

# Problema 81

De Jordi Dou, propuesto por el profesor Juan-Bosco Romero  
David Puente García

16 de enero de 2010

## Enunciado

Sea  $T$  un triángulo rectángulo isósceles. Sea  $S$  el círculo tal que la diferencia entre las áreas de  $T$  unión con  $S$  y de  $T$  intersección con  $S$  es mínima. Demostrar que el centro de  $S$  divide a la altura sobre la hipotenusa de  $T$  en el número de oro.

## Solución

### 1. Notación

$T$  es un triángulo isósceles rectángulo  $ABC$ , con catetos de longitud  $\sqrt{2}l$  unidades.

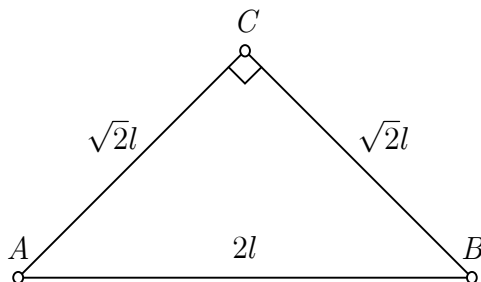


Figura 1: Triángulo isósceles rectángulo  $T$

El área a minimizar  $A_d$  es la diferencia entre el área de la unión  $U_u$  y el área de la intersección  $A_i$

$$A_d = A_u - A_i. \quad (1)$$

Si denotamos al área de  $T$   $A_t$  y al área de  $S$   $A_s$ ,  $A_d$  se puede obtener también como

$$A_d = A_t + A_s - 2A_i. \quad (2)$$

## 2. Clasificación de los tipos de configuración

Llamamos configuración a una posible solución al problema, que viene definida por<sup>1</sup>:

1. Posición del centro  $O$  de  $S$  sobre la mediatriz de  $AB$  (en la que está contenida la altura sobre la hipotenusa).
2. Radio  $r$  de  $S$ .

Se va a probar que la configuración que minimiza  $A_d$  ha de ser tal que  $S$  corte a los 3 lados de  $T$  en 2 puntos y centro  $O$  contenido en  $CD$  como ilustra la figura siguiente.

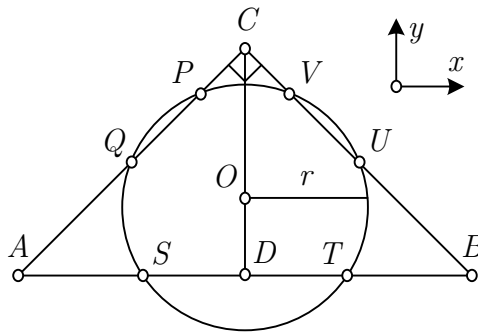


Figura 2: Configuración óptima del problema

Para ello, vamos a demostrar que para cualquier configuración, existe una configuración como la de la figura 2 con menor o igual  $A_d$ .

### 2.1. Caso de la circunferencia inscrita

Es un caso particular de la configuración de la figura 2, en el que los 2 puntos de cortes sobre cada lado coinciden. Calculamos el radio de la circunferencia inscrita  $r_{in}$ , que es tangente a  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$ . El radio con el punto de tangencia es perpendicular a cada lado.

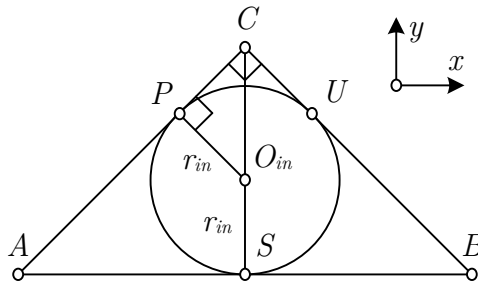


Figura 3: Caso de la circunferencia inscrita

<sup>1</sup>Para no extender en exceso la demostración, se han considerado sólo los casos en los que el centro  $O$  de  $S$  está en la mediatriz  $r$  de  $AB$ . Se puede probar que para todos los casos que no son de este tipo, se puede hallar un caso con  $O$  en  $r$  con igual  $A_d$ .

La altura sobre la hipotenusa mide  $l$  unidades. El triángulo  $PO_{in}C$  es isósceles porque  $\angle PO_{in}C$  y  $\angle O_{in}CP$  miden  $45^\circ$ . Se tiene entonces

$$2r_{in} \cos 45^\circ + r_{in} = l \Rightarrow r_i = \frac{l}{1 + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)l.$$

Para este caso,  $A_i = A_s$  y se puede calcular  $A_d$ , que denominamos  $A_d^{in}$ , con (2)

$$A_d^{in} = \underbrace{l^2}_{A_t^{in}} + \underbrace{\pi l^2(3 - 2\sqrt{2})}_{A_s^{in}} - 2 \underbrace{\pi l^2(3 - 2\sqrt{2})}_{A_i^{in}} = l^2[1 - \pi(3 - 2\sqrt{2})] \approx 0,46l^2. \quad (3)$$

## 2.2. Clasificación de las configuraciones

Todas las configuraciones que no son como la de la figura 2 se pueden clasificar según los puntos de corte de  $S$  con  $T$  como:

1. 2 puntos de corte en  $AB$ .
2. 1 punto de corte en  $BC$  y  $CA$ .
3. 1 punto de corte en  $BC$  y  $CA$  y 2 puntos de corte en  $AB$ .
4. Ningún punto de corte.

A continuación vamos a discutir todas las configuraciones:

### 2.2.1. 2 puntos de corte en $AB$

Se parte de una configuración como la de la figura 4 con  $r$  arbitrario. Se tiene un determinado valor de  $A_u$  y  $A_i$ .

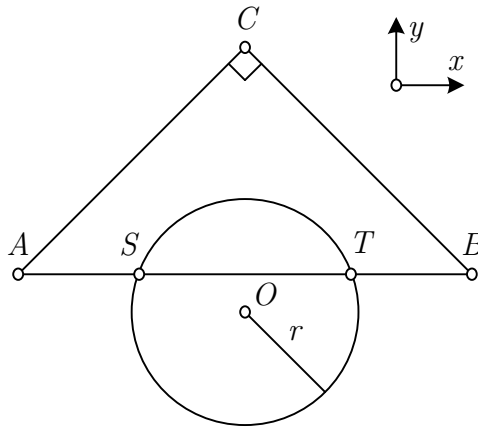


Figura 4: Configuración de partida con 2 puntos de corte en  $AB$

Se realiza una traslación de  $S$  en la dirección  $\hat{y}$  hasta que  $S$  sea tangente a  $BC$  y  $CA$ . Se obtiene un nuevo valor de  $A_u$ , denominado  $A'_u$ , y de  $A_i$ , denominado  $A'_i$ . Se verifica

$$A'_u \leq A_u \quad (4)$$

$$A'_i \geq A_i. \quad (5)$$

Teniendo en cuenta (4) y (5), el nuevo valor de  $A_d$ , denominado  $A'_d$ , calculado con (1) cumple

$$A'_d \leq A_d.$$

Tenemos 3 casos según el valor de  $r$ :

**2.2.1.1.**  $r < r_i$

$S$  no corta a  $AB$ . Si comparamos este caso con el de la circunferencia inscrita:

1.  $A_u = A_u^{in}$ , es decir el área de  $T$ .
2.  $A_i < A_i^{in}$ , porque  $r$  es menor que  $r_i$ .

Luego  $A'_d > A_d^{in}$ .

**2.2.1.2.**  $r_i \leq r < \frac{\sqrt{2}l}{2}$

$S$  corta a  $AB$  en 2 puntos y el centro  $O$  está en  $CD$ . Es decir, corresponde a la configuración óptima.

**2.2.1.3.**  $\frac{\sqrt{2}l}{2} \leq r$

Este caso se muestra en la figura 5. El centro  $O$  queda por debajo de  $AB$ .

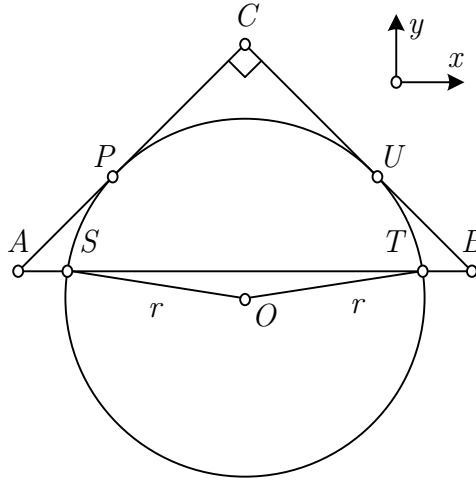


Figura 5: Configuración con 2 puntos de corte en  $AB$  y  $\frac{\sqrt{2}l}{2} \leq r$

Llamamos  $\phi$  a  $\angle SOT$ , con  $\phi \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ . Calculamos  $A'_d$  con (2) como

$$A'_d = \underbrace{l^2}_{A_t} + \underbrace{\pi r^2}_{A_s} - 2A_i. \quad (6)$$

$A_i$  está acotado superiormente por el área del sector circular  $SOT$

$$A_i \leq \frac{\phi}{2} r^2. \quad (7)$$

---

<sup>2</sup> $r = \frac{\sqrt{2}l}{2}$  equivale a que  $O$  esté en  $D$ . Este valor se obtiene con un razonamiento similar al de la circunferencia inscrita.

Sustituyendo (7) en (6), se acota  $A'_d$  como

$$A'_d \geq l^2 + \pi r^2 - 2\frac{\phi}{2}r^2 = l^2 + (\pi - \phi)r^2.$$

Como  $\phi \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

$$A'_d \geq l^2 + (\pi - \phi)r^2 \geq l^2 > \underbrace{0,46l^2}_{A_d^{in}}.$$

Por tanto, la cota inferior de  $A'_d$  es mayor que el valor obtenido con el caso de la circunferencia inscrita.

### 2.2.2. 1 punto de corte en $BC$ y $CA$ .

La configuración de partida es como la de la figura 6<sup>3</sup>.

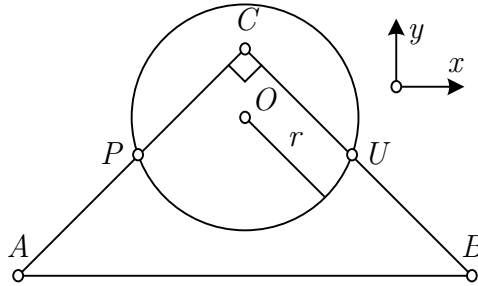


Figura 6: Configuración de partida con 1 punto de corte en  $BC$  y  $CA$ .

Se realiza una traslación de  $S$  en la dirección  $-\hat{y}$  hasta que  $S$  sea tangente a  $AB$  (se cumple también  $A'_u \leq A_u$  y  $A'_i \geq A_u$ ).

Hay 4 casos en función del valor de  $r$ :

#### 2.2.2.1. $r < r_i$

Se demuestra análogamente al caso 2.2.1.1 que  $A'_d > A_d^{in}$ .

#### 2.2.2.2. $r_i \leq r < \frac{l}{2}$

$S$  corta a  $BC$  y  $CA$  en 2 puntos, y el centro  $O$  está en  $AB$ . Este caso corresponde a la configuración óptima.

#### 2.2.2.3. $\frac{l}{2} \leq r < l$

Este caso se ilustra en la figura 7.  $A'_i$  puede obtenerse como suma del sector circular  $POU$  y el cuadrilátero  $POUC$

$$A'_i = A_{POU} + A_{POUC}. \quad (8)$$

Sea  $\phi \angle POU$ , con  $\phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . En consecuencia, se puede acotar superiormente  $A_{POUC}$  por el del triángulo  $PUC$

$$A_{POUC} \leq A_{PUC}. \quad (9)$$

<sup>3</sup>Hay un caso de este tipo con  $O$  por debajo  $AB$  si  $r > l$ .

$A_{PUC}$  se calcula como

$$A_{PUC} = \frac{(l - r + r \cos \phi)2r \sin \frac{\phi}{2}}{2}.$$

Como  $\sin \frac{\phi}{2} \leq 1$   $A_{PUC}$  se acota superiormente como

$$A_{PUC} \leq (l - r + r \cos \phi)r.$$

Se cumple  $l - r + r \cos \phi \leq l - r$  con  $\phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , luego

$$A_{PUC} \leq (l - r + r \cos \phi)r \leq (l - r)r. \quad (10)$$

Teniendo en cuenta (10) y (9) y sustituyendo en (8)

$$A'_i \leq \frac{\phi}{2}r^2 + (l - r)r. \quad (11)$$

$A'_d$  calculado con (2) se puede acotar inferiormente teniendo en cuenta (11) como

$$A'_d \geq \underbrace{l^2}_{A_t} + \underbrace{\pi r^2}_{A_s} - 2 \left[ \frac{\phi}{2}r^2 + (l - r)r \right] = l^2 + (\pi - \phi)r^2 - 2(l - r)r.$$

Como  $\phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$A'_d \geq l^2 + (\pi - \phi)r^2 - 2(l - r)r \geq l^2 - 2(l - r)r.$$

Calculamos el mínimo de  $f(r) = l^2 - 2(l - r)r$ , que ha de cumplir

$$f'(r) = 2r - 2(l - r) = 0 \Rightarrow r^* = \frac{l}{2}.$$

Se obtiene  $f''(r)$  para determinar si  $r^*$  es un mínimo

$$f''(r) = 4 > 0.$$

Se concluye que  $A'_d$  se acota inferiormente como

$$A'_d \geq l^2 - 2(l - r)r \geq \frac{l^2}{2} > \underbrace{0,46l^2}_{A_d^{in}}.$$

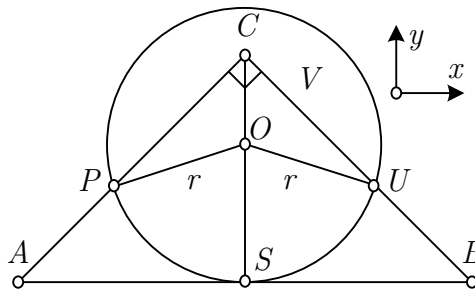


Figura 7: Configuración con 1 punto de corte en  $BC$  y  $CA$  y  $\frac{l}{2} \leq r < l$

**2.2.2.4.**  $l \leq r$

Si se hace una traslación de  $S$  en la dirección  $-\hat{y}$  o  $\hat{y}$  según el centro  $O$  esté por encima o debajo de  $AB$  respectivamente. Se puede conseguir así que  $T$  esté contenido dentro de  $S$ . En este caso,  $A'_i = A_t$  y se puede calcular  $A'_d$  con (2)

$$A'_d = \underbrace{l^2}_{A_t} + \underbrace{\pi r^2}_{A_s} - 2 \underbrace{l^2}_{A_i} = \pi r^2 - l^2.$$

Como  $l \leq r$

$$A'_d = \pi r^2 - l^2 \geq (\pi - 1)l^2 \approx 2,14l^2 > \underbrace{0,46l^2}_{A_d^{in}}. \quad (12)$$

**2.2.3.** 1 punto de corte en  $BC$  y  $CA$  y 2 puntos de corte en  $AB$

La configuración de partida es la de la figura 8.

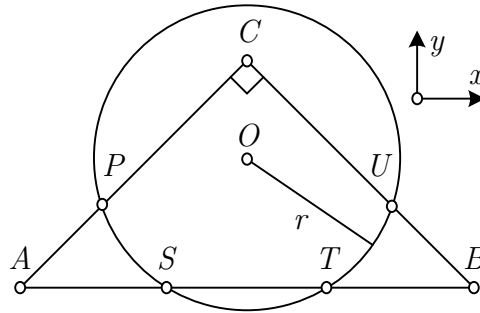


Figura 8: Configuración de partida con 1 punto de corte en  $BC$  y  $CA$  y 2 puntos de corte en  $AB$

Hay 3 casos según el valor de  $r$ :

**2.2.3.1.**  $\frac{l}{2} < r < l$

Este caso se muestra en la figura 9.

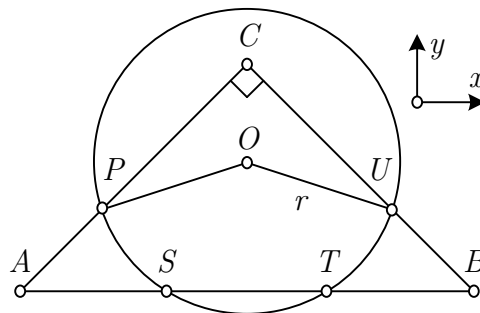


Figura 9: Configuración con 1 punto de corte en  $BC$  y  $CA$  y 2 puntos de corte en  $AB$  y  $\frac{l}{2} \leq r < l$

Este caso se puede razonar de forma análoga al caso 2.2.2.3. Se obtiene una cota inferior como la del caso 2.2.2.3

$$A_d > \frac{l^2}{2} > \underbrace{0,46l^2}_{A_d^{in}}.$$

### 2.2.3.2. $l < r$

Se demuestra análogamente al caso 2.2.2.4.

### 2.2.4. Ningún punto de corte

Hay 2 tipos de configuraciones de este tipo:

1.  $T$  está contenido dentro de  $S$  y  $r > l$ . Se puede seguir un razonamiento análogo al del caso 2.2.2.4.
2.  $S$  está por debajo o por encima de  $T$ . Si está por debajo, se demuestra análogamente al caso 2.2.1. Y si está por encima, se razonaría de manera análoga al caso 2.2.2.

En conclusión, se ha demostrado que para configuración distinta de la de la figura 2, se puede hallar una configuración como la de la figura 2 con menor o igual  $A_d$ . Por tanto, basta con determinar la solución de mínima  $A_d$  con la configuración óptima.

## 3. Solución con mínima $A_d$ con la configuración óptima

Por la simetría del problema respecto a la mediatriz de  $AB$ , se va a considerar únicamente el triángulo  $ADC$ . Se emplea como referencia la figura 10. Hay que determinar el círculo que minimiza  $A_d$ . Se toman como variables  $r$  y  $\alpha = \angle SOD$ . El círculo queda definido con estas 2 variables.

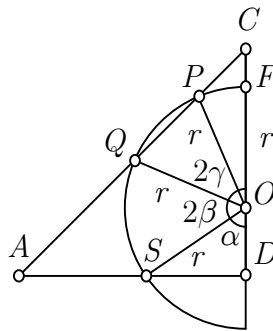


Figura 10: Variables del problema con la configuración óptima

A partir de  $r$  y  $\alpha$ , se pueden calcular  $2\beta = \angle QOS$  y  $2\gamma = \angle POQ$ .

### 3.1. Expresión de $\beta$ y $\gamma$ en función de $r$ y $\alpha$

#### 3.1.1. $\beta$ como función de $r$ y $\alpha$

Consideramos el cuadrilátero  $ASOQ$ .

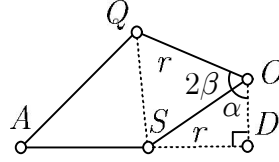


Figura 11: Cuadrilátero  $ASOQ$

El triángulo  $QOS$  es isósceles porque  $SO$  y  $OQ$  miden  $r$  unidades. Luego podemos expresar  $\angle QSO$  en función de  $\beta$  como

$$\angle QSO = \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta. \quad (13)$$

$\angle OSD$  que se puede poner en función de  $\alpha$  teniendo en cuenta que el triángulo  $OSD$  es rectángulo

$$\angle OSD = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha.$$

$\angle ASO$  es el ángulo suplementario de  $\angle OSD$  y mide entonces  $90^\circ + \alpha$ . Por otro lado,  $\angle ASO$  se puede calcular como

$$\angle ASO = \angle ASQ + \angle QSO. \quad (14)$$

Sustituyendo (13) en (14), se despeja  $\angle ASQ$  como

$$\angle ASQ = \angle ASO - \angle QSO = 90^\circ + \alpha - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta. \quad (15)$$

Se calcula  $\angle AQS$  en el triángulo  $ASQ$  como

$$\angle AQS = 180^\circ - \angle QAS - \angle ASQ = 180^\circ - 45^\circ - (\alpha + \beta) = 135^\circ - \alpha - \beta.$$

Aplicamos el Teorema del seno en el triángulo  $ASQ$ .  $AS$  mide  $l - r \text{sen } \alpha$  unidades y  $QS$   $2r \text{sen } \beta$ .

$$\begin{aligned} \frac{l - r \text{sen } \alpha}{\text{sen}(135^\circ - \alpha - \beta)} &= \frac{2r \text{sen } \beta}{\text{sen } 45^\circ} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(l - r \text{sen } \alpha) &= 2r \text{sen } \beta \text{sen}(135^\circ - \alpha - \beta). \end{aligned}$$

Expresamos el segundo miembro como suma de cosenos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(l - r \text{sen } \alpha) = r [\cos(135^\circ - \alpha - 2\beta) - \cos(135^\circ - \alpha)].$$

Desarrollando  $\cos(135^\circ - \alpha)$  y agrupando términos se tiene

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(l - r \text{sen } \alpha) = r \cos(135^\circ - \alpha - 2\beta). \quad (16)$$

### 3.1.2. $\gamma$ como función de $r$ , $\alpha$ y $\beta$

Se tiene el cuadrilátero  $ADOE$ .  $E$  es la intersección de la bisectriz de  $\angle QOP$  con  $CA$ . Como el triángulo  $QOP$  es isósceles,  $EO$  es perpendicular a  $CA$ . Luego  $\angle QOE$  es  $\gamma$ .

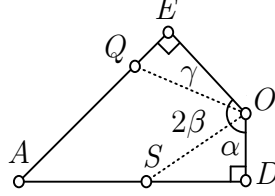


Figura 12: Cuadrilátero  $ADOE$

Los ángulos interiores de  $ADOE$  suman  $360^\circ$ .  $\angle EOD$  es  $\alpha + 2\beta + \gamma$  y se puede calcular despejando como

$$\angle EOD = 360^\circ - (45^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 135^\circ.$$

Luego

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 135^\circ. \quad (17)$$

Se tiene entonces que  $\angle EOC = 45^\circ$  y se puede obtener  $\angle POC$  como

$$\angle POC = \angle EOC - \angle EOP = 45^\circ - \gamma.$$

## 3.2. Dominio de $\frac{A_d}{2}$

La frontera del dominio de  $\frac{A_d}{2}$  viene dada por los valores de  $\alpha$  y  $\gamma$  con los que se tiene sólo 1 punto de corte en  $AB$ ,  $BC$  o  $CA$ :

1.  $\alpha = 0$ : 1 punto de tangencia de  $S$  en  $AB$  y  $\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$  (el caso  $\gamma = 0$  corresponde al caso de la circunferencia inscrita).
2.  $\gamma = 0$ : 1 punto de tangencia de  $S$  en  $BC$  y  $CA$  y  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$  (el caso  $\alpha = 0$  corresponde al caso de la circunferencia inscrita).
3.  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ : 1 punto de corte de  $S$  en  $C$  y  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Para determinar la configuración óptima se van a calcular las derivadas parciales de  $\frac{A_d}{2}$ . Se van a estudiar por separado las configuraciones en la frontera del dominio (donde no se pueden definir todas las derivadas parciales), que son funciones de 1 variable.

### 3.2.1. $\alpha = 0$

Se puede expresar (16) en función de  $r$ ,  $\alpha$  y  $\gamma$  teniendo en cuenta (17) como

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(l - r \cos \alpha) = r \cos \gamma. \quad (18)$$

Y  $r$  se pone como función de  $\alpha$  y  $\gamma$  como

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{l}{\cos \gamma + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha}. \quad (19)$$

Se calcula  $\frac{A_d}{2}$ , que es función de  $\alpha$  y  $r$  con (2) como

$$\frac{A_d}{2} = f(\alpha, r) = \underbrace{\frac{l^2}{2}}_{\frac{A_t}{2}} + \underbrace{\frac{\pi r^2}{2}}_{\frac{A_s}{2}} - 2 \frac{A_i}{2}, \quad (20)$$

donde  $\frac{A_i}{2}$  es la suma de los triángulos  $SDO$  y  $QOP$  y los sectores circulares  $SOQ$  y  $POF$  (ver figura 10)

$$\begin{aligned} \frac{A_i}{2} &= \frac{r^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} + \frac{r^2 2\beta}{2} + 2 \frac{r^2 \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma}{2} + \frac{r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{2} = \\ &= r^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4} + \beta + \frac{\operatorname{sen}(2\gamma)}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\gamma}{2} \right]. \end{aligned}$$

Se puede expresar únicamente en función de  $r$ ,  $\alpha$  y  $\gamma$  sustituyendo  $\beta$  según (17)

$$\begin{aligned} \frac{A_i}{2} &= r^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4} + \frac{3\pi}{8} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\gamma)}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\gamma}{2} \right] = \\ &= r^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \gamma + \frac{\operatorname{sen}(2\gamma)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Sustituyendo en (20)

$$f(\alpha, r) = \frac{l^2}{2} - r^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\gamma + \operatorname{sen}(2\gamma) \right]. \quad (22)$$

Para  $\alpha = 0$ , se obtiene una función de la variable  $r$

$$f(0, r) = g(r) = \frac{l^2}{2} - r^2 \left[ -\frac{\pi}{2} - 2\gamma + \operatorname{sen}(2\gamma) \right], \quad (23)$$

donde  $\gamma$  depende implícitamente de  $r$  a través de (18) como

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(l - r) = r \cos \gamma.$$

Se puede obtener  $\frac{\partial \gamma}{\partial r}$  derivando los 2 miembros de la expresión anterior

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \gamma - r \operatorname{sen} \gamma \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{\sqrt{2} + 2 \cos \gamma}{2r \operatorname{sen} \gamma}. \quad (24)$$

Calculamos  $\frac{\partial g(r)}{\partial r}$  con (23)

$$\frac{\partial g(r)}{\partial r} = -2r \left[ -\frac{\pi}{2} - 2\gamma + \operatorname{sen}(2\gamma) \right] - r^2 [-2 + 2 \cos(2\gamma)] \frac{\partial \gamma}{\partial r}.$$

Sustituyendo  $\frac{\partial \gamma}{\partial r}$  por (24)

$$\frac{\partial f(0, r)}{\partial r} = r \left\{ \pi + 4\gamma - 2 \operatorname{sen}(2\gamma) + 2r [1 - \cos(2\gamma)] \frac{\sqrt{2} + 2 \cos \gamma}{2r \operatorname{sen} \gamma} \right\}.$$

Con las fórmulas del seno del ángulo mitad  $1 - \cos(2\gamma) = 2 \operatorname{sen}^2 \gamma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(r)}{\partial r} &= r \left\{ \pi + 4\gamma - 2 \operatorname{sen}(2\gamma) + 4r \operatorname{sen}^2 \gamma \frac{\sqrt{2} + 2 \cos \gamma}{2r \operatorname{sen} \gamma} \right\} = \\ &= r \left\{ \pi + 4\gamma - 2 \operatorname{sen}(2\gamma) + 2 \operatorname{sen} \gamma [\sqrt{2} + 2 \cos \gamma] \right\} = \\ &= r [\pi + 4\gamma - 2 \operatorname{sen}(2\gamma) + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma + \underbrace{4 \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma}_{2 \operatorname{sen}(2\gamma)}] = \\ &= r [\pi + 4\gamma + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma]. \end{aligned}$$

Se cumple que  $4\gamma + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma \geq 0$  para  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{4}]$ . Luego  $\frac{\partial g(r)}{\partial r} > 0$  en dicho intervalo. Por tanto, todos los casos con  $\alpha = 0$  están acotados inferiormente por el caso de la circunferencia inscrita.

### 3.2.2. $\gamma = 0$

Para  $\gamma = 0$ , sustituyendo en (22) se obtiene

$$f(\alpha, r) = h(r) = \frac{l^2}{2} - r^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha \right], \quad (25)$$

donde  $\alpha$  depende implícitamente de  $r$  según (18) como

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (l - r \cos \alpha) = r.$$

Se puede obtener  $\frac{\partial \alpha}{\partial r}$  derivando los 2 miembros de la expresión anterior

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} r \operatorname{sen} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{2 + \sqrt{2} \cos \alpha}{\sqrt{2} r \operatorname{sen} \alpha}. \quad (26)$$

Con (25), calculamos  $\frac{\partial h(r)}{\partial r}$

$$\frac{\partial h(r)}{\partial r} = -2r \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha \right] - r^2 [-1 + \cos(2\alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial r}.$$

Sustituyendo  $\frac{\partial \alpha}{\partial r}$  por (26)

$$\frac{\partial h(r)}{\partial r} = r \left\{ \pi + 2\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha) + r [1 - \cos(2\alpha)] \frac{2 + \sqrt{2} \cos \alpha}{\sqrt{2} r \operatorname{sen} \alpha} \right\}.$$

Como  $1 - \cos(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(r)}{\partial r} &= r \left[ \pi + 2\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha) + 2r \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{2 + \sqrt{2} \cos \alpha}{\sqrt{2} r \operatorname{sen} \alpha} \right] = \\
&= r \left[ \pi + 2\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha) + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha (2 + \sqrt{2} \cos \alpha) \right] = \\
&= r \left[ \pi + 2\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha) + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha + \underbrace{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}_{\operatorname{sen}(2\alpha)} \right] = \\
&= r \left[ \pi + 2\alpha + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \right].
\end{aligned}$$

$2\alpha + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \geq 0$  para  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Luego  $\frac{\partial h(r)}{\partial r} > 0$  en ese intervalo. Por tanto, todos los casos con  $\gamma = 0$  están acotados inferiormente por el caso de la circunferencia inscrita.

### 3.2.3. $\gamma = \frac{\pi}{4}$

Si  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , se puede hacer una traslación de  $S$  en la dirección  $-\hat{y}$  de forma que haya 2 puntos de corte de en  $AB$ ,  $BC$  y  $BA$ . Con un razonamiento análogo al expuesto en 2.2.1, se verifica que  $A'_d \leq A_d$ .

Si  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , se trata del caso de la circunferencia circunscrita y  $r = l$ . Se calcula  $A_d$  por medio de (2) como

$$A_d = \underbrace{l^2}_{A_t} + \underbrace{\pi l^2}_{A_s} - 2 \underbrace{l^2}_{A_i} = l^2(\pi - 1) \approx 2,46l^2 > \underbrace{0,46l^2}_{A_d^{in}}.$$

### 3.3. Cálculo de $\frac{A_d}{2}$ mínima

Una condición necesaria de un mínimo local de  $f(\alpha, r)$  es

$$\frac{\partial f(\alpha, r)}{\partial \alpha} = -\frac{\partial A_i}{\partial \alpha} = 0.$$

Calculamos  $\frac{1}{2} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha} &= r^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4} \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} (\gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \operatorname{stap} \frac{\operatorname{sen}(2\gamma)}{2} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right\} = \\
&= r^2 \left[ \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \cos(2\gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right]. \tag{27}
\end{aligned}$$

Para calcular  $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}$ , derivando ambos miembros de (16) respecto a  $\alpha$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} r \operatorname{sen} \alpha = -r \operatorname{sen} \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \gamma}. \tag{28}$$

Sustituyendo (28) en (27)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha} &= r^2 \left( \frac{\cos(2\alpha)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \gamma} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\gamma) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma} \right) = \\ &= r^2 \left( \frac{\cos(2\alpha) \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \gamma + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha - \sqrt{2} \cos(2\gamma) \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{sen} \gamma} \right) = \\ &= r^2 \left\{ \frac{-\operatorname{sen} \gamma [1 - \cos(2\alpha)] + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha [1 - \cos(2\gamma)]}{2 \operatorname{sen} \gamma} \right\}.\end{aligned}$$

Se tiene  $1 - \cos(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$  y  $1 - \cos(2\gamma) = 2 \operatorname{sen}^2 \gamma$ . Sustituyendo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha} = r^2 \left( \frac{-2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen}^2 \alpha + 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2 \gamma}{2 \operatorname{sen} \gamma} \right) = r^2 \operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma).$$

Exigiendo  $\frac{1}{2} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha} = 0$ , hay 2 soluciones:

1.  $\operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$  que pertenece a los límites del dominio y ya se ha discutido previamente.
2.  $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma$ . Es el resultado que se va a utilizar a continuación.

Desarrollando (22)

$$\begin{aligned}\frac{A_d}{2} &= f(\alpha, r) = \frac{l^2}{2} - r^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\gamma + \operatorname{sen}(2\gamma) \right] = \\ &= \frac{l^2}{2} - r^2 \left( \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\gamma + 2 \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma \right).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma$

$$f(\alpha, r) = \frac{l^2}{2} - r^2 \left( \sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\gamma + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \gamma \right).$$

Como  $\sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) = \sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \gamma$

$$f(\alpha, r) = \frac{l^2}{2} - r^2 \left[ \sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) + \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\gamma \right].$$

Se va a expresar  $f(\alpha, r)$  en función de  $\gamma$  y  $\theta = \alpha + \gamma$ . Se hace el cambio de variable,  $\alpha = \theta - \gamma$

$$\frac{A_d}{2} = m(\gamma, \theta) = \frac{l^2}{2} - r^2 \left( \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta + \frac{\pi}{2} - \theta - \gamma \right). \quad (29)$$

$r^2$  se puede expresar en función de  $\alpha$  y  $\gamma$  a partir de (19) y usando que  $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{sen} \gamma$

$$r^2 = \frac{l^2}{3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha \cos \gamma - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{l^2}{3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha \cos \gamma - 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma}.$$

Teniendo en cuenta que  $2\sqrt{2} \cos(\alpha + \gamma) = 2\sqrt{2} \cos \alpha \cos \gamma - 2\sqrt{2} \sin \alpha \sin \gamma$

$$r^2 = \frac{l^2}{3 + 2\sqrt{2} \cos(\alpha + \gamma)} = \frac{l^2}{3 + 2\sqrt{2} \cos \theta}. \quad (30)$$

Sustituyendo (30) en (29)

$$m(\gamma, \theta) = \frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{3 + 2\sqrt{2} \cos \theta} \left( \sqrt{2} \sin \theta + \frac{\pi}{2} - \theta - \gamma \right). \quad (31)$$

La condición  $\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \gamma$  resulta

$$\sin(\theta - \gamma) = \sqrt{2} \sin \gamma. \quad (32)$$

En consecuencia, con esta condición  $m(\gamma, \theta)$  depende de una variable:  $\gamma$  o  $\theta$ , ya que una depende implícitamente de la otra a través de (32). En nuestro caso, consideramos  $\gamma$  función de  $\theta$ .

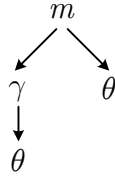


Figura 13: Árbol de la dependencia de las variables de  $m(\gamma, \theta)$

El mínimo de  $m(\gamma, \theta)$  es un punto crítico y ha de cumplir  $\frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, \gamma) = 0$ . Calculamos  $\frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, \gamma)$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, \gamma) = -l^2 \left[ \frac{\left( \sqrt{2} \cos \theta - 1 - \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) (3 + 2\sqrt{2} \cos \theta) + 2\sqrt{2} \sin \theta \left( \sqrt{2} \sin \theta + \frac{\pi}{2} - \theta - \gamma \right)}{(3 + 2\sqrt{2} \cos \theta)^2} \right].$$

Igualando el numerador a 0, y desarrollando la expresión

$$\sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{2}(2\theta + 2\gamma - \pi) \sin \theta - 3 + \underbrace{4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta}_4 - (3 + 2\sqrt{2} \cos \theta) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = 0 \quad (33)$$

Derivamos los dos miembros de (32) respecto a  $\theta$

$$\cos(\theta - \gamma) - \cos(\theta - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \sqrt{2} \cos \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}.$$

Se despeja  $\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\cos(\theta - \gamma) + \sqrt{2} \cos \gamma}. \quad (34)$$

Sustituyendo (34) en (33)

$$-\sqrt{2}(2\theta + 2\gamma - \pi) \sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta + 1 - (3 + 2\sqrt{2} \cos \theta) \frac{\cos(\theta - \gamma)}{\cos(\theta - \gamma) + \sqrt{2} \cos \gamma} = 0.$$

Como  $3 + 2\sqrt{2} \cos \theta = (\cos(\theta - \gamma) + \sqrt{2} \cos \gamma)^2$  como se ha mostrado en (30)

$$-\sqrt{2}(2\theta + 2\gamma - \pi) \operatorname{sen} \theta + \sqrt{2} \cos \theta + 1 - \cos(\theta - \gamma)[\cos(\theta - \gamma) + \sqrt{2} \cos \gamma] = 0. \quad (35)$$

Vamos a probar que los sumandos  $\sqrt{2} \cos \theta + 1 - \cos(\theta - \gamma)[\cos(\theta - \gamma) + \sqrt{2} \cos \gamma] = 0$ .  
Deshacemos el cambio  $\theta = \alpha + \gamma$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \cos(\alpha + \gamma) + 1 - \cos \alpha [\cos(\alpha) + \sqrt{2} \cos \gamma] = \\ & = \sqrt{2} \cos \alpha \cos \gamma - \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma + 1 - \underbrace{\cos^2 \alpha}_{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} - \sqrt{2} \cos \alpha \cos \gamma = \\ & = -\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, (35) resulta

$$-\sqrt{2}(2\theta + 2\gamma - \pi) \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Hay 2 posibles soluciones:

1.  $\theta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ .
2.  $\operatorname{sen} \theta = 0 \Rightarrow \theta = \alpha + \gamma = 0$ . Como  $\alpha$  y  $\gamma$  tienen que ser positivos,  $\alpha = 0$  y  $\gamma = 0$ . Se tiene el caso de la circunferencia inscrita, que ya se ha calculado previamente.

Analizamos  $\frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, \gamma)$  para comprobar que es un mínimo.  $\frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, \gamma)$  según lo mostrado anteriormente es

$$\frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, \gamma) = \sqrt{2} l^2 \left[ \frac{(2\theta + 2\gamma - \pi) \operatorname{sen} \theta}{(3 + 2\sqrt{2} \cos \theta)^2} \right] = \frac{\sqrt{2} l^2 \operatorname{sen} \theta}{(3 + 2\sqrt{2} \cos \theta)^2} (2\theta + 2\gamma - \pi).$$

Como  $0 < \theta < \pi$ , el factor  $\frac{\sqrt{2} l^2 \operatorname{sen} \theta}{(3 + 2\sqrt{2} \cos \theta)^2} > 0$ . Luego el signo de  $\frac{\partial}{\partial \theta} m(\theta, \gamma)$  viene determinado por el factor  $2\theta + 2\gamma - \pi$ . Para  $\theta + \gamma = \frac{\pi}{2}$  se obtiene un punto crítico, es decir el par  $(\theta^*, \gamma^*)$ , donde  $\gamma^*$  se obtiene a partir de  $\theta^*$  con (32). Si se expresa (34) en función de  $\alpha$  y  $\gamma$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{2} \cos \gamma}.$$

Como  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  y  $0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} > 0$ . Luego para un valor de  $\theta < \theta^*$ , el valor de  $\gamma$  correspondiente a  $\theta$  cumple  $\gamma < \gamma^*$ . Por tanto, para  $\theta < \theta^*$ ,  $2\theta + 2\gamma - \pi < 0$  y para  $\theta > \theta^*$ ,  $2\theta + 2\gamma - \pi > 0$ . Es decir,  $m(\theta, \gamma)$  decrece para  $\theta < \theta^*$  y crece para  $\theta > \theta^*$  y se concluye que el punto crítico  $\theta^*$  es un mínimo.

Calculamos  $\cos \theta$  y  $\operatorname{sen} \theta$ . Con  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$  en (32)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left( 2\theta - \frac{\pi}{2} \right) &= \sqrt{2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \Rightarrow -\cos(2\theta) = \sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow -(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) &= \sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow 2 \cos^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta - 1 = 0. \end{aligned}$$

Es una ecuación de 2º grado

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 8}}{-4} = -\frac{\sqrt{2}}{4} (1 \pm \sqrt{5}).$$

La única solución posible es  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{5} - 1)$ . Se calcula  $\sin \theta$  como

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{8}(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{2}.$$

Para  $\theta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ , (31) es

$$\frac{A_d}{2} = \frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{3 + 2\sqrt{2}\cos \theta}(\sqrt{2}\sin \theta).$$

Sustituyendo  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$ , calculamos  $A_d$

$$A_d = l^2 - \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2 + \sqrt{5}} = l^2 \left(1 - \sqrt{10\sqrt{5} - 22}\right) \approx 0,40l^2 < \underbrace{0,46l^2}_{A_d^{in}}.$$

Por tanto, con el mínimo obtenido se tiene un valor de  $A_d$  menor que el obtenido con el caso de la circunferencia inscrita

Se obtiene  $\cos \gamma$  como

$$\cos \gamma = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{2}.$$

Y  $\sin \gamma$

$$\sin \gamma = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

$DO = r \cos \alpha$ , donde  $\cos \alpha$  se puede calcular como

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\theta - \gamma) = \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma = \\ &= 2 \frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{2} \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{5} - 1) = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $r$  por (19)

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{l}{\cos \gamma + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{l}{\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{l}{\frac{\sqrt{1 + \sqrt{5}}}{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2\sqrt{2\sqrt{5} - 2}l}{2\sqrt{1 + \sqrt{5}} + \sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2} 2\sqrt{2\sqrt{5} - 2}(2\sqrt{1 + \sqrt{5}} - \sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 2})l}{2(2^2(1 + \sqrt{5}) - 2(2\sqrt{5} - 2))} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(12\sqrt{2} - 4\sqrt{10})l}{8} = \frac{(3 - \sqrt{5})l}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos la relación  $\frac{l-DO}{DO}$

$$\begin{aligned} \frac{l-DO}{DO} &= \frac{l}{DO} - 1 = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} - 1 = \frac{2 - 3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(-1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{3^2 - 5} = \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi. \text{ Q.E.D.} \end{aligned}$$