DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA I

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

BOLETINES DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS II

LICENCIATURA EN ECONOMÍA

PRIMER CURSO (Segundo cuatrimestre)

CURSO 2008-2009

TEMA 1: INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS.

Distancia y topología en $\mathbb{R}^n$.

1. Para los siguientes conjuntos:

   (1.1) $\mathrm{A} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, 0 \leq \mathrm{x} \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{y}+\mathrm{x} \leq 1,\ \mathrm{y} > 0\}$ (1.2) $\mathrm{B} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, \mathrm{y}-1 < (\mathrm{x}+1)^2,\ \mathrm{y} < 2\}$

   (1.3) $\mathrm{C} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, \mathrm{x},\mathrm{y} < 1,\ \mathrm{y}+\mathrm{x} < 1\} \cup \{(0,0)\}$ (1.4) $\mathrm{D} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, \mathrm{x} \leq \mathrm{y}^2,\ 1 < \mathrm{x} < 2\}$

   (1.5) $\mathrm{E} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, (\mathrm{x}-1)^2 + (\mathrm{y}+2)^2 \leq 4\}$ (1.6) $\mathrm{F} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, \mathrm{xy} > 1,\ \mathrm{y} \geq \mathrm{x}\} \cup \{(1,1)\}$

   (a) Representar gráficamente el conjunto.

   (b) Determinar su interior, exterior, frontera, puntos de acumulación y puntos aislados.

   (c) Determinar si son abiertos y/o cerrados.

Funciones reales de varias variables reales. Curvas de nivel.

2. Estudiar el dominio de existencia para $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   (2.1) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \dfrac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{\mathrm{xy}}$ (2.2) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\mathrm{x}-\mathrm{y}}}$ (2.3) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \log\left(\dfrac{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\right)$

3. Estudiar las curvas de nivel de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   (3.1) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2\mathrm{x}+\mathrm{y}$ (3.2) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2$ (3.3) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \dfrac{\mathrm{x}^2}{9} + \dfrac{\mathrm{y}^2}{4}$ (3.4) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{xy}$

Límite de funciones reales de varias variables reales.

4. Calcular, si existen, los siguientes límites:

   (4.1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$ (4.2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$ (4.3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{x}^2\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$

   (4.4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2+(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2}$ (4.5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{3}{10-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}$ (4.6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+\mathrm{y}-4}$

   (4.7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{\mathrm{xy}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^4}$ (4.8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{y}-3)^2}{(\mathrm{x}-1)^2+(\mathrm{y}-3)^2}$ (4.9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$

Continuidad de funciones reales de varias variables reales.

5. Estudiar la continuidad de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   (5.1) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (5.2) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (5.3) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (5.4) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6. Estudiar la continuidad de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

   (6.1) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \dfrac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{\mathrm{xy}}$ (6.2) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{\dfrac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\mathrm{x}-\mathrm{y}}}$ (6.3) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \dfrac{\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}$ (6.4) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \log\left(\dfrac{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\right)$

   (6.5) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x}^\mathrm{y}+\mathrm{y}^\mathrm{x}$ (6.6) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt[3]{x+y}$ (6.7) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \dfrac{\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}+\mathrm{y}-5}$ (6.8) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{sen}\left(\dfrac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+2}\right)$

Funciones vectoriales: límites y continuidad.

7. Estudiar la continuidad de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por:

   (7.1) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \left(\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}+2}, \dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}-1}, \dfrac{1}{\mathrm{xy}}\right)$ (7.2) $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

TEMA 2: DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES REALES Y VECTORIALES.

Diferenciabilidad de funciones reales de una variable real.

8. Para $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

$(8.1)\ \mathrm{f(x)} = \sqrt[4]{x}$ $(8.2)\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{e^{3x}}$ $(8.3)\ \mathrm{f(x)} = 2^{\mathrm{x}-1}$

$(8.4)\ \mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{4-\mathrm{x}^2}}$ $(8.5)\ \mathrm{f(x)} = \dfrac{1+\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^2}$ $(8.6)\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{x}\sqrt{1-6\mathrm{x}^2}$

$(8.7)\ \mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{e^x}}{1+\mathrm{e^x}}$ $(8.8)\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{xe^x}$ $(8.9)\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{x^2cos(x)}$

$(8.10)\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x sen(x)}$ $(8.11)\ \mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+6}$ $(8.12)\ \mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+4}{\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+2}$

$(8.13)\ \mathrm{f(x)} = \dfrac{\cos(\mathrm{x})}{1-\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})}$ $(8.14)\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{sen^2(x)cos^4(x)}$ $(8.15)\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{sen(15x)\cos(2x)}$

$(8.16)\ \mathrm{f(x)} = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{\mathrm{x}+2}$ $(8.17)\ \mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{e^x}-3\mathrm{e^{2x}}}{1+\mathrm{e^x}}$ $(8.18)\ \mathrm{f(x)} = \arctan \mathrm{x}^3 + \ln \dfrac{\mathrm{x}^3}{\mathrm{x}+1}$

Calcular la derivada y diferencial en un punto genérico. ¿Qué condiciones debe verificar este punto?

9. Determinar la recta tangente a la curva $y = sen(x)$ en el punto $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Derivada direccional. Derivada parcial. Vector gradiente.

10. Para $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

$(10.1)\ \mathrm{f(x,y)} = \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2$ $(10.2)\ \mathrm{f(x,y)} = \dfrac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\mathrm{x}-\mathrm{y}}$

Calcular aplicando la definición:

(a) Derivadas parciales de primer orden en el punto $P(2,3)$.

(b) Derivada según el vector $\vec{v} = (2,1)$ en el punto $P(2,3)$.

(c) Derivada direccional en la dirección $\vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ en el punto $P(2,3)$.

11. Para $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

$$(11.1)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (11.2)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{3x^2y+2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular, si es que existen, las derivadas parciales de primer orden en el punto $(0,0)$. ¿Es f continua en dicho punto?

12. Para $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

$(12.1)\ \mathrm{f(x,y)} = \dfrac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{\mathrm{xy}}$ $(12.2)\ \mathrm{f(x,y)} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\mathrm{x}-\mathrm{y}}}$ $(12.3)\ \mathrm{f(x,y)} = \log\left(\dfrac{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\right)$

$(12.4)\ \mathrm{f(x,y)} = \arctan(\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}) + \arctan(\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}})$ $(12.5)\ \mathrm{f(x,y)} = \dfrac{\mathrm{e^x}}{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}$ $(12.6)\ \mathrm{f(x,y)} = \mathrm{e^{-x}\,sen\,y}$

$(12.7)\ \mathrm{f(x,y)} = \mathrm{x^y + y^x}$ $(12.8)\ \mathrm{f(x,y)} = \ln(\mathrm{x}^2\cos(\mathrm{x}+\mathrm{y}))$ $(12.9)\ \mathrm{f(x,y)} = 2^{\frac{1}{\mathrm{x}+\mathrm{y}}}$

Calcular las derivadas parciales de primer orden en un punto genérico. ¿Qué condiciones debe verificar este punto?

Diferenciabilidad de funciones reales de varias variables reales.
Propiedades del vector gradiente. Teorema del valor medio.

13. Para $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$(13.1)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad (13.2)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(13.3)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Determinar si f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

(b) Calcular, si es posible, el plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.

(c) Calcular, si es posible, la diferencial de f en el punto $(0,0)$.

14. Para $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$(14.1)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad (14.2)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$(14.3)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y=0\end{cases} \qquad (14.4)\ \mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{y\arctan x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Estudiar si se cumple que $D_{\vec{v}}f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\vec{v}$ para cualquier $\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.

(b) Determinar si f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

(c) Calcular, si es posible, la diferencial de f en el punto $(0,0)$.

15. Para el punto P que se indica y para $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$(15.1)\ \mathrm{f(x,y)} = \dfrac{\mathrm{x+y}}{\mathrm{xy}}$ $\quad P(1,1)$ $\qquad (15.2)\ \mathrm{f(x,y)} = \sqrt{\mathrm{x+y}}$ $\quad P(1,0)$

$(15.3)\ \mathrm{f(x,y)} = \dfrac{\mathrm{e^y}}{\mathrm{x+y}}$ $\quad P(0,1)$ $\qquad (15.4)\ \mathrm{f(x,y)} = \mathrm{e^{-x}\,sen(x+y)}$ $\quad P(0,\pi)$

$(15.5)\ \mathrm{f(x,y)} = \mathrm{x^{x+y}}$ $\quad P(1,1)$ $\qquad (15.6)\ \mathrm{f(x,y)} = 2^{\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x+y}}}$ $\quad P(1,1)$

(a) Determinar el conjunto en el que f es diferenciable.

(b) Calcular la diferencial de f en un punto genérico y, si es posible, en el punto P.

(c) Calcular, si es posible, el plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto P.

16. Para el punto P y el vector $\vec{v}$ que se indican y para $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$(16.1)\ \mathrm{f(x,y)} = \dfrac{\mathrm{x+y}}{\mathrm{x-y}}$ $\quad P(1,-1)$ $\quad \vec{v}=(-2,1)$.

$(16.2)\ \mathrm{f(x,y)} = \mathrm{sen(x+y)}$ $\quad P(0,\frac{\pi}{2})$ $\quad \vec{v}=(2,1)$.

$(16.3)\ \mathrm{f(x,y)} = \ln\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$ $\quad P(4,2)$ $\quad \vec{v}=(1,1)$.

$(16.4)\ \mathrm{f(x,y)} = \mathrm{x^{x-y}}$ $\quad P(1,1)$ $\quad \vec{v}=(1,1)$.

$(16.5)\ \mathrm{f(x,y)} = \sqrt{\mathrm{xy}}$ $\quad P(1,1)$ $\quad \vec{v}=(0,1)$.

(a) Determinar el conjunto en el que f es diferenciable y calcular su diferencial en un punto genérico.

(b) Determinar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto P.

(c) Calcular las derivadas de f en el punto P y según el vector $\vec{v}$.

17. Para los puntos P y Q que se indican y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

(17.1) $\mathrm{f(x,y) = sen(x+y)}$	$P(\pi,0)$	$Q(0,\pi)$	(17.2) $\mathrm{f(x,y) = tan(xy)}$	$P(1,0)$	$Q(1,\pi)$
(17.3) $\mathrm{f(x,y) = x\|y\|}$	$P(2,1)$	$Q(1,1)$	(17.4) $\mathrm{f(x,y) = \|x\|y}$	$P(1,1)$	$Q(1,-1)$

(a) Determinar el conjunto en el que f es diferenciable.

(b) Aplicar, si es posible, el teorema valor medio para expresar $f(Q) - f(P)$ en función de sus derivadas parciales.

Diferenciabilidad de funciones vectoriales. Matriz Jacobiana.

18. Para el punto P que se indica y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por:

(18.1) $\mathrm{f(x,y)} = \left(\mathrm{x+y}, \dfrac{1}{\mathrm{x+y}}\right)$	$P(2,-1)$	(18.2) $\mathrm{f(x,y)} = \left(\mathrm{cos(x+y),\ sen(xy),\ xy^2}\right)$	$P(\pi,0)$
(18.3) $\mathrm{f(x,y) = (x^y,\ y^x)}$	$P(1,2)$	(18.4) $\mathrm{f(x,y,z)} = \left(\mathrm{e^{2xz-y},\ e^{2z-xy}}\right)$	$P(1,0,1)$
(18.5) $\mathrm{f(x,y,z,t)} = \left(\mathrm{xe^y,\ ye^z,\ z^t}\right)$	$P(1,1,1,1)$	(18.6) $\mathrm{f(x,y)} = \ln\left(\dfrac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x^2+y^2}}\right)$	$P(1,1)$
(18.7) $\mathrm{f(x,y) = e^x\cos(\pi e^y)}$	$P(1,0)$	(18.8) $\mathrm{f(x,y)} = \left(\mathrm{x\cos(xy),\ y\,sen(xy^2)}\right)$	$P(\pi,1)$
(18.9) $\mathrm{f(x)} = \left(\mathrm{x,\ x^2,\ x^3}\right)$	$P(1)$	(18.10) $\mathrm{f(x,y,z)} = \left(\mathrm{x,\ xy^2,\ xy^2z^3}\right)$	$P(1,1,1)$
(18.11) $\mathrm{f(x,y) = (e^{xy},\ \ln x)}$	$P(1,0)$	(18.12) $\mathrm{f(x,y)} = \left(\mathrm{x\ln(2y),\ y\,sen(x^2+y)}\right)$	$P(0,\frac{\pi}{2})$
(18.13) $\mathrm{f(x,y,z) = \cos(xyz)}$	$P(1,\pi,1)$	(18.14) $\mathrm{f(x,y)} = \left(\mathrm{\cos(xy),\ sen\,y,\ xy^2}\right)$	$P(\pi,\dfrac{\pi}{2})$

(a) Determinar el conjunto en el que f es diferenciable.

(b) Obtener la matriz jacobiana de f en un punto genérico.

(c) Calcular la diferencial de f en un punto genérico y, si es posible, en el punto P.

Diferenciación de funciones compuestas: regla de la cadena.

19. Para el punto P que se indican y para $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ definidas por:

    (19.1) $f(x,y) = (e^{x+y}, x-y, x^2)$ $\quad g(u,v,w) = (u^w, \operatorname{sen}(u+v))$ $\quad P(0,0)$

    (19.2) $f(x,y,z) = (e^{x-y}\ln z, xz)$ $\quad g(u,v) = v\cos u$ $\quad P(1,1,1)$

    (19.3) $f(x) = \left(\sqrt{x-1}\ln(x+1), \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\right)$ $\quad g(u,v) = e^{uv}$ $\quad P(2)$

    Estudiar si $g \circ f$ es diferenciable en P y aplicar, si es posible, la regla de la cadena para obtener la diferencial de $g \circ f$ en el punto P.

20. Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ definidas por:

    (20.1) $f(x,y,z) = (e^{x+y}, e^{yz})$ $\quad g(u,v) = \ln(uv)$ $\qquad$ (20.2) $f(x,y,z) = (x+y, y^z)$ $\quad g(u,v) = \dfrac{u}{v}$

    (20.3) $f(x,y) = xy$ $\quad g(u) = (\operatorname{sen} u, 3u, e^u)$

    Estudiar la diferenciabilidad de $g \circ f$ y aplicar, si es posible, la regla de la cadena para obtener la diferencial de $g \circ f$ en un punto genérico.

21. Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por:
$$f(x,y) = \left(x+y, x-y, \frac{x}{y}\right) \qquad g(u,v,w) = (u+3vw, u+v^2).$$
    (a) Obtener la diferencial de $g \circ f$ en un punto genérico. ¿Qué condiciones debe verificar este punto?

    (b) Obtener la diferencial de $f \circ g$ en un punto genérico. ¿Qué condiciones debe verificar este punto?

22. Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y,z) = f\left(2^{x+y}, x\operatorname{sen}(y) + \cos(z)\right)$ con $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable en el punto $(2,1)$ y de la que se sabe que la matriz jacobiana de f en el punto $(2,1)$ es
$$Jf(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
    Demostrar que g es diferenciable en el punto $(1,0,0)$ y calcular su diferencial en dicho punto.

23. Sea $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y,z) = f\left(xz^2 - y^2z, x\operatorname{sen}(yz), y\cos(xz)\right)$ con $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y de la que se sabe que
$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) = 2u, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) = -w, \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) = 3.$$
    Demostrar que g es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y obtener la diferencial de g en el punto genérico.

24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de la que se sabe que es diferenciable en $a = (4,3)$, que $f(a) = 2$ y que las derivadas direccionales de f respecto a los vectores $u = (5,12)$ y $v = (3,4)$ normalizados, $\overline{u}$ y $\overline{v}$, son
$$D_{\overline{u}}f(a) = -\frac{2}{13} \text{ y } D_{\overline{v}}f(a) = \frac{2}{5}.$$
    (a) Calcular $\nabla f(a)$.

    (b) Probar que $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = f(t^2, t+1)$ es derivable en $t = 2$ y calcular $h'(2)$.

    (c) Calcular la derivada direccional de $h \circ f$ en a según la dirección del vector $(1,1)$ normalizado.

Derivadas sucesivas de funciones: teorema de Schwarz.

25. Sea $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para $(x,y) \in \Re^2$.

(b) Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ para $(x,y) \in \Re^2$.

(c) Comprobar que f verifica las hipótesis del teorema de Schwarz para $(x,y) \neq (0,0)$ y deducir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

(d) Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. ¿Qué hipótesis del teorema de Schwarz no se verifica en este punto?

26. Para el punto P que se indican y para $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ definida por:

(26.1) $\mathrm{f(x,y,z) = xy^2z + xy^2z^3}$ $\quad P(1,1,1)$ $\quad$ (26.2) $\mathrm{f(x,y) = e^{xy}}$ $\quad P(1,0)$

(26.3) $\mathrm{f(x,y) = x\ln(2y) + y\,sen(x^2+y)}$ $\quad P(0,\frac{\pi}{2})$ $\quad$ (26.4) $\mathrm{f(x,y,z) = \cos(xyz^2) + sen(x^2yz)}$ $\quad P(1,\dfrac{\pi}{2},1)$

(a) Calcular las derivadas parciales de primer orden en un punto genérico y en el punto P.

(b) Calcular la matriz hessiana de f en un punto genérico y en el punto P.

Funciones homogéneas: teorema de Euler.

27. Para $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ definida por:

(27.1) $\mathrm{f(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad$ (27.2) $\mathrm{f(x,y,z) = xyz^3 - 4x^2y^2z}$

(27.3) $\mathrm{f(x,y) = x^3y^2}$ $\quad$ (27.4) $\mathrm{f(x,y) = x^3y + xy^3}$

(a) Estudiar si f es homogénea y, en su caso, determinar el grado de homogeneidad.

(b) Comprobar que se verifican las hipótesis del teorema de Euler y aplicarlo para expresar $f(x,y)$ en función de sus derivadas parciales.

28. Sean $f_1, f_2 : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ y $g : I\!R \longrightarrow I\!R$ definidas por:

$$f_1(x,y) = x^3y + xy^3, \quad f_2(x,y) = (x+y)^2, \quad g(x) = x^3.$$

(a) ¿Son homogéneas?. ¿De qué grado?.

(b) ¿Son $f_1 + f_2$ y $f_1 - f_2$ homogéneas?. ¿De qué grado?.

(c) ¿Son $f_1 \cdot f_2$ y $\dfrac{f_1}{f_2}$ homogéneas?. ¿De qué grado?.

(d) ¿Son $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,y)$ homogéneas?. ¿De qué grado?.

(e) ¿Son $g \circ f_1$ y $g \circ f_2$ homogéneas?. ¿De qué grado?.

Funciones definidas de forma implícita: teorema de la función implícita.

29. En el punto $P(x_0, y_0)$ que se indica y para $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

    $(29.1)\, \mathrm{F(x,y) = x^2y - xy^2} \quad P(1,1) \quad (29.2)\, \mathrm{F(x,y) = y^2\cos x - e^x y - 2} \quad P(0,2)$

    Estudiar si $F(x, y) = 0$ define a y como función implícita de x en un entorno de P y calcular las derivadas primera y segunda de $y = y(x)$ en x_0.

30. Para $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

    $(30.1)\, \mathrm{F(x,y) = 1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right)} \quad (30.2)\, \mathrm{F(x,y) = \cos(x+y) + y} \quad (30.3)\, \mathrm{F(x,y) = e^{xy} - xy - 1}$

    Estudiar bajo qué condiciones la ecuación $F(x, y) = 0$ define una función implícita $y = y(x)$ y, bajo estas condiciones, calcular las derivadas primera y segunda de dicha función implícita.

31. En el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ que se indica y para $F : I\!R^3 \longrightarrow I\!R$ definida por:

    $(31.1)\, \mathrm{F(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x - 3} \quad P(1,1,1) \quad (31.2)\, \mathrm{F(x,y,z) = xyz - (x+y+z) + 4} \quad P(2,0,2)$
    $(31.3)\, \mathrm{F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3} \quad P(1,1,1)$

    Estudiar si $F(x, y, z) = 0$ define a x en función de y y z en un entorno de P y, en caso afirmativo, calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de $x = x(y, z)$ en (y_0, z_0).

32. En el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ que se indica y para $F : I\!R^3 \longrightarrow I\!R$ definida por:

    $(32.1)\, \mathrm{F(x,y,z) = \ln z - \dfrac{x^2y}{z}} \quad P(1,1,1) \quad (32.2)\, \mathrm{F(x,y,z) = \ln\left(\dfrac{10x}{y}\right) + \dfrac{z}{100}} \quad P(10,2,200)$

    Estudiar si $F(x, y, z) = C$ define a z en función de x e y en un entorno de P y, en caso afirmativo, determinar C y calcular las derivadas parciales de $z = z(x, y)$ respecto de dichas variables en (x_0, y_0).

33. En el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ que se indica y para los sistemas dados por:

    $(33.1) \left\{ \begin{array}{l} xz - ylnx + 3yz = 0 \\ e^y + 2xz - cosy = 0 \end{array} \right. \quad P(1,0,0) \quad (33.2) \left\{ \begin{array}{l} xy^2 + yz^2 + xz^2 - 3 = 0 \\ x^2y^2 + yz + z^2x^3 - 3 = 0 \end{array} \right. \quad P(1,1,1)$

    Estudiar si el sistema define a x e y en función de z en un entorno de P y, en caso afirmativo, calcular las derivadas de $x = x(z)$ e $y = y(z)$ en z_0.

34. En el punto $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ que se indica y para los sistemas dados por:

    $(34.1) \left\{ \begin{array}{l} x + y + u + v = 2 \\ x + 2y + u^3 + v^4 = 2 \end{array} \right. \quad P(0,0,1,1) \quad (34.2) \left\{ \begin{array}{l} v^x + (y+1)^v + ln(x+y) - 2 = 0 \\ v^u - x^y + e^{x-y} - e = 0 \end{array} \right. \quad P(1,0,1,1)$

    Estudiar si el sistema define a u y v como funciones implícitas de x e y en un entorno de P y, en caso afirmativo, calcular $\nabla u(x_0, y_0)$ y $\nabla v(x_0, y_0)$

35. Estudiar cuándo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} \ln(xy) + 100z = C_1 \\ \frac{10x-y}{20} = C_2 \end{array} \right.$ define implícitamente una solución $z = f(x, y)$ con $f(10, 10) = 2$ y, en este caso, calcular la matriz jacobiana de f en el punto $(10, 10)$.

36. Estudiar cuándo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - yu = 0 \\ xy + uv = 0 \end{array} \right.$ define implícitamente una solución $(u, v) = f(x, y)$ y, en este caso calcular la matriz jacobiana de f.

    Comprobar los resultados obteniendo explícitamente la función $f(x, y)$.

37. Calcular los valores de A y B para los que, en un entorno del punto (1,1,1), no se pueda asegurar la existencia de ninguna función implícita cumpliendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^y + Alnz + y^2 = 2 \\ Ax^3 + Blny + lnz = A \end{array} \right. \quad \text{con}\, x, y, z > 0.$$

Aproximación no lineal de funciones reales: fórmula de Taylor.

38. Para $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

    (38.1) $\mathrm{f(x) = e^x}$ (38.2) $\mathrm{f(x) = ln(1+x)}$ (38.3) $\mathrm{f(x) = sen\,x}$ (38.4) $\mathrm{f(x) = cos\,x}$

    (a) Obtener el desarrollo de McLaurin de grado n de f expresando explícitamente el término complementario.

    (b) Utilizando el desarrollo de McLaurin adecuado, calcular con un error máximo de una milésima: (i) sen(0.1) (ii) ln(1.2) (iii) $\sqrt{e}$

39. Desarrollar la función $f(x) = \sqrt{x}$ en un entorno de $x_0 = 1$ y calcular una aproximación de $\sqrt{2}$. Comparar el resultado con el que se obtiene en una calculadora. ¿Es buena la aproximación? ¿Por qué?

40. Estudiar si $xy = 1$ define a y en función de x en un entorno de $(1,1)$ y, en caso afirmativo, obtener el desarrollo de Taylor de orden 2 de $y = y(x)$ en un entorno de $x_0 = 1$.
    Comprobar los resultados obteniendo explícitamente la función $y(x)$.

41. Estudiar si $x^2 + y^2 = 1$ define a x en función de y en un entorno de $(1,0)$ y, en caso afirmativo, obtener el desarrollo de McLaurin de orden 2 de $x = x(y)$.

42. Desarrollar en serie de potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$ los polinomios:

    (42.1) $\mathrm{p(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy}$ (42.2) $\mathrm{q(x,y) = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - 5x^2 + 3y^2}$

43. Hallar, cuando sea posible, los desarrollos de Taylor de orden 2 en los puntos que se indican para $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

    (43.1) $\mathrm{f(x,y) = xy^2 + sen(xy)}$ $\mathrm{P(1, \frac{\pi}{2})}$ y $\mathrm{Q(0,0)}$ (43.2) $\mathrm{f(x,y) = ln(1+xy)}$ $\mathrm{P(2,3)}$ y $\mathrm{Q(0,0)}$

    (43.3) $\mathrm{\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}}$ $\mathrm{P(1,2)}$ y $\mathrm{Q(0,0)}$

44. Calcular,aplicando el desarrollo de Taylor de segundo orden de una cierta función, el valor aproximado de $\sqrt{1.03}\sqrt[3]{0.98}$.

45. Desarrollar la función $f(x,y) = x^y$ en un entorno del punto $(1,1)$ hasta las derivadas de tercer orden y aplicar el resultado para dar una aproximación de $1.1^{1.02}$.

46. Estudiar si $3x^2yz - ylnx - 3 = 0$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(1,1,1)$ y, en caso afirmativo, obtener el desarrollo de Taylor de orden 2 de $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(1,1)$.
    Comprobar los resultados obteniendo explícitamente la función $z(x,y)$.

TEMA 4: INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES.

Calculo de primitivas.

47. Calcular una primitiva de $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

(47.1) $\mathrm{f(x)} = \sqrt[4]{x}$ (47.2) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}$ (47.3) $\mathrm{f(x)} = 2^{\mathrm{x}-1}$ (47.4) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{4-\mathrm{x}^2}}$

(47.5) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{1+\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^2}$ (47.6) $\mathrm{f(x)} = \tan(\mathrm{x})$ (47.7) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}\sqrt{1-6\mathrm{x}^2}$ (47.8) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}$

48. Calcular una primitiva de $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

(48.1) $\mathrm{f(x)} = \arctan(\mathrm{x})$ (48.2) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{xe}^{\mathrm{x}}$ (48.3) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2\cos(\mathrm{x})$

(48.4) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{sen(x)}$ (48.5) $\mathrm{f(x)} = \ln(\mathrm{x})$ (48.6) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{sen(x)}\ln(\cos(\mathrm{x}))$

49. Calcular una primitiva de $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

(49.1) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+6}$ (49.2) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{15\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}-81}{\mathrm{x}^3-13\mathrm{x}+12}$ (49.3) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^3-5\mathrm{x}^2+8\mathrm{x}-4}$

(49.4) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}^3-3\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+1}$ (49.5) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+2}$ (49.6) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{3\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+2}$

(49.7) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{3\mathrm{x}+4}{\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+5}$ (49.8) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{x}^3+\mathrm{x}}$ (49.9) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{3\mathrm{x}}{\mathrm{x}^3-2\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-2}$

50. Calcular una primitiva de $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

(50.1) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{sen(x)}}$ (50.2) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{sen(x)}\cos^4(\mathrm{x})}$ (50.3) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\cos(\mathrm{x})}{1-\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})}$ (50.4) $\mathrm{f(x)} = \mathrm{sen}^2(\mathrm{x})\cos^4(\mathrm{x})$

51. Calcular las siguientes integrales:

(51.1) $\displaystyle\int \ln^3(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ (51.2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-3\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$ (51.3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\mathrm{x}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$ (51.4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})+2\cos^2(\mathrm{x})}{\mathrm{sen(x)}\cos(\mathrm{x})}\mathrm{dx}$

(51.5) $\displaystyle\int \sqrt{4-\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$ (51.6) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{ax}}\,\mathrm{sen(bx)dx}$ (51.7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}(1+\mathrm{x}\ln\mathrm{x})}{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$ (51.8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}$

(51.9) $\displaystyle\int \mathrm{x}^2\ln\mathrm{x}\mathrm{dx}$ (51.10) $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{\mathrm{x}}}{\sqrt{\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$ (51.11) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}\sqrt{1-\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$ (51.12) $\displaystyle\int \mathrm{xe}^{-2\mathrm{x}}\mathrm{dx}$

Integrales definidas. Teoremas fundamentales del Cálculo Integral.

52. Para el intervalo que se indica y para $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

(52.1) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{x}\ln(\mathrm{x})}$ $[2, e]$ (52.2) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{x}-1}{2\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}-2}$ $[-1, 0]$ (52.3) $\mathrm{f(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+3}$ $[0, \ln 5]$

Determinar las condiciones que debe verificar un intervalo genérico para que f sea integrable Riemann en el mismo y calcular, si es posible, la integral de Riemann de $f(x)$ en el intervalo que se indica.

53. Calcular, si es posible, las siguientes integrales definidas:

(53.1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{x\,sen(x)dx}$ (53.2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\mathrm{x})\sqrt{4-\mathrm{sen}(2\mathrm{x})}\mathrm{dx}$ (53.3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}^2+1}\mathrm{dx}$

54. Calcular el área de las siguientes regiones:

(54.1) $\{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, \mathrm{y} \geq \mathrm{x}^2-1,\ \mathrm{y} \leq 1-\mathrm{x}^2\}$

(54.2) $\{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, \mathrm{y} \geq -\mathrm{x},\ \mathrm{y} \geq \mathrm{x}^2,\ \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2 \leq 1\}$

(54.3) $\{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 \,/\, \mathrm{y} \geq 0,\ \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2 \leq 4,\ \mathrm{x}+\mathrm{y} \leq 2\}$

55. Calcular el área común a dos círculos de radio 1 y centros respectivos $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

Integrales dependientes de parámetros. Derivación bajo el signo de la integral.

56. Calcular $I'(\alpha)$ para $I : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

$$(56.1)\ \mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} e^{\alpha x^2}\,dx \qquad (56.2)\ \mathrm{I}(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx \qquad (56.3)\ \mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{2\pi\alpha} e^{-\alpha x}\operatorname{sen}\alpha x\,dx$$

57. Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}x\cos x\,dx$ partiendo de $\displaystyle I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha x}\cos x\,dx$

58. Calcular $\displaystyle\int_1^e x^3\ln^2 x\,dx$ partiendo de $\displaystyle I(\alpha) = \int_1^e x^\alpha\,dx$

59. Calcular $\displaystyle I(n) = \int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{\ln x}\,dx\ \ n \geq 1.$

Integrales impropias.

60. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(60.1)\int_1^{+\infty}\frac{1}{2e^x+1}\,dx \quad (60.2)\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^3+2}\,dx \quad (60.3)\int_1^{+\infty}\frac{x^3}{e^{2x}+1}\,dx \quad (60.4)\int_2^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

$$(60.5)\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx \quad (60.6)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx \quad (60.7)\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\,dx$$

61. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcularlas cuando sean convergentes:

$$(61.1)\int_0^{+\infty}e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx \quad (61.2)\int_{-\infty}^{1}x\,e^x\,dx$$

62. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(62.1)\int_{0^+}^{1}\frac{\ln x}{x^2}\,dx \quad (62.2)\int_{0^+}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} x}{x^4}\,dx \quad (62.3)\int_1^{2^-}\frac{x}{(2-x)^2}\,dx \quad (62.4)\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$$

63. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcularlas cuando sean convergentes:

$$(63.1)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x}} \quad (63.2)\int_{0^+}^{e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \quad (63.3)\int_{0^+}^{1}x\ln x\,dx$$

64. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(64.1)\int_{0^+}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad (64.2)\int_{2^+}^{+\infty}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}\,dx \quad (64.3)\int_{1^+}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$(64.4)\int_{0^+}^{1}\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx \quad (64.5)\int_{0^+}^{1}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx \quad (64.6)\int_{0^+}^{+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^5+16x}}\,dx$$

65. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcularlas cuando sean convergentes:

$$(65.1)\int_0^{1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \quad (65.2)\int_{0^+}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx \quad (65.3)\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

66. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(66.1)\int_0^{+\infty}\frac{x^a}{1+x}\,dx\ \text{ con }\ a\in\mathrm{R} \quad (66.2)\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx\ \text{ con }\ \alpha>0$$

67. Calcular las siguientes integrales dobles:

(67.1) $\int\int_D dx\,dy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, y+x \leq 1,\, y \geq 0\}$

(67.2) $\int\int_D x^3 y\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\, y+x \leq 1,\, y \geq 0\}$

(67.3) $\int\int_D \frac{x}{y}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, xy \leq 16,\, x \geq y,\, x-6 \leq y,\, x \geq 0,\, y \geq 1\}$

(67.4) $\int\int_D xye^{-y^2}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, 1 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y^2 \leq x\}$

68. Calcular, utilizando el cambio a coordenadas polares, las siguientes integrales:

(68.1) $\int\int_D \frac{x}{y^2(x^2+y^2-1)}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, 2 \leq x^2+y^2 \leq 4,\, 0 \leq x \leq y\}$

(68.2) $\int\int_D (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x \leq y,\, x+y \geq 1,\, x^2+y^2 \leq 1\}$

(68.3) $\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 4,\, x \geq 1,\, y \geq 0\}$

(68.4) $\int\int_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 16,\, y \geq 0,\, 0 \leq x \leq 2\}$

(68.5) $\int\int_D (x^2+y^2)\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1,\, x \geq y,\, x \geq -y,\, x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

69. Calcular, utilizando el cambio de variable que se indica, las siguientes integrales:

(69.1) $\int\int_D cos(\frac{x-y}{x+y})\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x+y \leq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$ con $\left\{\begin{array}{r} u = x-y \\ v = x+y \end{array}\right.$

(69.2) $\int\int_D \sqrt{(x+y)^2+1}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x,y \geq 0,\; x+y \leq 1\}$ con $\left\{\begin{array}{r} u = x+y \\ v = y \end{array}\right.$

70. Calcular $\int\int_D (2x-1)e^{x^2+y}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x+y \geq 1,\, x \geq \frac{1}{2},\, y+x^2 \leq 1\}$

71. Calcular $\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, (x-1)^2+y^2 \leq 1,\; 1 \leq x \leq 2\}$

72. Calcular $\int\int_D x^2\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, y \geq 0,\, (x-1)^2+y^2 \geq 1,\, (x-2)^2+y^2 \leq 4\}$

73. Calcular $\int\int_D e^{\frac{y}{x+y}}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x+y \leq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$

74. Calcular $\int\int_D e^{-(x^2+2y^2+2xy)}\, dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x^2+2y^2+2xy \leq 1\}$
Indicación: utilizar que $x^2+2y^2+2xy = (x+y)^2+y^2$.

75. Calcular $\int\int_D x\, dxdy$ siendo: $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\; y \geq 0,\; x \leq 1,\; x^2+y^2 \leq 4,\; x+y \leq 2\}$

TEMA 5: INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN

Extremos de funciones reales de una variable real

76. Hallar los máximos y mínimos de $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida por:

(76.1) $\mathrm{f(x) = sen\,x}$ $\quad 0 \le x \le 2\pi$ $\quad$ (76.2) $\mathrm{f(x) = \cos x}$ $\quad 0 \le x \le 2\pi$

(76.3) $\mathrm{f(x) = sen^2(x^2-1)}$ $\quad -2 \le x \le 2$ $\quad$ (76.4) $\mathrm{f(x) = (x+90)(450-3x)}$ $\quad x \ge 0$

Extremos de funciones reales de varias variables reales

77. Hallar los máximos y mínimos de $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

(77.1) $\mathrm{f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3}$ $\quad$ (77.2) $\mathrm{f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy}$

(77.3) $\mathrm{f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2}$ $\quad$ (77.4) $\mathrm{f(x,y) = (x-y)(1-xy)}$

(77.5) $\mathrm{f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5}$ $\quad$ (77.6) $\mathrm{f(x,y) = 2xy - 2x^2 - y^2 + 8x - 2y}$

78. Calcular y clasificar los puntos estacionarios de $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

(78.1) $\mathrm{f(x,y) = x^2 - x^2y + 2y^2}$ $\quad$ (78.2) $\mathrm{f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y}$

79. Hallar los máximos de $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ definida por:

(79.1) $\mathrm{f(x,y) = 100x + 150y - 40lnx - 20lny - 20x^2 - 35y^2}$ con $x, y \ge 0$

(79.2) $\mathrm{f(x,y) = 30x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 15x - 10y}$ con $x, y \ge 0$

(79.3) $\mathrm{f(x,y,z) = 16x + 12y + 20z - x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 2xz - 25}$ con $x, y, z \ge 0$

80. Dada la función $f(x,y) = ax^2 + 2xy + by^2 + x + y + 1$ con a, $b \in I\!R$ tales que $ab \ne 1$ y $a \ne 0$, discútanse los extremos de f según los valores de los parámetros a y b.

81. Hallar, bajo la restricción que se indica, los máximos y mínimos de $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ definida por:

(81.1) $\mathrm{f(x,y,z) = x - 2y + 2z}$ restringida a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(81.2) $\mathrm{f(x,y) = 8x^2 - xy + 12y^2}$ restringida a $x + y = 42 \quad (x, y \ge 0)$

(81.3) $\mathrm{f(x,y) = x^2y^2}$ restringida a $x^2 + y^2 = 1 \quad (x, y \ge 0)$

(81.4) $\mathrm{f(x,y) = -x + (y-1)^2 + 10}$ restringida a $x^2 + (y-1)^2 = 9 \quad (x, y \ge 0)$

(81.5) $\mathrm{f(x,y) = xy}$ restringida a $3x + 2y = 120 \quad (x, y \ge 0)$

(81.6) $\mathrm{f(x,y) = 2xy + 6y}$ restringida a $2x + 3y = 60 \quad (x, y \ge 0)$

(81.7) $\mathrm{f(x,y) = xy}$ restringida a $x + y = k \quad (k \in I\!R)$

82. Determinar tres números positivos x, y, z tales que:

(82.1) xyz es máximo sujeto a $x + y + z = 18$

(82.2) $\mathrm{x + y + z}$ es mínimo sujeto a $xyz = 27$

83. ¿Para qué valores de b el punto $(1, 1, -1)$ es un mínimo de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + bxy + x + y + 2z$ restringida a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$?. ¿Y para qué valores de b es un máximo?.

Licenciatura de Economía junio (22–06–2004)

1. (a) Sean $f : \Re^2 \to \Re$ una función diferenciable dos veces con continuidad y (x_0, y_0) un punto crítico suyo (en el cuál se anulan las derivadas parciales de primer orden). Se sabe:
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = a$, con $a \neq 0$,
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = 0$

   Estudiar el carácter como extremo relativo del punto (x_0, y_0) según los valores de a.

   (b) Definir el concepto de función homogénea de grado α para una función $f : \Re^n \to \Re$ y enunciar el teorema de Euler para funciones de $\Re^n$ en $\Re$ homogéneas y diferenciables.

   (c) De una función $f : \Re^2 \to \Re$ homogénea y diferenciable se sabe que

   $$f(1,2) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -8, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 8.$$

   Calcular el grado de homogeneidad de f,

2. Sean $f, g : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definidas por:

   $$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{e^{x+y} - 1}, x^y \right) \qquad g(u,v) = \left(\frac{u}{v}, uv \right).$$

   (a) Obtener los conjuntos de $\Re^2$ en los que son diferenciables y calcular sus respectivas matrices jacobianas en un punto genérico.

   (b) Calcular la matriz jacobiana de $g \circ f$ en el punto $(1,0)$ mediante la aplicación de la regla de la cadena.

   (c) Calcular las derivadas direccionales de las funciones componentes de f en el punto $(1,0)$ en la dirección del vector $(1,1)$.

3. Dada la función $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, se pide:

   (a) Comprobar que $F(x,y,z) = 0$ define una función implícita $z = f(x,y)$ en las proximidades del punto $(1,1,2)$.

   (b) Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de $f(x,y)$ en un punto próximo a $(1,1)$ y, en particular, en el punto $(1,1)$.

   (c) Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x,y)$ en las proximidades del punto $(1,1)$.

4. Estudiar los extremos relativos de la función $f(x,y) = 40x - 7x^2 + 20y - 4y^2 - 4xy - 120$.

5. Calcular la integral doble $\displaystyle\int\!\!\int_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$, donde $D = \{(x,y) \in I\!R^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$ con $a > 0$.

Licenciatura de Economía septiembre (6–09–2004)

1. (a) Sea $F : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ una función de clase 1 tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$. Probar que $F(x, y) = 0$, o bien define a y como función implícita de x o bien define a x como función implícita de y en un entorno del punto (x_0, y_0).

   (b) Enunciar el teorema del valor medio.

   (c) Enunciar la regla de Barrow.
   ¿ Es posible aplicarla para calcular la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$?

2. Hallar los valores de a y b para que la función escalar $f(x, y) = ax^3 + 3bxy^2 - 15a^2x - 12y$ tenga un mínimo local en el punto $(2, 1)$

3. Sea $g(x, y) = f(xy^2, x^2y)$, donde $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ es diferenciable en el punto $(1, 1)$, con $\nabla^t f(1, 1) = (2, 2)$.

   (a) Probar que g es diferenciable en el punto $(1, 1)$ y hallar su diferencial en dicho punto.

   (b) Calcular $D_v\, g(1, 1)$, donde $v = (1, -1)$.

   (c) Suponiendo que f es homogénea de grado 2, probar que g es homogénea y encontrar su grado de homogeneidad.

4. Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ e^{xyz} + xy = 2 \end{array} \right.$

   (a) Pruébese que es posible obtener las funciones $y = y(x), z = z(x)$, en algún entorno del punto (1,1,0).

   (b) Obtener el desarrollo de orden 2 de $y = y(x), z = z(x)$ en un entorno de $x = 1$.

5. Calcular la integral doble siguiente:
   $\displaystyle\int\int_D \frac{xy^2}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, donde $D = \{(x, y) \in I\!R^2 / x^2 + y^2 \leq 16,\ y \geq 0,\ 0 \leq x \leq 2\}$.

Licenciatura de Economía diciembre (10–12–2004)

1. Sean $f : D \subseteq \Re^2 \longrightarrow \Re$ y $(x_0, y_0) \in \text{int}(D)$. Justificando las respuestas, se pide:

   (a) Decir si las siguientes condiciones son condición necesaria, condición suficiente, o condición necesaria y suficiente para que f sea diferenciable en (x_0, y_0)

   i. f es una función continua en (x_0, y_0).

   ii. Las derivadas parciales de f son continuas en (x_0, y_0).

   iii. Para cualquier vector $v = (v_1, v_2)$ se verifica que $D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)^t v$.

   iv. $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0)^t (h_1, h_2)}{||(h_1, h_2)||} = 0.$

   (b) Supongamos que $D_v f(x_0, y_0) = \dfrac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2} \quad \forall\, v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$.

   i. Calcular las derivadas parciales de f en (x_0, y_0).

   ii. Determinar si f es diferenciable en (x_0, y_0).

   (c) Supongamos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \nabla f(x, y) = \nabla f(x_0, y_0)$. ¿Podemos afirmar que f es diferenciable en (x_0, y_0)?.

2. Sean $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ y $g : I\!R \longrightarrow I\!R^2$ definidas por:

$$f(x, y) = \frac{x^y}{x^2 + y^2} \qquad \text{y } g(t) = \left(\frac{1}{t+1}, e^t\right).$$

   (a) Determinar los conjuntos en los que f y g son diferenciables.

   (b) Calcular, si es posible, $D(g \circ f)(1, 0)$ y $D(f \circ g)(0)$

3. Obtener, si es posible, el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y) = \text{sen}(xy)$ en un entorno del punto $(0, \pi)$.

4. Estudiar si la ecuación $xy + z + xyz = 1$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(0, 0, 1)$.

   En caso afirmativo, estudiar si $z = z(x, y)$ tiene un óptimo relativo en $(0, 0)$.

5. Calcular $\displaystyle\int\int_D e^{\frac{y}{x+y}}\, dxdy$ con $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \,/\, x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

   Indicación: Utilizar el cambio de variables $u = x + y$, $v = y$.

Licenciatura de Economía junio (25–06–2005)

1. (teoría) Para funciones reales de varias variables reales, se pide:

   (a) Relación entre continuidad y diferenciabilidad.

   (b) Definición de derivada direccional y derivada parcial en un punto.

   (c) Relación entre existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad.

   (d) Para $f : \Re^2 \longrightarrow \Re$ definida por

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 - 4y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

      i. Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$.

      ii. Calcular la derivada según un vector genérico y las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

      iii. Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

2. Sea $g : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ definida por $g(x,y,z) = f\left(x+y^2, xyz\right)$ con $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ diferenciable en el punto $(2,1)$ y de la que se sabe que su matriz jacobiana en el punto $(2,1)$ es

   $$Jf(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Demostrar que g es diferenciable en el punto $(1,1,1)$ y calcular su diferencial en dicho punto.

3. Estudiar si la ecuación $x^2 + z^2y^2 = 1$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(0,1,1)$. En caso afirmativo obtener:

   (a) las derivadas parciales de primer y segundo orden de $z = z(x,y)$ en el punto $(0,1)$,

   (b) el desarrollo de Taylor de segundo orden de $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1)$.

4. Optimizar la función $f(x,y) = 2x - y$ en el conjunto $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \ / \ x^2 - 2y = 3\}$ utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

5. Calcular $\displaystyle\int\!\!\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ con $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \ / \ 2 \leq x^2+y^2 \leq 4, \ x \geq -y, \ y \leq x+2, \ y \geq 0\}$

1. (teoría) Para funciones reales de varias variables reales, se pide:

   (a) Definir función homogénea y enunciar el teorema de Euler para funciones homogéneas y diferenciables.

   (b) Para $f : \Re^2 \longrightarrow \Re$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 - 4y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   i. Estudiar si f es homogénea y, en su caso, determinar el grado de homogeneidad.

   ii. Estudiar la diferenciabilidad de f en $\Re^2$.

   iii. Aplicar, si es posible, el teorema de Euler para expresar $f(x,y)$ en función de sus derivadas parciales.

2. Sean $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ y $g : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definidas por:

$$f(x,y) = \left(x^2 + y, \operatorname{sen}(xy)\right) \quad g(u,v) = (uv, u^v).$$

   (a) Estudiar si $g \circ f$ es diferenciable en $(0,1)$ y, en su caso, calcular su diferencial en dicho punto.

   (b) Estudiar si $f \circ g$ es diferenciable en $(0,1)$ y, en su caso, calcular su diferencial en dicho punto.

3. Estudiar si el sistema

$$\begin{cases} xy^2 + z = 2 \\ x^2y + z = 2 \end{cases}$$

   define a x e y como funciones implícitas de z en un entorno del punto $(1,1,1)$. En caso afirmativo obtener los desarrollos de Taylor de segundo orden de $x = x(z)$ y de $y = y(z)$ en un entorno de 1.

4. Una empresa produce un bien a partir de dos factores productivos en cantidades x e y según la función de producción $q(x,y) = 9x + 4y^2$. El nivel de contaminación generado por el proceso de fabricación viene dado por la función $c(x,y) = x + y^2$. Determinar, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, los valores de x e y que maximizan la producción si se desea mantener un nivel de contaminación de 36 unidades.

5. Calcular $\displaystyle\int\int_D \sqrt{(x+y)^2+1}\, dxdy$ con $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, x+y \leq 1,\ x,y \geq 0\}$.

   Indicación: Utilizar el cambio de variables $u = x+y$, $v = y$.

Licenciatura de Economía diciembre (1–12–2005)

1. (teoría) Para funciones reales de varias variables reales, se pide:

   (a) Definir el concepto de función diferenciable y la diferencial de una función en un punto.

   (b) Para $f : \Re^2 \longrightarrow \Re$ definida por

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

      i. Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$.

      ii. Calcular la derivada según un vector genérico y las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

      iii. Enunciar una condición necesaria pero no suficiente de diferenciabilidad que permita demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$ y, utilizando esta condición, demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

2. Sea $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ diferenciable en el punto $(4,3)$, con $f(4,3) = 2$ y $\nabla f(4,3) = (2,-1)$.

   (a) Probar que $h : I\!R \longrightarrow I\!R$ dada por $h(t) = f(t^2, t+1)$ es derivable en $t = 2$ y calcular $h'(2)$.

   (b) Calcular la derivada direccional de $h \circ f$ en el punto $(4,3)$ según la dirección del vector $(1,1)$ normalizado.

3. (a) Estudiar si la ecuación $zx^2 + y^2 = 2$ define a x como función implícita de y y de z en un entorno del punto $(1,1,1)$.

   (b) En caso afirmativo obtener el desarrollo de Taylor de segundo orden de $x = x(y,z)$ en un entorno del punto $(1,1)$.

4. Para $f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ dada por $f(x,y) = x(450-3x) + y(500-5y)$, se pide

   (a) Obtener los extremos relativos de f.

   (b) Obtener los extremos relativos de f restringida a $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \ / \ 3x + 5y = 525\}$.

5. Calcular $\int\int_D xy \; dxdy$ siendo $D = \{(x,y) \in I\!R^2 \ / \ x \geq 0, \ y \geq x, \ y \leq 1\}$

   (a) Mediante coordenadas cartesianas.

   (b) Mediante coordenadas polares.