Problema 101

Propuesto por François Rideau
David Puente García

25 de octubre de 2011

Enunciado

Dado un triángulo $\triangle ABC$. Desde un punto S, tracemos las rectas SA, SB y SC. Cortan a la circunferencia circunscrita en A_1, B_1 y C_1, respectivamente.

Se tiene que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle ABC$ son iguales (es decir, hay una permutación P de los puntos ABC tal que los triángulos $\triangle P(A)P(B)P(C)$ y $\triangle A_1B_1C_1$ son isométricos).

Demostrar que no hay más de ocho de tales puntos S en el plano.

Solución

1. Introducción

Al efectuar la transformación sobre los vértices del triángulo $\triangle ABC$, se obtiene el triángulo $\triangle A_1B_1C_1$. A_1, B_1 y C_1 son las imágenes respectivas de A, B y C, esto es, $A \to A_1$, $B \to B_1$ y $C \to C_1$. Como A_1, B_1 y C_1 pertenecen a la circunferencia circunscrita de $\triangle ABC$, denotada por Γ_{cir}, la circunferencia circunscrita de $\triangle A_1B_1C_1$ es la misma que la de $\triangle ABC$, y por tanto también su circuncentro, denotado por O. Los puntos imagen A_1, B_1 y C_1 pueden quedar dispuestos en sentido antihorario alrededor de Γ_{cir} y también en sentido horario.

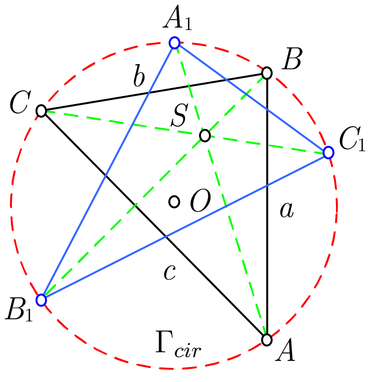


Figura 1: Transformación de $\triangle ABC$.

En vez de resolver el problema directamente, se va a abordar un problema más general. Se va a considerar un triángulo $\triangle A_2B_2C_2$, no necesariamente congruente con $\triangle ABC$, y con la misma circunferencia circunscrita que $\triangle ABC$ (A_2, B_2 y C_2 situados en sentido antihorario alrededor de Γ_{cir}). Se va a estudiar si es posible que al girar $\triangle A_2B_2C_2$ en torno a O se dé uno de estos dos casos:

1. Las rectas AA_2, BB_2 y CC_2 sean concurrentes (en el punto S del enunciado). Luego (A_1, B_1, C_1)=(A_2, B_2, C_2).

2. Las rectas AB_2, BA_2 y CC_2 sean concurrentes (también en el punto S). Luego (A_1, B_1, C_1)=(B_2, A_2, C_2).

Las conclusiones que se van a obtener para el caso 1 serán las mismas que con cualquier permutación cíclica de (A_2, B_2, C_2), es decir, (A_2, B_2, C_2), (B_2, C_2, A_2) o (C_2, A_2, B_2). Análogamente, las conclusiones del caso 2 serán las mismas que con las permutaciones no cíclicas de (A_2, B_2, C_2), es decir, (A_2, C_2, B_2), (C_2, B_2, A_2) o (B_2, A_2, C_2). Nótese que en el caso 1, A_1, B_1 y C_1 están situados en sentido antihorario y en el caso 2, en sentido horario.

2. Lugar geométrico de la intersección de 2 rectas

2.1. Caso 1 - Lugar geométrico de la intersección de las rectas AA_2 y BB_2

Se va a analizar el lugar geométrico que describe la intersección de las rectas AA_2 yBB_2 cuando $\triangle A_2B_2C_2$ gira en torno a O. Las conclusiones serán análogas para cualquier par de rectas de entre las 3 que hay. Se denota $\angle BOA = \alpha_a$ y $\angle B_2OA_2 = \beta_a$, y se asume $\alpha_a \geq \beta_a$. Las 2 rectas se cortan en el punto S. Por conveniencia, se orienta en lado AB en la dirección $\hat{y}$. Se distinguen dos variantes: $\alpha_a + \beta_a \leq 360°$, que llamamos tipo 1, y $\alpha_a + \beta_a > 360°$, que llamamos tipo 2.

2.1.1. Tipo 1 ($\alpha_a + \beta_a \leq 360°$)

Se va a probar que el ángulo que forma S con los vértices A y B es constante cuando S es interior a Γ_{cir} y también es constante cuando S es exterior a Γ_{cir}. Hay tres situaciones posibles de los puntos A_2 y B_2 respecto al arco $\widehat{AB}$ cuando se gira $\triangle A_2B_2C_2$ en torno a O:

1. A_2 y B_2 pertenecen a $\widehat{AB}$ de Γ_{cir}. S se sitúa a la derecha de la recta AB, el ángulo $\varphi_{ae} = \angle ASB$ es exterior a Γ_{cir} y viene dado por

$$\varphi_{ae} = \frac{360° - \angle BOA - \angle B_2OA_2}{2} = 180° - \frac{\alpha_a + \beta_a}{2}.$$

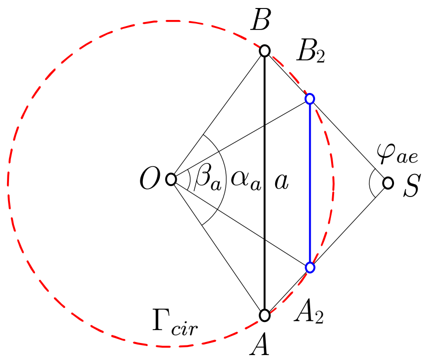


Figura 2: Intersección de las rectas AA_2 y BB_2 cuando A_2 y B_2 pertenecen a $\widehat{AB}$.

2. Si A_2 o B_2 pertenecen a $\widehat{AB}$ (por ejemplo A_2). S se sitúa a la derecha de la recta AB, el ángulo $\varphi_{ae} = \angle ASB$ es exterior a Γ_{cir} y vale también

$$\varphi_{ae} = \frac{360° - (\angle BOA + \angle B_2OA_2 - \angle BOA_2) - \angle BOA_2}{2} = 180° - \frac{\alpha_a + \beta_a}{2}.$$

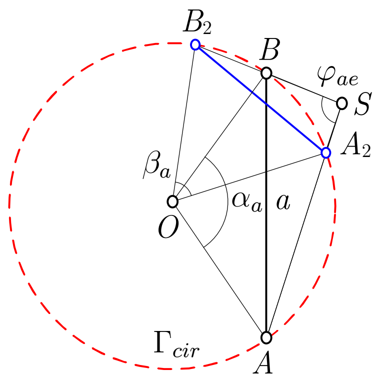


Figura 3: Intersección de las rectas AA_2 y BB_2 cuando A_2 pertenece a $\widehat{AB}$.

3. Ni A_2 ni B_2 pertenecen a $\widehat{AB}$ de Γ_{cir}. S queda a la izquierda de la recta AB, el ángulo $\varphi_{ai} = \angle BSA$ es entonces interior a Γ_{cir} y se calcula como

$$\varphi_{ai} = \frac{\angle BOA + \angle B_2OA_2}{2} = \frac{\alpha_a + \beta_a}{2}.$$

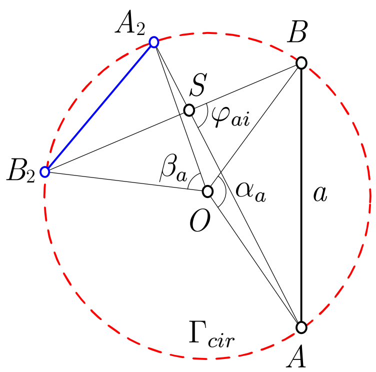


Figura 4: Intersección de las rectas AA_2 y BB_2 cuando ni A_2 ni B_2 pertenecen a $\widehat{AB}$.

Se concluye que cuando S es exterior a Γ_{cir}, $\angle ASB$ es constante, y cuando S es interior a Γ_{cir}, $\angle BSA$ también es constante. Si S es exterior a Γ_{cir}, pertenece al arco capaz del lado a de ángulo

$$\varphi_{ae} = 180° - \frac{\alpha_a + \beta_a}{2}, \tag{1}$$

y si S es interior a Γ_{cir}, pertenece al arco capaz del lado a de ángulo

$$\varphi_{ai} = \frac{\alpha_a + \beta_a}{2}. \tag{2}$$

Como estos ángulos son suplementarios, S describe entonces una circunferencia que pasa por A y B. Aunque se ha tomado $\alpha_a \geq \beta_a$ (para que fuera coherente con las figuras), si $\alpha_a < \beta_a$, se obtiene una circunferencia de las mismas características y que pasa también por A y B.

2.1.2. Tipo 2 ($\alpha_a + \beta_a > 360°$)

Con un análisis análogo al del tipo 1, se prueba que S describe una circunferencia que pasa por A y B. Si S es exterior a Γ_{cir}, se sitúa a la izquierda de la recta AB y pertenece al arco capaz del lado a de ángulo

$$\varphi_{ae} = \frac{\alpha_a + \beta_a}{2} - 180°, \tag{3}$$

y si S es interior a Γ_{cir}, queda a la derecha de la recta AB y pertenece al arco capaz del lado a de ángulo

$$\varphi_{ai} = 360° - \frac{\alpha_a + \beta_a}{2}. \tag{4}$$

Tanto en la variantes tipo 1 como en la tipo 2, los arcos exterior e interior de la circunferencia que pasa por A y B se sitúan siempre en semiplanos distintos (los que define la recta AB).

2.2. Caso 2 - Lugar geométrico de la intersección de las rectas AB_2 y BA_2

En este caso, se va a analizar el lugar geométrico de la intersección de las rectas AB_2 y BA_2 cuando $\triangle A_2B_2C_2$ gira en torno a O. Al igual que en el caso 1, las conclusiones serán análogas con cualquier par de rectas de entre las 3 que hay. Se utiliza la misma notación que en el caso 1.

Con un razonamiento similar al del caso 1, se demuestra que S describe una circunferencia que pasa por A y B. Si S es exterior a Γ_{cir}, S se sitúa a la izquierda de la recta AB cuando $\alpha_a > \beta_a$, y a la derecha cuando $\alpha_a \leq \beta_a$. Pertenece además al arco capaz del lado a de ángulo

$$\varphi_{ae} = \frac{|\alpha_a - \beta_a|}{2}. \tag{5}$$

Si S es interior a Γ_{cir}, queda a la derecha de la recta AB cuando $\alpha_a > \beta_a$, y a la izquierda cuando $\alpha_a \leq \beta_a$. Pertenece al arco capaz del lado a de ángulo

$$\varphi_{ai} = 180° - \frac{|\alpha_a - \beta_a|}{2}. \tag{6}$$

En el caso particular en que $\alpha_a = \beta_a$, las rectas AB_2 y BA_2 son siempre paralelas al girar $\triangle A_2B_2C_2$ en torno a O y no se cortan. Únicamente, cuando $A_2 = A$ y $B_2 = B$, las dos rectas coinciden y hay intersección i.e. toda la recta AB.

En el caso 2, a diferencia del caso 1, se obtiene la misma circunferencia si $\alpha_a + \beta_a \leq 360°$ o $\alpha_a + \beta_a > 360°$. Nótese también que en el caso 2, sí influye que $\alpha_a \geq \beta_a$ o $\alpha_a < \beta_a$.

3. Existencia de solución

3.1. Caso 1

Se ha demostrado que la intersección de cualquier par de rectas (de entre las 3 que intervienen en la transformación) describe una circunferencia. Hay entonces una circunferencia Γ_a que pasa por los vértices A y B, una circunferencia Γ_b que pasa por B y C y una circunferencia Γ_c, que pasa por C y A. Por tanto, para que exista un punto S solución, Γ_a, Γ_b y Γ_c han de cortarse en un mismo punto. Se denota $\angle BOA = \alpha_a$, $\angle COB = \alpha_b$, $\angle AOC = \alpha_c$, $\angle B_2OA_2 = \beta_a$, $\angle C_2OB_2 = \beta_b$ y $\angle A_2OC_2 = \beta_c$.

En el caso 1, de las 3 circunferencias, a lo sumo sólo puede haber una circunferencia que sea tipo 2. Si hubiera 2 ó 3 circunferencias tipo 2, por ejemplo Γ_a y Γ_b, se tendría que cumplir

$$\alpha_a + \beta_a > 360°$$
$$\alpha_b + \beta_b > 360°.$$

Sumando las 2 inecuaciones se tiene que

$$\alpha_a + \beta_a + \alpha_b + \beta_b > 720°,$$

lo que es un absurdo ya que $\alpha_a+\beta_a+\alpha_b+\beta_b < 720°$ ya que $\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c+\beta_a+\beta_b+\beta_c = 720°$. Existen entonces dos situaciones posibles:

1. Γ_a, Γ_b y Γ_c son tipo 1.

2. Dos de las circunferencias Γ_a, Γ_b y Γ_c son tipo 1 y una es tipo 2. Sin pérdida de generalidad, se asume por ejemplo que Γ_a y Γ_b son tipo 1 y Γ_c es tipo 2.

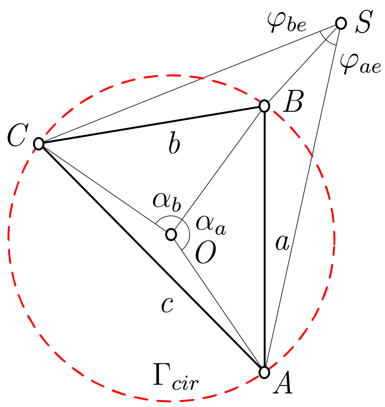


Figura 5: Caso 1 - Corte de Γ_a y Γ_b si S fuera exterior a Γ_{cir}.

Γ_a y Γ_b se cortan obligatoriamente en 2 puntos. El 1º punto de intersección es el vértice B. Si se cortaran sólo en un punto, Γ_a y Γ_b tendrían que ser tangentes en B y los lados AB y BC de $\triangle ABC$, colineales, lo que es un absurdo. El 2º punto de intersección S puede ser en principio exterior o interior a Γ_{cir}. Las rectas AB y BA dividen al plano en 4 regiones disjuntas; Γ_a y Γ_b sólo pueden cortarse en 2 de esas 4 regiones: donde Γ_a y Γ_b son las dos exteriores o las dos interiores a Γ_{cir}. Si S fuera exterior a Γ_{cir}, como se ve en la figura 5, se tendría que cumplir que

$$\angle ABC > \angle ASC. \tag{7}$$

$\angle ABC$ puede calcularse como la suma de $\angle ABO$ y $\angle OBC$ (los triángulos $\triangle ABO$ y $\triangle OBC$ son isósceles), esto es

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 180° - \frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}. \tag{8}$$

$\angle ASC$ es la suma de $\angle ASB$ y $\angle BSC$, calculados como en (1). Se tiene entonces

$$\angle ASC = \angle ASB + \angle BSC = 360° - \frac{\alpha_a + \beta_a}{2} - \frac{\alpha_b + \beta_b}{2}. \tag{9}$$

Sustituyendo (8) y (9) en (7)

$$180° - \frac{\alpha_a + \alpha_b}{2} > 360° - \frac{\alpha_a + \beta_a}{2} - \frac{\alpha_b + \beta_b}{2} \Rightarrow \beta_a + \beta_b > 360°,$$

lo que es un absurdo ya que $\beta_a + \beta_b + \beta_c = 360°$.
Se concluye entonces que el punto S ha de ser interior a Γ_{cir}. Se van a estudiar a continuación dos situaciones según S sea interior o exterior a $\triangle ABC$.

3.1.1. S es interior a $\triangle ABC$

Si S es interior a $\triangle ABC$, se tiene que cumplir que

$$\angle BSA + \angle CSB \geq 180°.$$

$\angle BSA$ y $\angle CSB$ se calculan como en (2), luego

$$\frac{\alpha_a + \beta_a}{2} + \frac{\alpha_b + \beta_b}{2} \geq 180°,$$

que se puede poner en función de α_c y β_c como

$$360° - \frac{\alpha_c + \beta_c}{2} \geq 180° \Rightarrow \alpha_c + \beta_c \leq 360°.$$

Se verifica entonces que si S es interior a $\triangle ABC$, Γ_c es tipo 1.
$\angle ASC$ se puede obtener a partir de $\angle BSC$ y $\angle CSB$ como

$$\angle ASC = 360° - \angle BSA - \angle CSB = \frac{\alpha_c + \beta_c}{2}.$$

Luego S pertenece efectivamente a Γ_{cir} pues $\angle ASC$ es igual al ángulo del arco capaz del lado c cuando S es interior a Γ_{cir}, calculado como en (2).

3.1.2. S es exterior a $\triangle ABC$ (el segmento circular CA)

Con el mismo razonamiento, si se tiene que cumplir que $\angle BSA + \angle CSB > 180°$, se obtiene que $\alpha_c + \beta_c > 360°$. Luego Γ_c es tipo 2.
$\angle CSA$ se calcula a partir de $\angle BSA$ y $\angle CSB$ como

$$\angle CSA = \angle BSA + \angle CSAB = \frac{\alpha_a + \beta_a}{2} + \frac{\alpha_b + \beta_b}{2},$$

que se puede poner en función de α_c y β_c como

$$\angle ASC = 360° - \frac{\alpha_c + \beta_c}{2}.$$

Se verifica también que S pertenece a Γ_c, ya que $\angle ASC$ es igual al ángulo del arco capaz del lado c cuando S es interior a Γ_{cir}, obtenido como en (4).

3.2. Caso 2

Se va a seguir el mismo procedimiento que con el caso 1. Se asume que $\alpha_a \neq \beta_a$, $\alpha_b \neq \beta_b$ y $\alpha_c \neq \beta_c$. Uno de los dos triángulos tendrá 2 de sus 3 ángulos mayores que los correspondientes del otro triángulo, y el ángulo restante será mayor. Sin pérdida de generalidad, se toma como hipótesis que $\alpha_a > \beta_a$, $\alpha_b > \beta_b$ y $\alpha_c < \beta_c$. Nótese que no influye el triángulo que gira, en nuestro caso es $\triangle A_2B_2C_2$, y $\triangle ABC$ es el que queda fijo. Es decir, se puede tomar siempre como triángulo fijo el que verifica que 2 de sus ángulos son mayores que los correspondientes ángulos del otro triángulo. El número de soluciones de los dos problemas problemas es el mismo y se pueden calcular las soluciones de un problema a partir de las del otro (mediante un giro en torno a O).
Al igual que en el caso 1, Γ_a y Γ_b se cortan obligatoriamente en 2 puntos. El 1º punto de intersección es el vértice B. En este caso, el 2º punto de intersección S ha de ser necesariamente exterior a Γ_{cir}. Si S fuera interior, debería ser la intersección de los arcos de Γ_a y Γ_b que son interiores a Γ_{cir}. Pero los arcos interiores a Γ_{cir} de Γ_a y Γ_b pertenecen a regiones disjuntas: los segmentos circulares AB y BC (ver figura 5), por lo que no pueden cortarse entre sí.
$\angle CSA$ puede expresarse a partir de $\angle CSB$ y $\angle BSA$, obtenidos como en (5)

$$\angle CSA = \angle CSB + \angle BSA = \frac{\alpha_a - \beta_a}{2} + \frac{\alpha_b - \beta_b}{2},$$

que se puede poner en función de α_c y β_c como

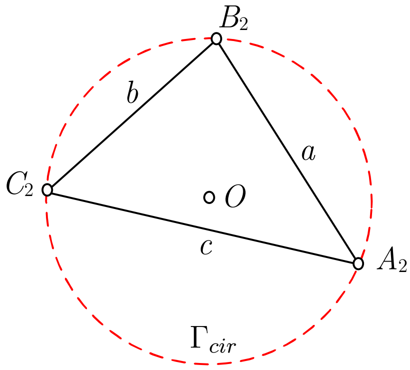
$$\angle CSA = \frac{\beta_c - \alpha_c}{2}.$$

Como por hipótesis $\alpha_c < \beta_c$, se verifica entonces también que S pertenece a Γ_c ya que $\angle CSA$ es igual al ángulo del arco capaz del lado c cuando S es exterior a Γ_{cir}, obtenido como en (5). S se sitúa en el semiplano que le corresponde si $\alpha_c < \beta_c$ (definido por la recta CA).

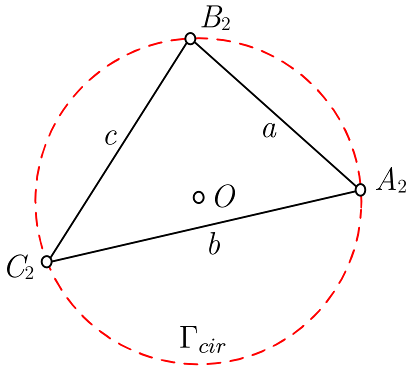
4. Problema original

Se ha probado que para 2 triángulos cualesquiera $\triangle ABC$ y $\triangle A_2B_2C_2$ con igual Γ_{cir} (con $\alpha_a \neq \beta_a$, $\alpha_b \neq b$ y $\alpha_c \neq \beta_c$ para el caso 2), se puede siempre girar $\triangle A_2B_2C_2$ alrededor de Γ_{cir} para que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 sean concurrentes. Además, el ángulo de giro necesario es único (sólo hay una solución).

El problema original es un caso particular del problema estudiado, en el que $\triangle A_2B_2C_2$ es congruente con $\triangle ABC$. $\triangle A_2B_2C_2$ es congruente con $\triangle ABC$ si sus 3 lados congruentes. Nótese que no necesariamente los lados de $\triangle A_2B_2C_2$ han de estar ordenados en el mismo sentido (horario o antihorario) que los de $\triangle ABC$. Luego para un triángulo $\triangle ABC$, hay en principio 2 triángulos congruentes con él como se muestra en la figura 6. Esto es equivalente a que los 3 lados de $\triangle ABC$ se pueden transformar en cualquier permutación de los lados de $\triangle ABC$ y además se puede hacer en principio según el caso 1 ó 2[1]. Por tanto, el problema tendría a lo sumo $2 \cdot 3! = 12$ ángulos de giro solución. Hay 6 subcasos del caso 1 y 6 subcasos del caso 2. Cada manera de obtener $\triangle A_2B_2C_2$ congruente con $\triangle ABC$, se va a caracterizar en función de qué lado se transforma en cuál, por ejemplo $a \to a$, $b \to b$, $c \to c$[2]. Si un lado se transforma en sí mismo, se expresa como $i \to i$, $i \in \{a, b, c\}$. El valor del ángulo central que le corresponde al lado imagen del lado i de $\triangle ABC$ se denota por γ_i (definido de forma equivalente a como se ha hecho con α_i).



(a) Lados en sentido antihorario.



(b) Lados en sentido horario.

Figura 6: Triángulos congruentes con $\triangle ABC$.

Se van a examinar las soluciones del caso 2 en las que $i \to i$ (no se pueden estudiar como el corte de Γ_a, Γ_b y Γ_c). De los 6 subcasos posibles del caso 2, hay 4 en que se cumple $i \to i$ en alguno de los 3 lados.

[1]También se puede ver como que el caso 1 corresponde a las permutaciones cíclicas de $\{A_2, B_2, C_2\}$ y el caso 2 a las permutaciones no cíclicas.

[2]En este ejemplo, $a \to a$ quiere decir que la imagen de a (el segmento A_1B_1) tiene la misma longitud que el lado a de $\triangle ABC$ (el segmento AB).

4.1. Soluciones en el caso 2 con $i \to i$

4.1.1. $a \to a$, $b \to b$, $c \to c$ (1 subcaso)

Se tiene entonces que $\gamma_a = \alpha_a$, $\gamma_b = \alpha_b$ y $\gamma_c = \alpha_c$. La única solución posible para que cualquier par de rectas (de entre las 3 que hay) se corten es que las rectas sean coincidentes. Luego las rectas AB, BC y CA tendrían que cortarse en un mismo punto, lo que es un absurdo (se cortan en los vértices de $\triangle ABC$ que son 3 puntos). Por tanto, el problema tiene a lo sumo $12 - 1 = 11$ soluciones posibles.

4.1.2. Sólo un lado cumple $i \to i$ (3 subcasos)

Sin pérdida de generalidad se va considerar el subcaso en que $\gamma_b = \alpha_b$, $\gamma_a \neq \alpha_a$ y $\gamma_c \neq \alpha_c$; con lo que $B_1 = C$ y $C_1 = B$. C_1 tiene que pertenecer al arco $\widehat{AB}$, que mide $\alpha_a + \alpha_c$. La única solución es que $C_1 = C$ de forma que $\gamma_a = \alpha_c$ y $\gamma_c = \alpha_a$. Luego el punto S es la intersección de la recta AB con la recta tangente a Γ_{cir} en A como se muestra en la figura 7. Se verifica entonces que $\triangle ABC$ y la imagen de éste coinciden.

Si $\triangle ABC$ es isósceles con el lado desigual BC, no hay solución porque la recta AB y la tangente a Γ_{cir} en A son paralelas; pero sí hay solución en las otras 2 soluciones posibles en que $\gamma_b = \alpha_b$ y $\gamma_a = \alpha_a$. Además, en los 2 subcasos restantes del caso 2 en que ningún lado $i \to i$: $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$ y $a \to c$, $b \to a$, $c \to b$; en uno de los lados iguales del triángulo isósceles, se cumple que $\gamma_i = \alpha_i$. Luego S está sobre la recta que pasa por ese lado y se obtiene de la misma forma que en los subcasos discutidos en este apartado. Por tanto, si $\triangle ABC$ es isósceles, hay $11 - 1 - 2 = 8$ soluciones posibles.

Si $\triangle ABC$ es equilátero, $\gamma_a = \gamma_b = \gamma_c = \alpha_a = \alpha_b = \alpha_c$ en todos los subcasos del caso 2. Luego no existe solución en ningún subcaso (por la misma razón en que $a \to a$, $b \to b$, $c \to c$ del caso 2). Luego hay $11 - 5 = 6$ soluciones posibles.

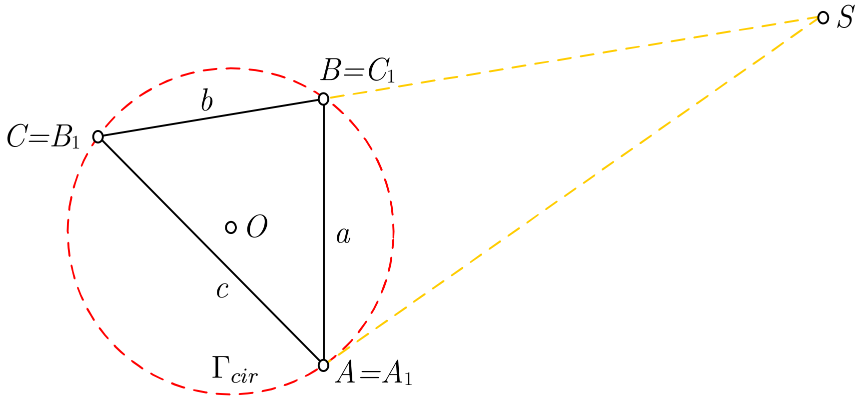


Figura 7: Caso 2 con $\gamma_b = \alpha_b$ (solución sobre la recta BC).

4.2. Número de puntos S solución

Se ha probado que para cada manera de obtener $\triangle A_2B_2C_2$ congruente con $\triangle ABC$, existe un único ángulo de giro solución en cada una ellas. Según sea el triángulo, se tiene:

- **Escaleno**: 11 ángulos de giro solución.
- **Isósceles**: 8 ángulos de giro solución.
- **Equilátero**: 6 ángulos de giro solución.

Hay que analizar si el punto S intersección se repite entre alguno de los ángulos de giro para obtener el número de puntos S solución distintos entre sí[3]. En el caso 1, S es siempre interior a Γ_{cir}, y en el caso 2, siempre exterior. Los subcasos del caso 2 en que hay soluciones sobre las rectas AB, BC y CA dan lugar a puntos S distintos, porque todos ellos están fuera de Γ_{cir} y pertenecen a rectas distintas (los puntos de intersección de las rectas AB, BC y CA: los vértices A, B y C no puede nunca ser solución porque las imágenes de 2 puntos coincidirían). Los puntos solución sobre estas rectas no pueden coincidir tampoco con los de los otros subcasos del caso 2 (que se calculan como intersección de Γ_a, Γ_b y Γ_c) porque estas rectas sólo cortan a la circunferencias en los vértices de $\triangle ABC$.

Para estudiar si hay el mismo punto S entre los subcasos que se estudian como intersección de Γ_a, Γ_b y Γ_c, se consideran 2 lados cualesquiera, por ejemplo los lados a y b de $\triangle ABC$. Se asume además que Γ_a y Γ_b son tipo 1 para el caso 1 (Γ_c puede ser tipo 1 ó 2). Se sabe que el punto S es la intersección de Γ_a y Γ_b que está dentro de Γ_{cir} (el otro punto de intersección es B, que pertenece a Γ_{cir}). S pertenece entonces al arco de Γ_a que es interior a Γ_{cir}, que a su vez es el arco capaz del lado a de un cierto ángulo. Lo mismo ocurre con el arco de Γ_b en que se haya S.

Para que se tenga el mismo punto solución S en 2 subcasos, los ángulos de los arcos capaces correspondientes a los arcos interiores de Γ_a y Γ_b deberían ser iguales en los 2 subcasos. Ya que si fueran distintos, S pertenecería a una circunferencia distinta y no se obtendría el mismo punto. Hay que determinar en qué subcasos del caso 1 (de los 6 que hay) se tiene el mismo punto S y si en los 2 subcasos del caso 2 (de un triángulo escaleno)[4] se tiene el mismo punto S.

En el caso 1, utilizando (2) se tiene que cumplir

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_a + \alpha_i}{2} &= \frac{\alpha_a + \alpha_j}{2} \\ \frac{\alpha_b + \alpha_k}{2} &= \frac{\alpha_b + \alpha_m}{2}, \end{aligned} \tag{10}$$

con $i \neq j$, $m \neq k$, $i \neq k$, $j \neq m$ y con $i, j, k, m \in \{a, b, c\}$.

Se deduce que $\alpha_j = \alpha_i$ y $\alpha_k = \alpha_m$. Si $\triangle ABC$ es escaleno, se asume por ejemplo $\alpha_a > \alpha_b > \alpha_c$. Pero debe cumplirse que $\alpha_i = \alpha_j$ con $i \neq j$, lo que es un absurdo pues $\alpha_a > \alpha_b > \alpha_c$; por lo que no hay 2 subcasos con el mismo punto S. Si $\triangle ABC$ es isósceles y por ejemplo $\alpha_a = \alpha_b \neq \alpha_c$, las 2 soluciones son: $i = a$, $j = b$, $k = b$, $m = a$ o $i = b$, $j = a$, $k = a$, $m = b$. Con los otros 4 subcasos, se llega a que $\alpha_a = \alpha_b = \alpha_c$, lo que es un absurdo porque el triángulo es isósceles y $\alpha_b \neq \alpha_c$. Por tanto, en un triángulo $\triangle ABC$ isósceles, hay 2 subcasos del caso 1 con la misma solución. Se puede utilizar un razonamiento análogo si $\alpha_b = \alpha_c \neq \alpha_a$ o $\alpha_a = \alpha_c \neq \alpha_b$. Si $\triangle ABC$ es equilátero, en los 6 subcasos del caso 1, se cumple (10) y todos dan lugar al mismo punto S.

[3]Los ángulos de giro sí pueden ser iguales entre sí.

[4]Son los 2 subcasos en lo que el punto S no está sobre una de las rectas AB, BC o CA. Es decir, se estudian mediante la intersección de Γ_a, Γ_b y Γ_c.

En los 2 subcasos del caso 2 (de un triángulo escaleno), usando (5) se tendría que cumplir

$$\frac{|\alpha_a - \alpha_i|}{2} = \frac{|\alpha_a - \alpha_j|}{2}$$
$$\frac{|\alpha_b - \alpha_k|}{2} = \frac{|\alpha_b - \alpha_m|}{2},$$

con $i \neq j$, $m \neq k$, $i \neq k$ y $j \neq m$.

Las 2 soluciones posibles serían: $i = c$, $j = b$, $k = a$, $m = c$ o $i = b$, $j = c$, $k = c$, $m = a$. Se asume por ejemplo que $\alpha_a > \alpha_b > \alpha_c$, y como $b \neq k$, $b \neq m$ y $m \neq k$, se cumple $\alpha_b > \alpha_k$, $\alpha_b < \alpha_m$ o $\alpha_b < \alpha_k$, $\alpha_b > \alpha_m$. Es decir, el arco exterior a Γ_{cir} de Γ_b (S pertenece siempre al arco exterior) queda en un semiplano distinto (definido por la recta BC) en cada subcaso, por lo que los 2 subcasos no pueden tener el mismo punto S.

Finalmente, se tiene que el número de puntos distintos solución S según el tipo de triángulo son:

- **Escaleno**: 11 puntos S distintos.
- **Isósceles**: $8 - 1 = 7$ puntos S distintos.
- **Equilátero**: $6 - 5 = 1$ punto S.