

### Problema 635.

Cuestiones para resolver:

**XXI** Demostrar que el área de un triángulo es igual al producto del radio de la circunferencia circunscrita por el semiperímetro del triángulo órtico.

(Nota del director: La propiedad es correcta en el caso de ser el triángulo acutángulo o rectángulo (en este caso el triángulo órtico degenera))  
Guiu, M. y Páez, F. (1935):

Exposición didáctica de cuestiones geométricas destinada a facilitar la preparación para concursos de ingreso en Academias y Escuelas de carreras científicas. Tomo I 1ª Edición. Barcelona

Bosch Casa editorial, Apartado 928

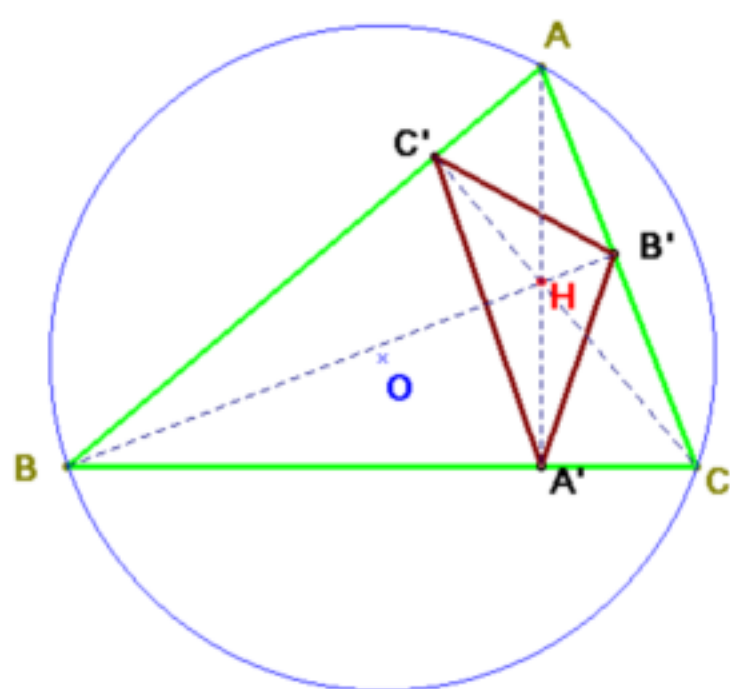
En la enseñanza de las matemáticas existe siempre una necesidad bilateral: El profesor, procurando dar firme posesión de las materias que según plan explica, resuelve algunos ejercicios en clase y propone otros al alumno para que este los resuelva...

Esta referencia está tomada de un ejemplar que se conserva en la Biblioteca del [IES San Isidoro](#) de Sevilla.

El director agradece a la Directora del mismo, María Luz Casares Rocha la gentileza por el permiso para consultarla.

[Referencia en Gogle books](#)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas en el I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.



Los triángulos formados por dos vértices del triángulo órtico  $T'$  y otro del dado  $T$  son semejantes a éste. La razón de semejanza es el coseno del ángulo correspondiente. Por tanto los lados del triángulo órtico son  $a' = B'C' = a \cos A$  y expresiones análogas los otros dos.

El perímetro del triángulo  $T'$  es, por tanto:  $a \cos A + b \cos B + c \cos C$ . Si  $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita, del teorema de los senos se tiene  $a = 2R \sin A$ , y entonces el valor del perímetro de  $T'$  por  $R$  es:

$$2R^2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C) = R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

Por otro lado se tiene:  $2\text{Área}(ABC) = bc \sin A = 4R^2 \sin A \sin B \sin C$ .

Para concluir el problema bastará que demostremos que es una identidad la relación

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C \quad (*)$$

Sustituiremos el ángulo  $C$  en función de  $A$  y  $B$  y veremos cómo se transforman los dos miembros de la igualdad.

$$\sin 2C = \sin(-2A - 2B) = -\sin 2A \cos 2B - \sin 2B \cos 2A$$

Llevado al primer miembro de (\*) tendremos:

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= \sin 2A(1 - \cos 2B) + \sin 2B(1 - \cos 2A) = 2(\sin 2A \sin^2 B \\ &+ \sin 2B \sin^2 A) \end{aligned}$$

$$\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

Aplicándola al segundo miembro:

$$\begin{aligned} 4 \sin A \sin B \sin C &= 4(\sin^2 A \sin B \cos B + \sin^2 B \sin A \cos A) \\ &= 2(\sin^2 A \sin 2B + \sin^2 B \sin 2A) \end{aligned}$$

Con esto queda concluido el problema. ■