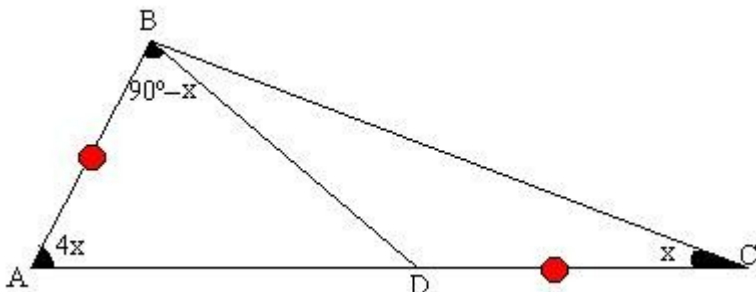


**Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo. Profesor de I.E.P "San Francisco de Asís".
(Huaral), de Perú.**

Problema 626

En la siguiente figura, calcular el valor de "x"



Triángulo ABC, con D sobre el interior de AC, $AB=DC$, $\angle BAC=4 \angle BCA$, $\angle ABD=90- \angle BCA$.

Origen desconocido

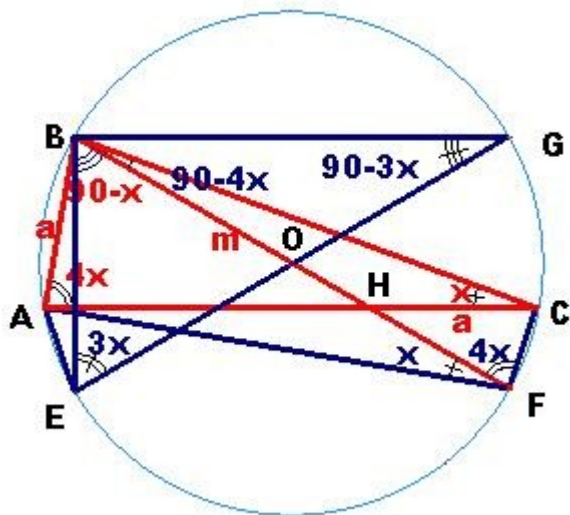
Trazamos una circunferencia circunscrita al triángulo dado y la isogonal BE con BH, lo que determina dos triángulos semejantes: triángulo HBC y triángulo ABE por cuanto que el ángulo en C = x es igual en AEB = x ya que están inscritos en el mismo arco capaz; lo mismo predicamos en $\angle CBF = \angle ABE = 90-4x$ por construcción, de donde se deduce que el ángulo BHC, *obtuso*, es igual

BAE obtuso.

Prolongamos el segmento BH = m hasta la intersección con la circunferencia en F y unimos su extremo a vértices C y A.

Ahora tenemos dos nuevos triángulos rectángulos:

Uno el BCF, donde el ángulo en BFC = 4x es igual al BAC = 4x por ser ángulos inscritos en el mismo arco capaz que subtiende la cuerda BC; sumando los ángulos en B = 90-4x y en F = 4x se deduce que el ángulo en C es recto, y todo ángulo recto inscrito en una circunferencia tiene por hipotenusa el diámetro de la misma; así pues, BF es uno de los posibles diámetros. Los ángulos x en C y en F, junto con el ángulo BEA son iguales por inscritos en el mismo arco capaz.



El otro triángulo recto es BAF.

El ángulo en BAF = 90-x + x tiene por hipotenusa al diámetro BF.

Por E trazamos el diámetro EG y lo unimos al punto B y obtenemos un nuevo triángulo recto inscrito, GBE.

Dicho lo anterior, paso a la solución:

$AE / BE = HC / BC$, por semejanza de triángulos

$AE = CF$, por igualdad de ángulos en B e inscritos en la misma circunferencia.

$HC = AB = a$, por construcción

sustituimos AE y HC por CF y AB

$$CF / BE = AB / BC$$

$$CF \cdot BC = AB \cdot BE$$

multiplicando ambos términos por dos

$$2 \cdot CF \cdot BC = 2 \cdot AB \cdot BE$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad por $D \cdot D$,

$$BF = EG = D \quad (D = \text{diámetro})$$

$$CF / D = \cos 4x : BC / D = \sin 4x : AB / D = \sin x : BE / D = \cos 3x ,$$

nos da el siguiente desarrollo:

$$\sin 4x \cdot \cos 4x = \sin x \cdot \cos 3x$$

$$2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos 3x$$

de donde

$$2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x = \sin 8x [\sin (a+a)]$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos 3x = \sin 4x - \sin 2x [\sin (a+b) - \sin (a-b)]$$

de donde

$$\sin 8x = \sin 4x - \sin 2x$$

$$\sin 8x - \sin 4x = - \sin 2x$$

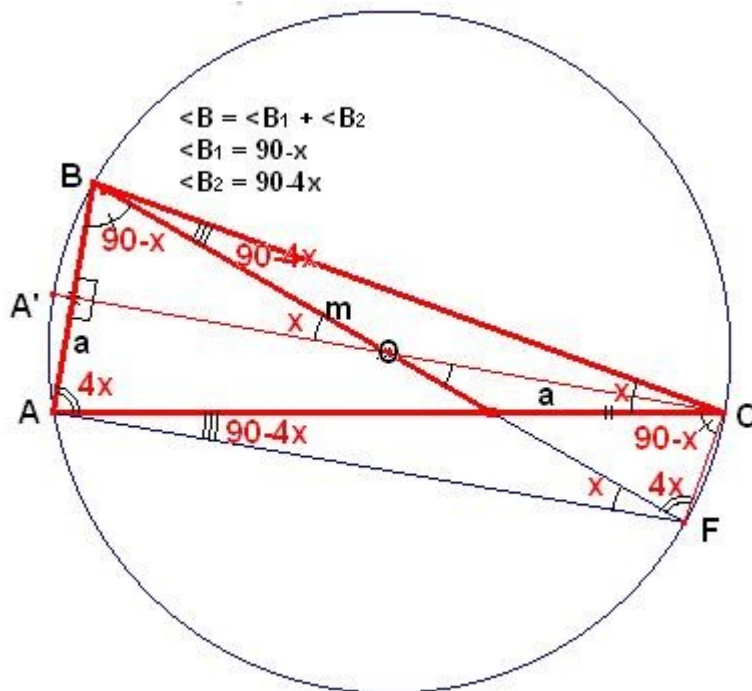
$$2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 6x = - \sin 2x$$

$$\cos 6x = - 1/2$$

$$x = 1/6 \arccos(-1/2) = 20^\circ$$

Otra solución:

Inscribimos el triángulo dado en la circunferencia circunscrita al mismo.



Trazamos el diámetro, eje de simetría de la circunferencia, $A'C$ al punto medio del arco AB que subtiende la cuerda AB y queda dividido en dos parte iguales así como el ángulo inscrito en el arco mayor que subtiende esa cuerda, y como una recta queda determinada al pasar por dos puntos, en este caso el centro de la circunferencia y el punto medio del arco menor, se cumple que pasa por el punto medio de la cuerda y es perpendicular a ella, dividiendo también al arco mayor en dos partes iguales.

De ahí deducimos que el ángulo en A es igual al ángulo en B , luego tenemos que

$$90 - x + 90 - 4x = 4x : 180 = 9x : x = 20^\circ$$

De otra forma, en el triángulo BOC se cumple que $BO = OC$ son radios.

BO pertenece al diámetro opuesto al ángulo recto en C , que se determina por la prolongación del segmento dado, m , hasta la circunferencia, F , y uniendo este extremo al vértice C . El ángulo $BCF = 90$ (la hipotenusa de todo ángulo recto inscrito en una circunferencia es un diámetro de la misma)

es la suma $\text{BCA} + \text{ACF} = x + (90-x)$.

El ángulo $\text{ACF} = 90-x$ tiene la misma amplitud que el dado en $\text{B} = 90-x$, ya que están inscritos en el mismo arco capaz, ABC , que subtiende la cuerda AF y con la misma amplitud de arco AF .

El triángulo BOC , por isósceles, nos determina que

$$90-4x = \frac{1}{2} x \quad : \quad 180 = 9x \quad : \quad x=20^\circ$$

O como la cuerda AB es perpendicular a los segmentos A'C y AF , estos son paralelos; y, por ángulos alternos internos, obtenemos

$$90-4x = \frac{1}{2} x \quad : \quad 180 = 9x \quad : \quad x=20^\circ$$

De otra forma más expeditiva, determinado que el triángulo dado es isósceles al cumplir que el diámetro A'C es perpendicular a la cuerda AB que la divide en dos partes iguales y por simetría del radio tenemos

$$\text{arco BC} = 8x = \text{arco AFC}$$

$$\text{arco BA} = 2x$$

$$\text{suma arcos BC+BA+AFC} = 360^\circ = 18x \quad : \quad x = 360 / 18 = 20^\circ$$

Desarrollado por: *José Manuel Rodríguez Roza*