR. Valencia. (p. 75) (148)

[120] Severi , F (1952): *Elementos de Geometría (I), con 220 figuras.* Labor. S.A. Barcelona. (p. 110) (113, 197, 324, 331)

[121] Severi, F. (1952) : *Elementos de geometría II, con 144 figuras*, traducción de la segunda edición italiana por el profesor T. Martín Escobar, de la Escuela Industrial de Gijón. Tercera reimpresión. Editorial Labor, Barcelona. Talleres Gráficos Ibero-Americanos S.A. Reproducción offset. (pág 201) (308)

[122] Shariguin. (1986) *Problemas de Geometría, Planimetría.* Ed. Mir. Moscú.. problema II106. página 88.(414)

[123] Sidler, JC (2000): *Geometrie projective*, 2ª Edition. Dunod. Paris (218, 220)

[124] Smith, D.E. (1.923/1958) *History of mathematics.* Dover Publications, INC. New York. Vol. 1 (pp127) (45)

[125] Smith David Eugene(1929) Feuerbach, *On the Theorem Which Bears His Name* en A Source Book in Mathematics, que a su vez es una traducción del alemán al inglés por el profesor Roger A. Johnson, del Hunter College , Nueva York. (110)

[126] Sortais Y, R. (1997) : *La géométrie du triangle* . Hermann , editeurs des ciences et des arts (Pág . 192) (110)

[127] Terry y Rivas, A. (1881): *Ejercicios de trigonometría.* Pedro Abienzo, Impresor del Ministerio de Marina. (211)

[128] *The Open University (1974): Lógica II - Prueba . Curso básico de Matemáticas*, Libros Mcgraw - hill . México (p. 23), está referenciado el primer caso (Traducción de Hernando Alfonso, Universidad Pedagógica Nacional). (135)

[129] Thompson, J. E.(1967): *Matemáticas al alcance de todos. Geometría.* 2ª Edición. Uteha. México. (p. 9) (348)

[130] Trucios Espinosa, A. *Problemas Selectos de Geometría.* Ed . AGASA. Perú (47, 48)

[131] Ubaldo, Luis. *Triángulos II* (431)

[132] Ubaldo L. (2007): *Seminario de AREAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS en la academia PRE-UNIVERSITARIA Huaraz-Ancash-PERÚ.* (435)

[133] Vázquez, R., y otros (1.971): *Matemática moderna. Segunda Enseñanza. Segundo curso.* Ed . Trillas. México (36)

[134] Vázquez, R. y Ramos, C. (1972): *Matemáticas modernas.* Trillas, México. (pag 250)(299)

[135] Velasco, G. (1983): *Tratado de Geometría.* Limusa . México. (145, 146, 184, 186)

[136] Vila, A., Callejo, M,L. (2004): *Matemáticas para aprender a pensar.* Narcea (pág 136), (269)

[137] Yagloom I. (1973): *Geometric Transformations I.* The Mathematical Association of America . (traducido del ruso al ingles por Allen Shields). (p. 12)(494)

[138] Yiu P. (1998): *Euclidean Geometry* 1998. p.150 (125, 126)