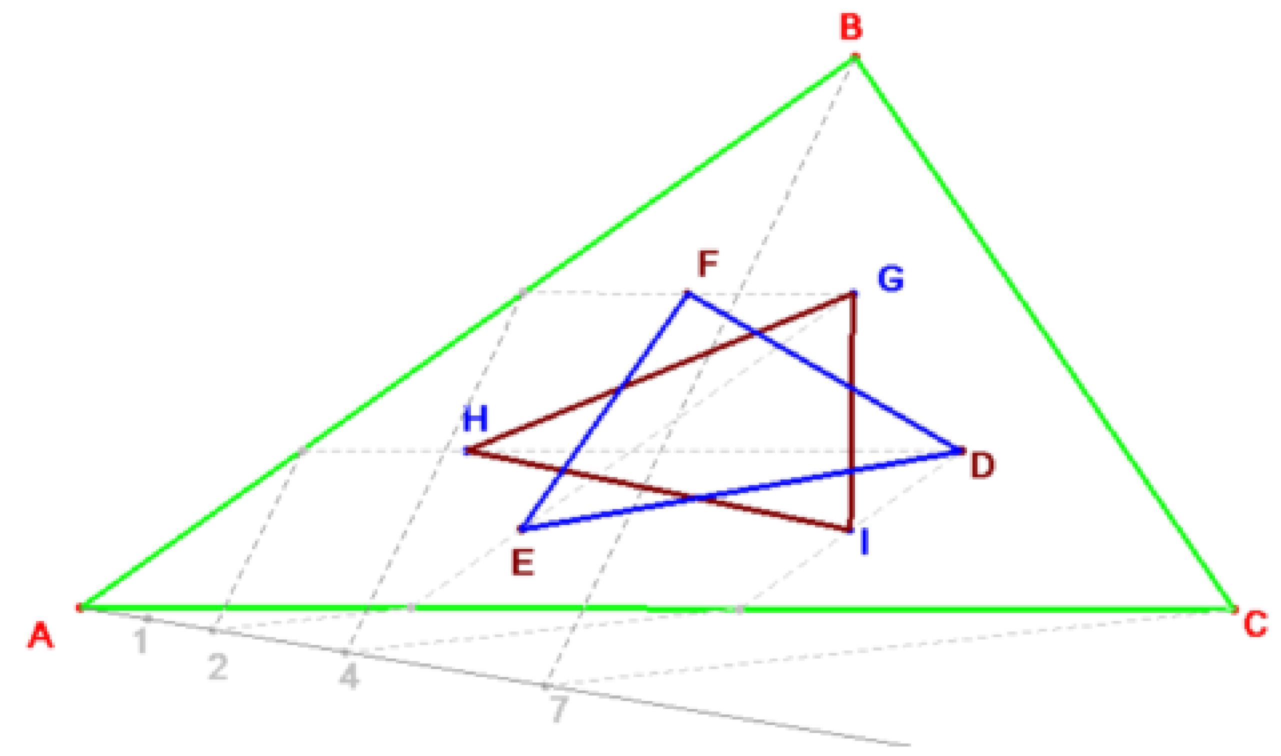
***Problema* 636.-** *Dado un triángulo ABC, hallar dos triángulos DEF y GHI tales que el simétrico de D respecto a E sea A, el simétrico de E respecto de F sea B y el simétrico de F respecto de D sea C y que el simétrico de G respecto a H sea A, el simétrico de H respecto de I sea C y el simétrico de I respecto de G sea B. Hallar los lados de los dos triángulos DEF y GHI en función de a, b y c, lados de ABC*

Barroso, R (2012): Comunicación personal. Dedicado a mi compañero y amigo José Real Anguas. In memoriam.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.



Los triángulos *DEF* y *GHI* quedarán construidos en cuanto fijemos las posiciones de los puntos *D* y *G*.

Tomando como base los vectores *AB* y *AC* podemos poner:

$AE = \frac{1}{2}AD;$ $\qquad BF = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}(AE - AB) = \frac{1}{4}AD - \frac{1}{2}AB.$

$AD - AC = CD = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}(AF - AC) = \frac{1}{2}(BF - BA - AC).$

Sustituyendo *BF* obtenemos $AD - AC = \frac{1}{8}AD + \frac{1}{4}AB - \frac{1}{2}AC.$

De ahí podemos despejar *AD* obteniendo:

$$AD = \frac{2}{7}AB + \frac{4}{7}AC \qquad (1)$$

El triángulo *GHI* se construye igual pero permutando *B* y *C*. Por tanto se tendrá

$$AG = \frac{2}{7}AC + \frac{4}{7}AB \qquad (2)$$

Calculemos ahora la longitud de los lados de estos triángulos.

$$ED = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{7}AB + \frac{2}{7}AC; \qquad (3)$$

$$DF = CD = AD - AC = \frac{2}{7}AB - \frac{3}{7}AC; \qquad (4)$$

$$EF = ED + DF = \frac{1}{7}AB + \frac{2}{7}AC + \frac{2}{7}AB - \frac{3}{7}AC = \frac{1}{7}(3AB - AC) \qquad (5)$$

Para los lados del triángulo *GHI* se obtendrían los vectores correspondientes permutando *B* y *C*.

Para calcular la longitud de los lados efectuamos el producto escalar consigo mismo y aplicamos el teorema del coseno.

Con *DE* se tendrá:

$7^2(DE \cdot DE) = AB \cdot AB + 4AC \cdot AC + 4AB \cdot AC$. Pero $2AB \cdot AC = 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$. Con esto resulta finalmente $7^2(DE \cdot DE) = c^2 + 4b^2 + 2(b^2 + c^2 - a^2) = -2a^2 + 6b^2 + 3c^2$.

$|DE| = \frac{1}{7}\sqrt{-2a^2 + 6b^2 + 3c^2}.$

Para *DF*, siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$|DF| = \frac{1}{7}\sqrt{-2c^2 + 6a^2 + 3b^2}.$

Y por último

$|EF| = \frac{1}{7}\sqrt{-2b^2 + 6c^2 + 3a^2}.$

Permutando *b* y *c* se obtienen las medidas del otro triángulo (las permutaciones $\begin{pmatrix} D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$ sirven para obtenerlas):

$|GH| = \frac{1}{7}\sqrt{-2a^2 + 6c^2 + 3b^2}$

$|GI| = \frac{1}{7}\sqrt{-2b^2 + 6a^2 + 3c^2}$

$|HI| = \frac{1}{7}\sqrt{-2c^2 + 6b^2 + 3a^2}.$ ■