

Problema 627 de triángulos cabri. Sea ABC un triángulo acutángulo inscrito en la circunferencia Ω de centro O . Sean los puntos B', C' sobre Ω tales que los triángulos $AB'B$ y $AC'C$ sean rectángulos en A . Sea H_a el pie de la altura trazada por A a su lado opuesto BC .

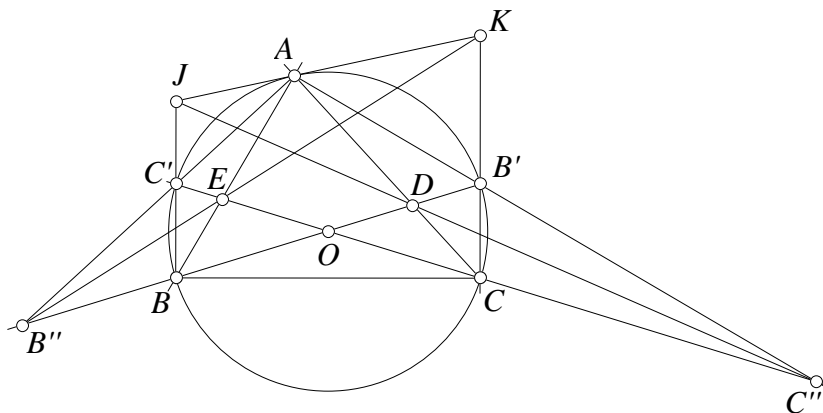
Sean los puntos $C'' = AB' \cap OC$, $B'' = AC' \cap OB$, $D = AC \cap BB'$, $E = AB \cap CC'$ y los puntos $J = BC' \cap C''D$ y $K = CB' \cap B''E$. Demostrar que:

- Las rectas AH_a , $B''E$ y $C''D$ son concurrentes.
- Los puntos A , J y K están alineados.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

Solución de *Francisco Javier García Capitán*

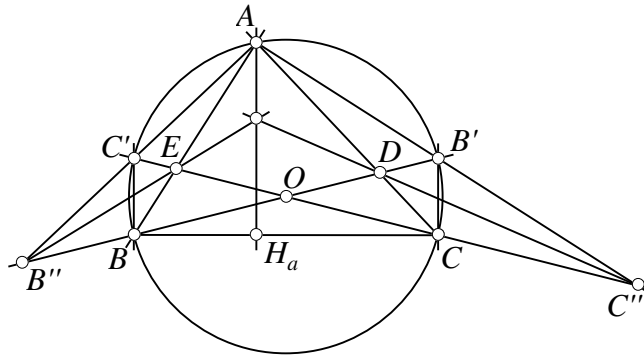
Veamos que el enunciado *b)* es cierto cualesquiera que sean los puntos B' y C' sobre la circunferencia Ω . Es más, podemos considerar incluso que A, B, C, B', C' son puntos cualesquiera sobre una cónica Ω .



Aplicando el teorema de Pascal al hexágono $AACC'B'B'$, tenemos que los puntos $J' = AA \cap C'B$, $D = AC \cap BB'$ y $C'' = CC' \cap B'A$ están alineados. Por tanto, el punto $J = BC' \cap C''D = J'$ está sobre la tangente a Ω en el punto A .

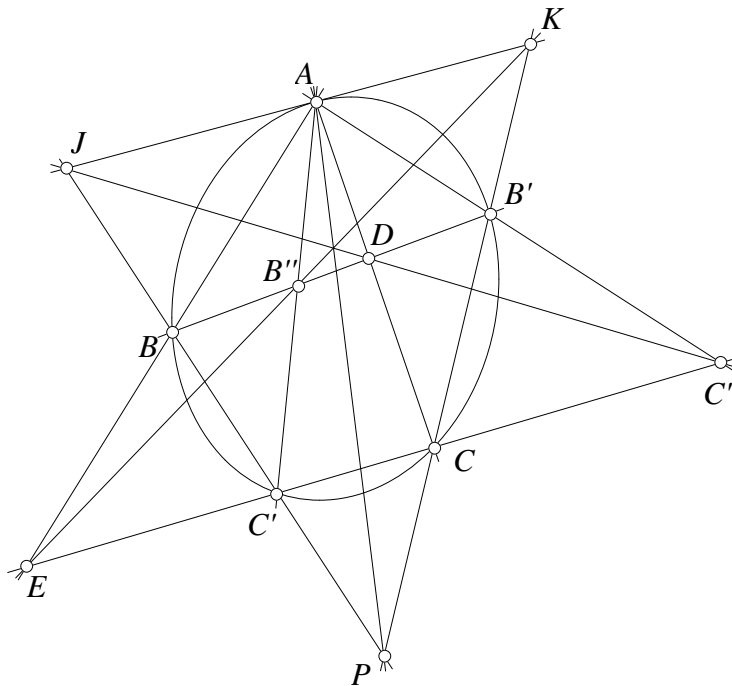
Razonando de forma similar, demostraríamos que K también está sobre dicha tangente, por lo que A , J y K están alineados, y así el apartado *b)* queda resuelto.

Para resolver el apartado *a)*, observamos que los puntos B' y C' son los simétricos de B y C respecto del centro O , resultando que BC' y CB' son perpendiculares a BC . Por tanto, las rectas BC' , AH_a y CB' son paralelas.



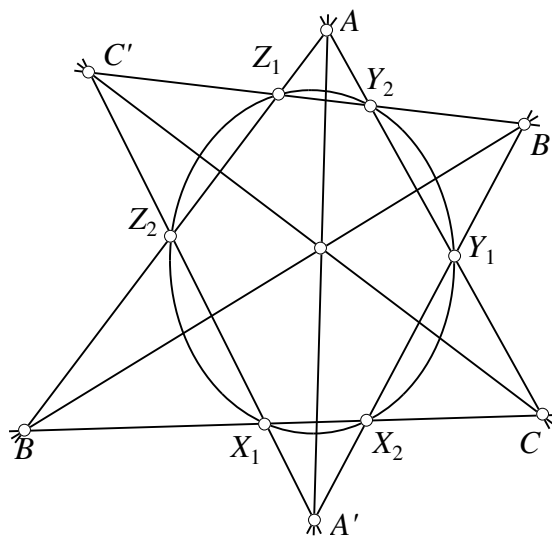
Podemos considerar el apartado a) como caso particular del problema siguiente, en el que se ha sustituido el punto del infinito de la altura AH_a por un punto arbitrario P .

Problema 1. Sean ABC un triángulo inscrito en una cónica Ω y sean P un punto del plano. Sean B', C' las segundas intersecciones de las rectas PC y PB a la cónica. Consideramos los puntos $C'' = AB' \cap CC'$, $B'' = AC' \cap BB'$, $D = AC \cap BB'$, $E = AB \cap CC'$. Entonces las rectas AP , $B''E$ y $C''D$ son concurrentes.



Según hemos visto en la solución del apartado b), si consideramos los puntos $J = BC' \cap C''D$ y $K = CB' \cap B''E$, tenemos que la recta JK es la tangente a Ω trazada por A . Por tanto, el Problema 1 puede verse como un caso límite de este otro:

Problema 2. Una cónica corta a los lados BC , CA , AB del triángulo ABC en los pares de puntos $X_1, X_2; Y_1, Y_2; Z_1, Z_2$. Demostrar que el triángulo $A'B'C'$ formado por las rectas Y_2Z_1, Z_2X_1 y X_2Y_1 es perspectivo con ABC .



Solución. Según el teorema de Desargues, aplicado al triángulo ABC ,

ABC y $A'B'C'$ son perspectivos

$\Leftrightarrow BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ y $AB \cap A'B'$ están alineados

$\Leftrightarrow X_1X_2 \cap Y_2Z_1, Y_1Y_2 \cap Z_2X_1$ y $Z_1Z_2 \cap X_2Y_1$ están alineados,

y ésto último es cierto, ya que el resultado de aplicar el teorema de Pascal al hexágono $X_2X_1Z_2Z_1Y_2Y_1$.

Observaciones

Vemos entonces que el análisis realizado, llevando el enunciado al campo de la geometría proyectiva, ha permitido no sólo generalizar el enunciado, sino que ello ha conducido además a encontrar una solución muy simple basada en los teoremas de Pascal y Desargues. Y, finalmente, la hipótesis de triángulo acutángulo se revela como innecesaria y el enunciado es cierto para cualquier tipo de triángulo.